Cours V :
Electrocinétique

<u>Programme officiel</u> : *Les composants au programme de la classe de TSI deuxième année sont les mêmes que ceux du programme de TSI première année.*

1 Système linéaire en régime permanent sinusoïdal

Une des problèmes fondamentaux posés à l'électronicien est d'extraire la partie utile d'un signal issu d'un capteur, ou reçu d'un interlocuteur, en réduisant le plus possible la partie parasite.

1.1 Filtre linéaire

1.1.1 Définition

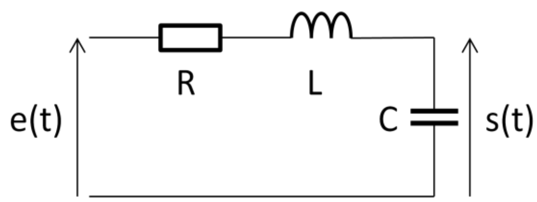
On considère ici un système physique comprenant des grandeurs d'entrée et de sortie. On peut par exemple penser aux problèmes physiques suivants :

- Dans une solution chimique, la grandeur d'entrée peut être le volume d'acide versé et la grandeur de sortie le pH
- Dans un local chauffé à l'électricité, la grandeur d'entrée peut être le courant circulant dans la résistance chauffante et la grandeur de sortie la température au centre du local
- Dans un circuit électrique, les grandeurs d'entrée et de sortir peuvent être des intensités du courant dans certaines branches ou des tensions.

<u>Définition :</u>
Le système physique étudié sera donc considéré comme un opérateur qui, à un signal d'entrée e(t) associe un signal de sortie s(t).

Un opérateur électronique est un filtre si son équation entrée-sortie est une équation différentielle linéaire à coefficients constants.

<u>Exemple</u> : Circuit RLC



Les tensions s(t) et e(t) sont reliées par l'équation différentielle linéaire à coefficients constants :

$$LC\frac{d^2s(t)}{dt^2}+RC\frac{ds(t)}{dt}+s(t)=e(t)$$

1.1.2 Principe de superposition

Propriété :
Si l'on connait le signal de sortie s(t) associé à un signal d'entrée e(t), on peut affirmer que le système soumis à une entrée e'(t) = λe(t) répondra **proportionnellement** par la sortie s'(t) = λs(t).
De même, on peut **superposer** les signaux obtenus pour deux excitations e1(t) et e2(t) : la réponse associée à l'entrée e(t) = e1(t) + e2(t) sera s(t) = s1(t) + s2(t).

1.2 Régime harmonique

1.2.1 Régime sinusoïdal permanent

A l'entrée du système, on applique un signal sinusoïdal de pulsation ω :

$$e(t) = E_m \cos(\omega t)$$

L'étude de la réponse temporelle s'effectue en deux temps :

- lors du régime transitoire, superposition d'une solution homogène et particulière
- après amortissement du régime transitoire, régime sinusoïdal forcé = solution particulière

Lorsque le régime transitoire est totalement amorti, on parle de régime harmonique et la solution s(t) prend la forme :

$$s(t) = S_m \cos(\omega t + \varphi)$$

On peut alors passer en notation complexe avec :

$$e(t) = \Re(\underline{e}) = \Re\left(E_m e^{j\omega t}\right) \quad et \quad s(t) = \Re(\underline{s}) = \Re\left(S_m e^{j(\omega t+\varphi)}\right)$$

Propriété :
Dans le cas d'un signal d'excitation fonction sinusoïdal du temps $e(t) = E_m \cos(\omega t)$, le signal de sortie est également sinusoïdal, de même pulsation :

$$s(t) = S_m \cos(\omega t + \varphi)$$

1.2.2 Fonction de transfert

Définition :
La fonction de transfert du filtre se définit par :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} \tag{1}$$

Avec : $\underline{H}(j\omega)$ = Fonction de transfert
$\underline{s}$ = Amplitude complexe du signal de sortie du filtre
$\underline{e}$ = Amplitude complexe du signal d'entrée du filtre

Exemple : Circuit RLC
L'équation différentielle conduit à :

$$LC\frac{d^2s(t)}{dt^2} + RC\frac{ds(t)}{dt} + s(t) = e(t) \quad \Rightarrow \quad \left(-LC\omega^2 + jRC\omega + 1\right)\underline{s} = \underline{e}$$

Donc la fonction de transfert du filtre s'écrit :

$$\underline{H}(j\omega)=\frac{\underline{s}}{\underline{e}}=\frac{1}{1+jRC\omega-LC\omega^2}$$

Propriété :
Le module de la fonction de transfert est le rapport des amplitudes :

$$\left|\underline{H}\right|=\frac{S_m}{E_m} \qquad (2)$$

Avec : $\underline{H}$ = Fonction de transfert
S_m = Amplitude du signal de sortie du filtre
E_m = Amplitude du signal d'entrée du filtre

L'argument est égal au déphasage entre les signaux d'entrée et sortie :

$$Arg(\underline{H})=\varphi \qquad (3)$$

Avec : $\underline{H}$ = Fonction de transfert
φ = Déphasage du signal de sortie du filtre par rapport au signal d'entrée

Exemple : Circuit RLC
Le module de la fonction de transfert du filtre s'écrit :

$$\begin{aligned}\left|\underline{H}(j\omega)\right| &= \frac{1}{\sqrt{\left(1-LC\omega^2\right)^2+\left(RC\omega\right)^2}}\\ &= \frac{1}{\sqrt{1+\left(\left(RC\right)^2-2LC\right)\omega^2+\left(LC\right)^2\omega^4}}\end{aligned}$$

L'argument de la fonction de transfert du filtre s'écrit :

$$\begin{aligned}Arg\left(\underline{H}(j\omega)\right) &= Arg\left(\frac{1}{1+jRC\omega-LC\omega^2}\right)\\ &= \underbrace{Arg\left(1\right)}_{0}-Arg\left(1+jRC\omega-LC\omega^2\right)\\ &= \begin{cases}-\tan^{-1}\left(\dfrac{RC\omega}{1-LC\omega^2}\right) & si \quad \omega\leq\omega_0\\ -\pi-\tan^{-1}\left(\dfrac{RC\omega}{1-LC\omega^2}\right) & si \quad \omega>\omega_0\end{cases}\end{aligned}$$

1.2.3 Représentation de la fonction de transfert

Lorsque la pulsation des signaux varie, on décrit le comportement du filtre en examinant les variations du module et de l'argument de la fonction de transfert avec la pulsation.

Or, les signaux couramment traités en électronique ont des fréquences variant dans de très grandes proportions. Une décade correspond à un intervalle [f, 10f]. Pour accorder à chaque décade une importance comparable, on fera varier la pulsation selon une échelle logarithmique.

Exemple : Signal musical
L'intervalle des fréquences est [20 Hz, 20kHz] : soit une variation d'un rapport 1000 = 3 décades.

Définition :
Dans une représentation logarithmique, on définit le gain en décibels :

$$G_{dB} = 20\log_{10}\left|\underline{H}\right| \quad (4)$$

Avec : G_{dB} = Gain en dB
$\underline{H}$ = Fonction de transfert

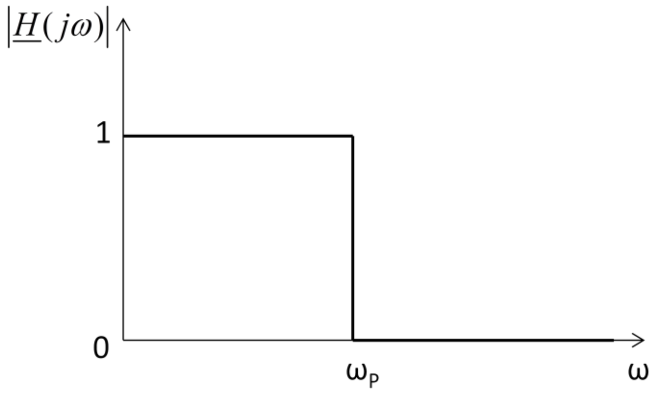
Exemple : Circuit RLC
Le gain en dB de la fonction de transfert du filtre s'écrit :

$$\begin{aligned} G_{dB} &= 20\log_{10}\left|\underline{H}(j\omega)\right| \\ &= 20\log_{10}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\left((RC)^2-2LC\right)\omega^2+(LC)^2\omega^4}}\right) \\ &= -20\log_{10}\left(\sqrt{1+\left((RC)^2-2LC\right)\omega^2+(LC)^2\omega^4}\right) \\ &= -10\log_{10}\left(1+\left((RC)^2-2LC\right)\omega^2+(LC)^2\omega^4\right) \end{aligned}$$

1.3 Filtre passe-bas

1.3.1 Filtre idéal

Définition :
Un filtre passe-bas a le module de sa fonction de transfert égal à 1 pour une pulsation inférieure à la pulsation de coupure, ω_P, et égal à 0 au-delà. Le signal de sortie aura une amplitude égal au signal d'entrée si $\omega < \omega_P$, elle sera nulle si $\omega > \omega_P$.



1.3.2 Filtre du premier ordre

Propriété :
Un filtre passe-bas du premier ordre est défini par la fonction de transfert :

$$\underline{H} = \frac{H_0}{1 + j\omega\tau} \quad (5)$$

Avec : $\underline{H}$	=	Fonction de transfert
H_0	=	Gain du filtre
ω	=	Pulsation en rad.s^{-1}
τ	=	Constante de temps en s

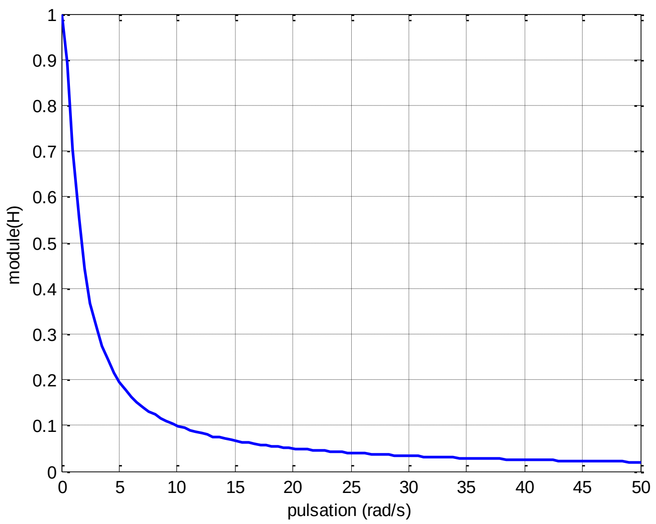
Etude du filtre :
Son module, argument et gain en dB s'écrivent :

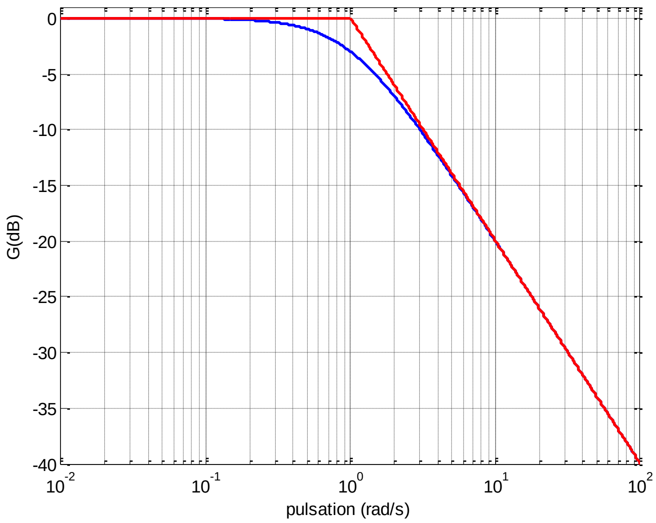
$\lvert\underline{H}\rvert = \frac{H_0}{\sqrt{1+(\omega\tau)^2}}$	$Arg(\underline{H}) = -\tan^{-1}(\omega\tau)$	$G_{dB} = 20\log_{10}(H_0) - 10\log_{10}\left(1+(\omega\tau)^2\right)$

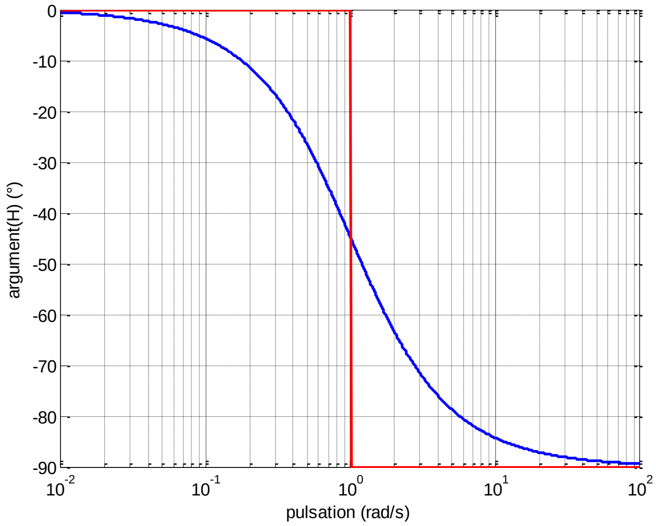
Pour tracer son diagramme de Bode, il faut d'abord étudier le comportement asymptotique :

	ω → 0	ω = 1/τ	ω → ∞
$\lvert\underline{H}\rvert$	H_0	$\frac{H_0}{\sqrt{2}}$	$\frac{H_0}{\omega\tau}$
$Arg(\underline{H})$	0	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{2}$
G_{dB}	$20\log_{10}(H_0)$	$20\log_{10}(H_0) - 3$	$20\log_{10}(H_0) - 20\log_{10}(\omega\tau)$

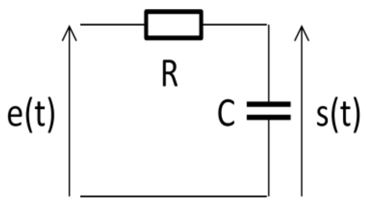
Lorsque ω tend vers l'infini, le gain en décibel croit donc de 20dB/décade.
On peut tracer le comportement de ce filtre en fonction de la pulsation pour H_0 = 1 et τ = 1.







<u>Exemple</u> : Circuit RC



$$\underline{H}=\frac{\frac{1}{jC\omega}}{R+\frac{1}{jC\omega}}=\frac{1}{1+jRC\omega}\quad avec\quad H_0=1\quad et\quad \tau=RC$$

1.3.3 Filtre du second ordre

Propriété :

Un filtre passe-bas du second ordre est défini par la fonction de transfert :

$$\underline{H} = \frac{H_0}{1 + 2j\sigma\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} = \frac{H_0}{1 + j\frac{\omega}{Q\omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \quad (6)$$

Avec :	$\underline{H}$	=	Fonction de transfert
	H_0	=	Gain du filtre
	ω	=	Pulsation en rad.s^{-1}
	σ	=	Coefficient d'amortissement
	ω_0	=	Pulsation de coupure en rad. s^{-1}
	Q	=	Facteur de qualité

Remarque :

- l'ordre d'un filtre correspond au degré du dénominateur de la fonction de transfert.

Etude du filtre :

Son module, argument et gain en dB s'écrivent :

$$|\underline{H}| = \frac{H_0}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(2\sigma\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

$$\begin{cases} Arg(\underline{H}) = -\tan^{-1}\left(\dfrac{2\sigma\frac{\omega}{\omega_0}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}\right) & pour \quad \omega \le \omega_0 \\ Arg(\underline{H}) = -\pi - \tan^{-1}\left(\dfrac{2\sigma\frac{\omega}{\omega_0}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}\right) & pour \quad \omega > \omega_0 \end{cases}$$

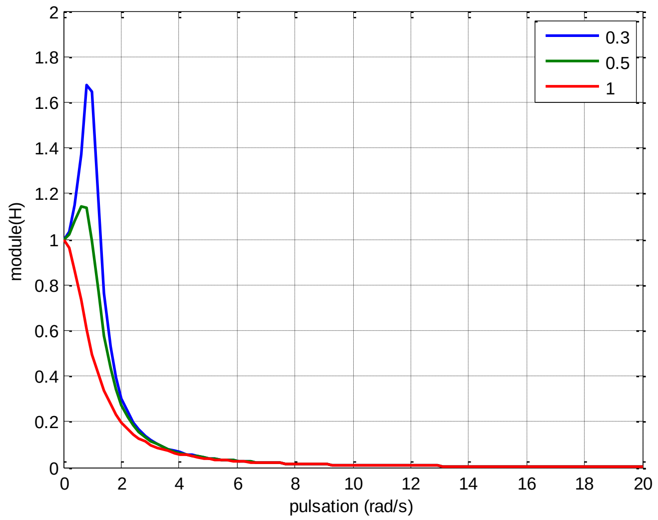
$$ou \quad Arg(\underline{H}) = -\frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\left(\frac{-1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}{2\sigma\frac{\omega}{\omega_0}}\right)$$

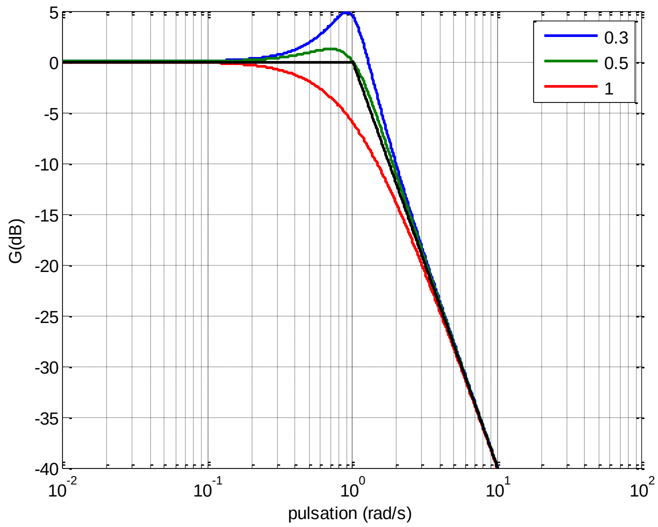
$$G_{dB} = 20\log_{10}(H_0) - 10\log_{10}\left(\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(2\sigma\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)$$

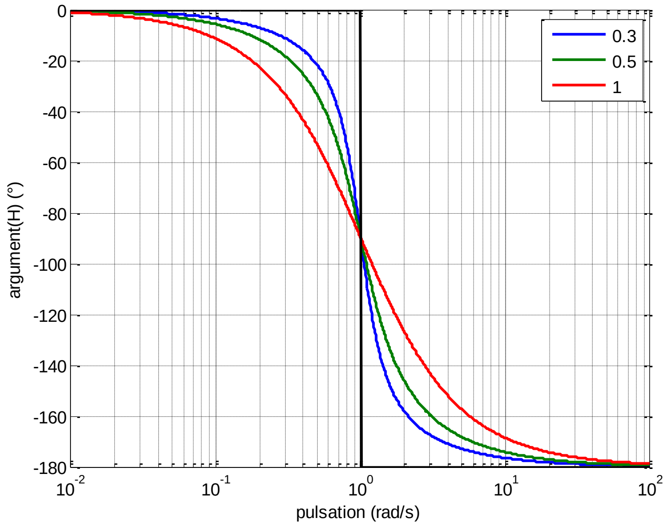
Comportement asymptotique :

	$\omega \to 0$	$\omega = \omega_0$	$\omega \to \infty$
$\lvert\underline{H}\rvert$	H_0	$\dfrac{H_0}{2\sigma}$	$-H_0\dfrac{\omega_0^2}{\omega^2}$
$Arg(\underline{H})$	0	$-\dfrac{\pi}{2}$	$-\pi$
G_{dB}	$20\log_{10}(H_0)$	$20\log_{10}(H_0)-20\log_{10}(2\sigma)$	$20\log_{10}(H_0)-40\log_{10}\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)$

Lorsque ω tend vers l'infini, le gain en décibel décroit donc de 40dB/décade.
On peut tracer le comportement de ce filtre en fonction de la pulsation pour $H_0 = 1$, $\omega_0 = 1$ et $\sigma \leq 1$.







Remarques :

- Le tracé présente une résonance pour des valeurs de $\sigma < 1/\sqrt{2}$ (respectivement $Q > 1/\sqrt{2}$).
- Le maximum d'amplitude apparaît pour la pulsation de résonance ω_r définie par :

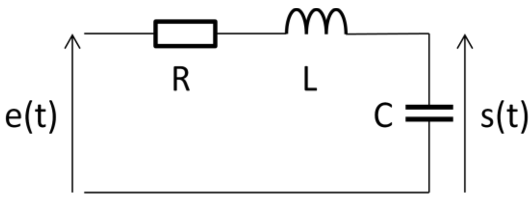
$$pour\ \omega_r = \omega_0\sqrt{1-2\sigma^2} \qquad \left|\underline{H}(j\omega_r)\right| = \frac{H_0}{2\sigma\sqrt{1-\sigma^2}}$$

- On peut exprimer l'argument de la fonction de transfert à l'aide d'une seule et même expression :

$$Arg(\underline{H}) = Arg\left(\frac{-jH_0}{-j\left(1+2j\sigma\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)}\right)$$

$$= -\frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\left(\frac{-1+\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}{2\sigma\frac{\omega}{\omega_0}}\right)$$

Exemple : Circuit RLC



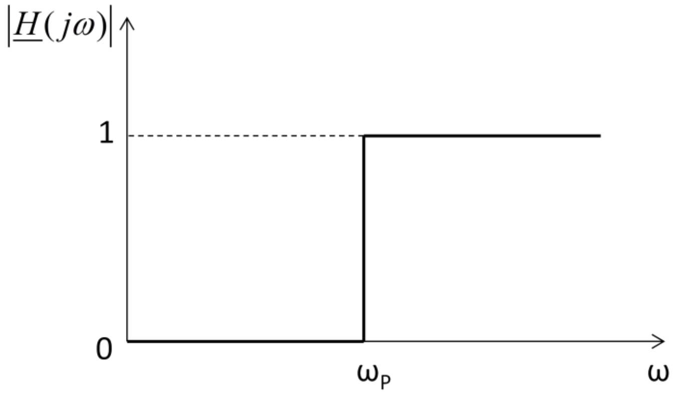
$$\underline{H} = \frac{1}{1+jRC\omega - LC\omega^2} \quad avec \quad H_0 = 1 \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \sigma = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}} \quad Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

Exercice d'application : 1.7.1 Factorisation d'un second ordre

1.4 Filtre passe-haut

1.4.1 Filtre idéal

Définition :
Un filtre passe-haut a le module de sa fonction de transfert égal à 1 pour une pulsation supérieure à la pulsation de coupure, ω_P, et égal à 0 en-dessous. Le signal de sortie aura une amplitude égal au signal d'entrée si $\omega > \omega_P$, elle sera nulle si $\omega < \omega_P$.



1.4.2 Filtre du premier ordre

Propriété :
Un filtre passe-haut du premier ordre est défini par la fonction de transfert :

$$\underline{H} = H_0 \frac{j\omega\tau}{1 + j\omega\tau} \qquad (7)$$

Avec :
- $\underline{H}$ = Fonction de transfert
- H_0 = Gain du filtre
- ω = Pulsation en rad.s^{-1}
- τ = Constante de temps en s

Etude du filtre :
Son module, argument et gain en dB s'écrivent :

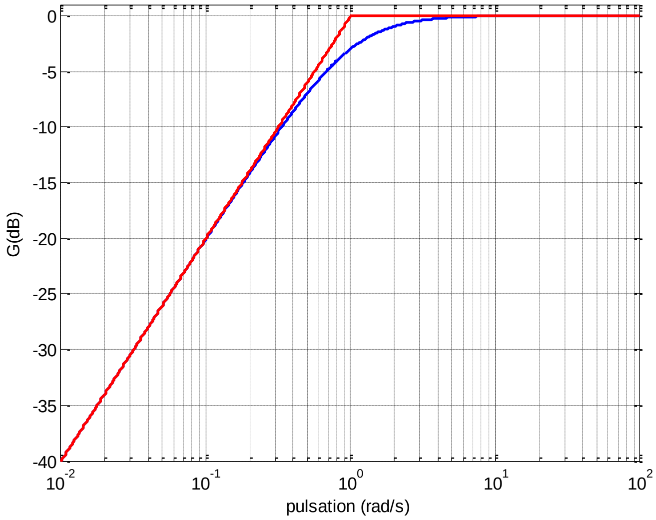
$$|\underline{H}| = H_0 \frac{\omega\tau}{\sqrt{1+(\omega\tau)^2}}$$

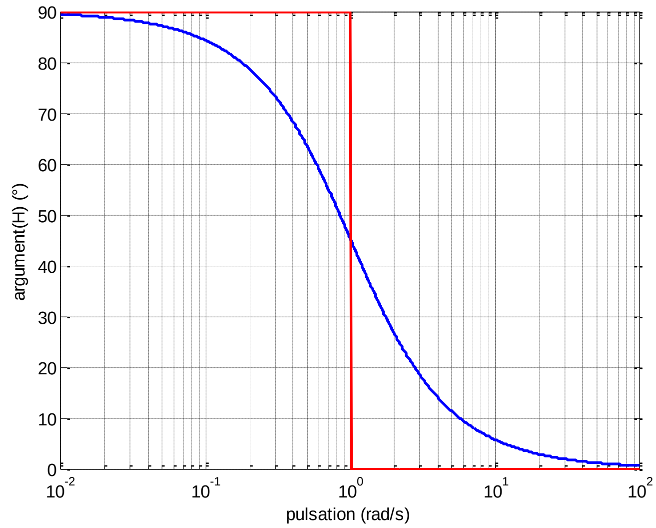
$$Arg(\underline{H}) = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}(\omega\tau) \qquad G_{dB} = 20\log_{10}(H_0) + 20\log_{10}(\omega\tau) - 10\log_{10}\left(1+(\omega\tau)^2\right)$$

Comportement asymptotique :

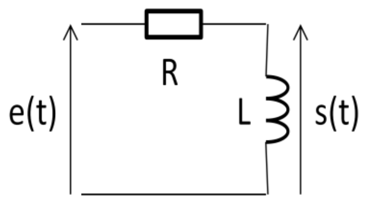
	$\omega \to 0$	$\omega = 1/\tau$	$\omega \to \infty$
$\lvert\underline{H}\rvert$	0	$\frac{H_0}{\sqrt{2}}$	$H_0\omega\tau$
$Arg(\underline{H})$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	0
G_{dB}	$20\log_{10}(H_0) + 20\log_{10}(\omega\tau)$	$20\log_{10}(H_0) - 3$	$20\log_{10}(H_0)$

Lorsque ω tend vers zéro, le gain en décibel croit donc de 20dB/décade.
On peut tracer le comportement de ce filtre en fonction de la pulsation pour $H_0 = 1$ et $\tau = 1$.





Exemple : Circuit RL



$$\underline{H} = \frac{jL\omega}{R + jL\omega} = \frac{j\frac{L}{R}\omega}{1 + j\frac{L}{R}\omega} \quad avec \quad H_0 = 1 \quad et \quad \tau = \frac{L}{R}$$

1.4.3 Filtre du second ordre

Propriété :

Un filtre passe-haut du second ordre est défini par la fonction de transfert :

$$\underline{H} = H_0 \frac{-\dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}}{1+2j\sigma\dfrac{\omega}{\omega_0}-\dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}} = H_0 \frac{-\dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}}{1+j\dfrac{\omega}{Q\omega_0}-\dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}} \quad (8)$$

Avec :	$\underline{H}$	=	Fonction de transfert
	H_0	=	Gain du filtre
	ω	=	Pulsation en rad.s^{-1}
	σ	=	Coefficient d'amortissement
	ω_0	=	Pulsation de coupure en rad. s^{-1}
	Q	=	Facteur de qualité

Etude du filtre :

Son module, argument et gain en dB s'écrivent :

$$\left|\underline{H}\right| = H_0 \frac{\dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}}{\sqrt{\left(1-\dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2+\left(2\sigma\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

$$\begin{cases} Arg\left(\underline{H}\right) = \pi - \tan^{-1}\left(\dfrac{2\sigma\dfrac{\omega}{\omega_0}}{1-\dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}}\right) & pour \quad \omega \le \omega_0 \\ Arg\left(\underline{H}\right) = -\tan^{-1}\left(\dfrac{2\sigma\dfrac{\omega}{\omega_0}}{1-\dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}}\right) & pour \quad \omega > \omega_0 \end{cases}$$

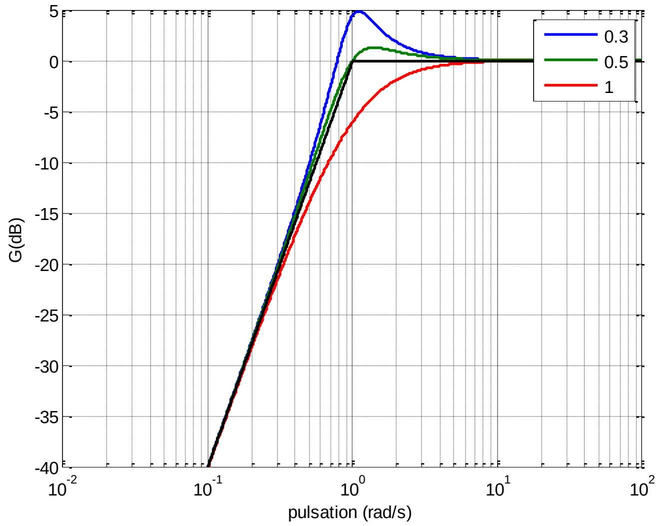
$$ou \quad Arg\left(\underline{H}\right) = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\left(\frac{-1+\dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}}{2\sigma\dfrac{\omega}{\omega_0}}\right)$$

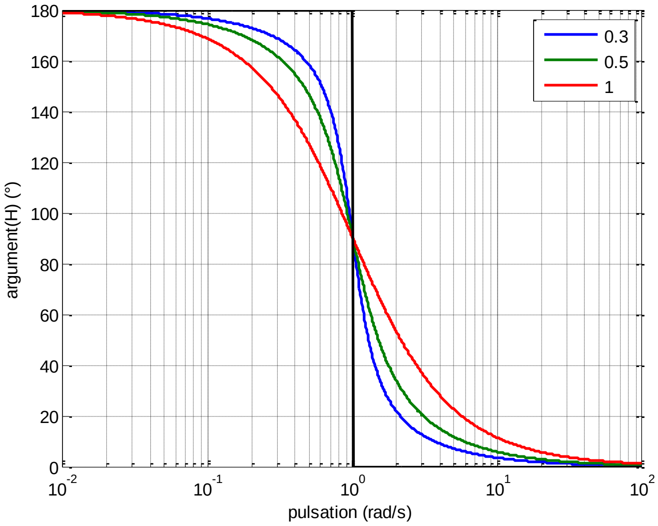
$$G_{dB} = 20\log_{10}\left(H_0\right) + 40\log_{10}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) - 10\log_{10}\left(\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2+\left(2\sigma\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)$$

Comportement asymptotique :

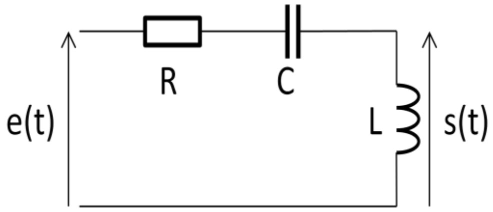
	$\omega \to 0$	$\omega = \omega_0$	$\omega \to \infty$
$\lvert \underline{H} \rvert$	$H_0 \dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}$	$\dfrac{H_0}{2\sigma}$	H_0
$Arg\left(\underline{H}\right)$	π	$\dfrac{\pi}{2}$	0
G_{dB}	$20\log_{10}\left(H_0\right)+40\log_{10}\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)$	$20\log_{10}\left(H_0\right)-20\log_{10}\left(2\sigma\right)$	$20\log_{10}\left(H_0\right)$

Lorsque ω tend vers zéro, le gain en décibel croit donc de 40dB/décade.
On peut tracer le comportement de ce filtre en fonction de la pulsation pour $H_0 = 1$, $\omega_0 = 1$ et $\sigma \le 1$.





Exemple : Circuit RLC

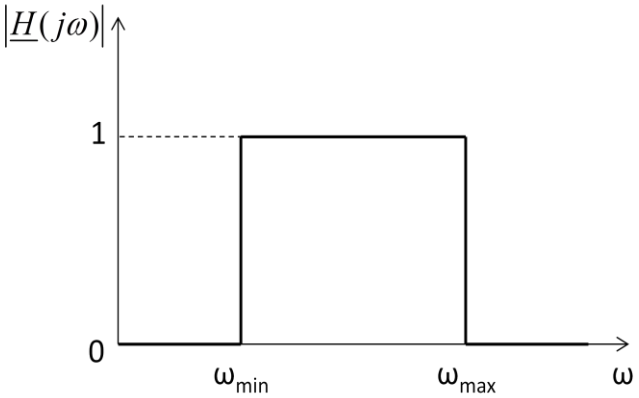


$$\underline{H} = \frac{-LC\omega^2}{1 + jRC\omega - LC\omega^2} \quad avec \quad H_0 = 1 \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \sigma = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}} \quad Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

1.5 Filtre passe-bande

1.5.1 Filtre idéal

Définition :
Un filtre passe-bande a le module de sa fonction de transfert égal à 1 pour une pulsation dans un intervalle de pulsation donné [ω_{min}, ω_{max}] et égal à 0 en-dehors. Le signal de sortie aura une amplitude égal au signal d'entrée si $\omega_{min} < \omega < \omega_{max}$, elle sera nulle ailleurs.



Exemple : Transmission par voie hertzienne
L'information de chaque station radio n'est autorisée à émettre que sur un intervalle de fréquences donné appelé canal de transmission. Le récepteur doit alors utiliser un filtre passe-bande pour sélectionner le canal utile.

1.5.2 Filtre du second ordre

Propriété :
Un filtre passe-bande du second ordre est défini par la fonction de transfert :

$$\underline{H} = H_0 \frac{2j\sigma\frac{\omega}{\omega_0}}{1+2j\sigma\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}} = H_0 \frac{j\frac{\omega}{Q\omega_0}}{1+j\frac{\omega}{Q\omega_0}-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \quad (9)$$

Avec : $\underline{H}$ = Fonction de transfert
H_0 = Gain du filtre
ω = Pulsation en rad.s^{-1}
σ = Coefficient d'amortissement
ω_0 = Pulsation de coupure en rad. s^{-1}
Q = Facteur de qualité

Etude du filtre :
Son module, argument et gain en dB s'écrivent :

$$|\underline{H}| = H_0 \frac{2\sigma\frac{\omega}{\omega_0}}{\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2+\left(2\sigma\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

$$\begin{cases} Arg(\underline{H}) = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\left(\frac{2\sigma\frac{\omega}{\omega_0}}{1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}\right) & pour \quad \omega \le \omega_0 \\ Arg(\underline{H}) = -\frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\left(\frac{2\sigma\frac{\omega}{\omega_0}}{1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}\right) & pour \quad \omega > \omega_0 \end{cases}$$

$$ou \quad Arg(\underline{H}) = -\tan^{-1}\left(\frac{-1+\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}{2\sigma\frac{\omega}{\omega_0}}\right)$$

$$G_{dB} = 20\log_{10}(H_0) + 20\log_{10}\left(2\sigma\frac{\omega}{\omega_0}\right) - 10\log_{10}\left(\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2+\left(2\sigma\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)$$

Comportement asymptotique :

	ω → 0	ω = ω_0	ω → ∞
$\lvert\underline{H}\rvert$	$2\sigma H_0 \dfrac{\omega}{\omega_0}$	H_0	$2\sigma H_0 \dfrac{\omega_0}{\omega}$
$Arg(\underline{H})$	$\dfrac{\pi}{2}$	0	$-\dfrac{\pi}{2}$
G_{dB}	$20\log_{10}\left(2H_0\sigma\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)$	$20\log_{10}(H_0)$	$20\log_{10}(H_0) - 20\log_{10}\left(2\sigma\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)$

Le gain en décibel croit de 20dB/décade quand ω → 0 et décroit de 20dB/décade quand ω → ∞.

On peut distinguer deux cas :

- lorsque σ ≥ 1, le dénominateur peut se factoriser et la fonction de transfert s'écrit :

$$\underline{H} = H_0 \frac{2j\sigma\dfrac{\omega}{\omega_0}}{\left(1 + j\dfrac{\omega}{\omega_1}\right)\left(1 + j\dfrac{\omega}{\omega_2}\right)}$$

L'étude se ramène alors à la combinaison de deux filtres du premier ordre associés en cascade : un filtre passe-bas et un filtre passe-haut.

- lorsque σ ≤ 1, le dénominateur n'est pas factorisable.

Bande passante et facteur de qualité :

Définition :
Un filtre passe-bande se caractérise par sa **bande passante à -3 dB**, intervalle de fréquences [f_m, f_M] dans laquelle le gain ne diffère pas de plus de 3 dB de sa valeur maximal.
Le coefficient caractérisant la sélectivité du filtre est nommé **facteur de qualité** tel que :

$$Q = \frac{f_0}{\lvert f_M - f_m \rvert} \qquad (10)$$

Avec : Q = Facteur de qualité
f_0 = Fréquence centrale en Hz
f_M = Fréquence haute de la bande passante à -3 dB
f_m = Fréquence basse de la bande passante à -3 dB

Propriété :
Plus le facteur de qualité d'un filtre est élevé, plus la largeur relative de la bande passante est faible.
Q mesure l'acuité de la résonance.

Démonstration :
On cherche les pulsations ω_m et ω_M pour lesquelles le module de la fonction de transfert vaut :

$$\lvert\underline{H}\rvert = \frac{H_0}{\sqrt{2}} \quad \text{ou encore} \quad G_{dB} = 20\log_{10}(H_0) - 3$$

La première étape revient à simplifier l'expression de la fonction de transfert :

$$\underline{H} = H_0 \frac{2j\sigma\dfrac{\omega}{\omega_0}}{1+2j\sigma\dfrac{\omega}{\omega_0}-\dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}} = H_0 \frac{1}{1+j\dfrac{1}{2\sigma}\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}-\dfrac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

Le module est donc égal $\frac{H_0}{\sqrt{2}}$ lorsque la relation suivante est vérifiée :

$$j\frac{1}{2\sigma}\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right) = \pm 1$$

Ceci nous donne deux équations du second degré :

$$\omega^2 \pm 2\sigma\omega\omega_0 - \omega_0^2 = 0$$

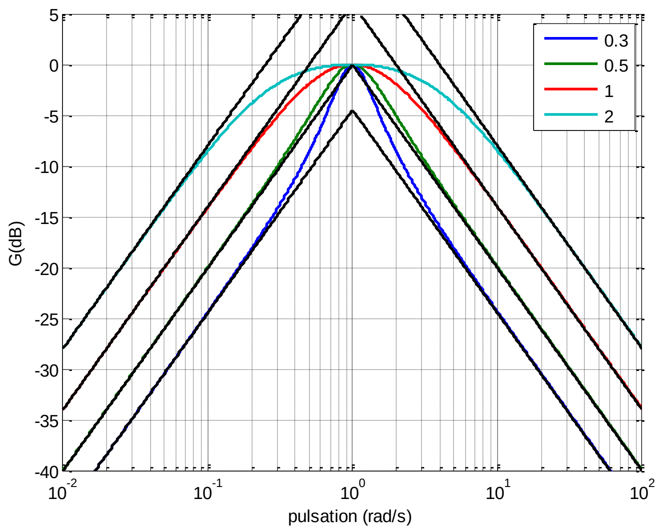
On obtient finalement les deux racines positives suivantes :

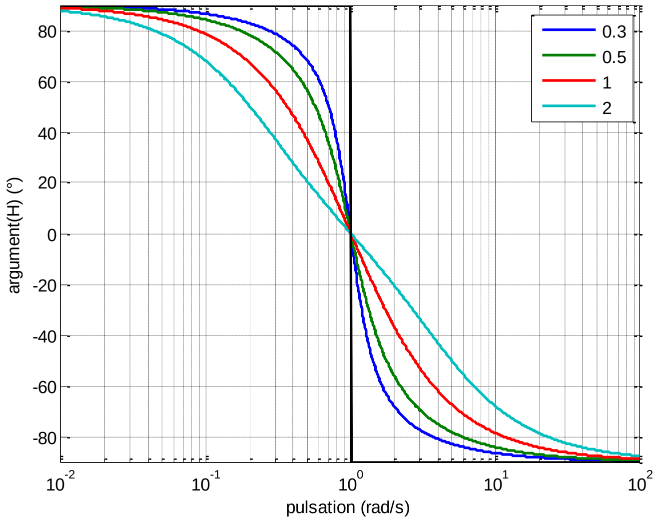
$$\omega_m = \omega_0\left(-\sigma+\sqrt{1+\sigma^2}\right) \quad et \quad \omega_m = \omega_0\left(+\sigma+\sqrt{1+\sigma^2}\right)$$

D'où, la largeur de la bande passante à -3 dB :

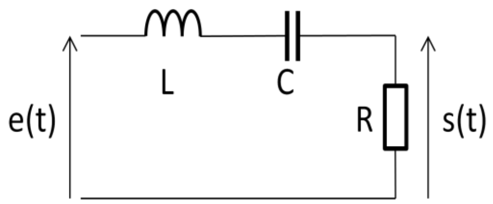
$$\omega_M - \omega_m = 2\sigma\omega_0 \quad et \quad donc \quad Q = \frac{1}{2\sigma}$$

On peut tracer le comportement de ce filtre en fonction de la pulsation pour H_0 = 1, ω_0 = 1 et σ = [0,3 à 2] (soit Q = [1,7 à 0,25]).





Exemple : Circuit RLC



$$\underline{H} = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega - LC\omega^2} \quad avec \quad H_0 = 1 \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \sigma = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}} \quad Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

1.6 Caractère intégrateur ou dérivateur d'un filtre

1.6.1 Amplificateur opérationnel idéal

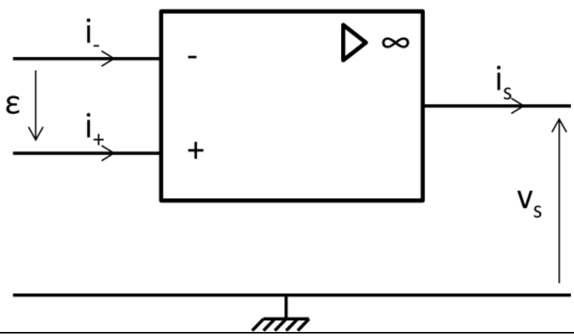
Définition :

Un amplificateur opérationnel idéal est un composant théorique possédant trois bornes :

- l'entrée inverseuse notée (-)
- l'entrée non-inverseuse notée (+)

Aucun courant ne rentre par ces entrées : $i_+ = i_- = 0$

Un courant quelconque peut sortir (ou entrer) par la sortie (i_s).



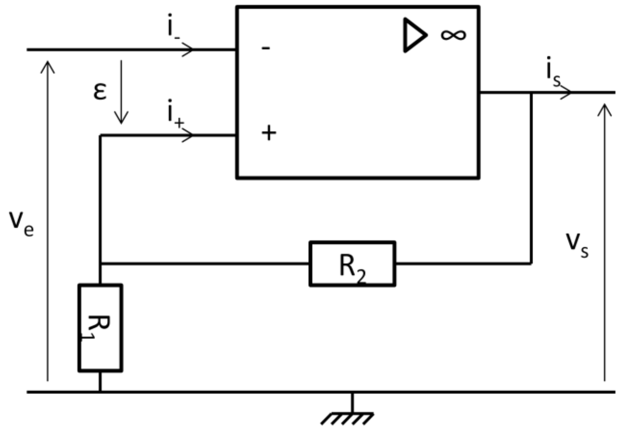
<u>Propriété :</u>
Un amplificateur opérationnel peut fonctionner suivant deux régimes :

- un régime dit « linéaire » : ε = 0 ($v_+ = v_-$) dans la limite où vs ne dépasse pas les valeurs fixées par la alimentation $V^-_{sat} < vs < V^+_{sat}$
- un régime dit « non linéaire » :
  - si ε > 0, alors vs = V^+_{sat}
  - si ε < 0, alors vs = V^-_{sat}

<u>Exemple</u> : Montages de base à amplificateur opérationnel

- Amplificateur non inverseur :

On considère le montage suivant :

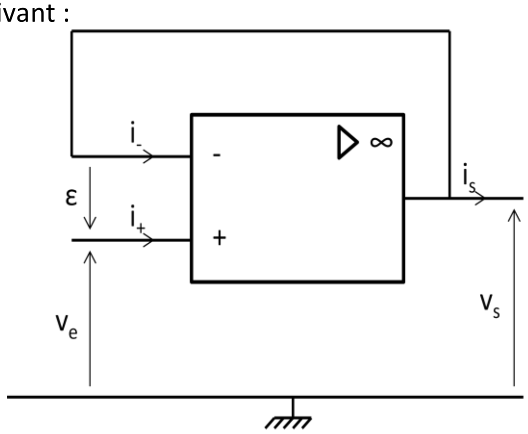


On se place en régime linéaire : $i_+ = i_- = 0$ et ε = 0

$$v_- = v_e \quad v_+ = \frac{R_1}{R_1 + R_2} v_s \quad d'où \quad v_s = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) v_e$$

- Montage suiveur :

On considère le montage suivant :



On se place en régime linéaire : $i_+ = i_- = 0$ et ε = 0

$$v_- = v_s \quad v_+ = v_e \quad d'où \quad v_s = v_e$$

1.6.2 Comportement intégrateur d'un filtre passe-bas du premier ordre

Définition :

Un intégrateur pur est un opérateur dont la relation entre signal d'entrée e(t) et signal de sortie s(t) est de la forme :

$$\tau \frac{ds(t)}{dt} = e(t) \qquad (11)$$

Avec : τ = Constante de temps en s
s(t) = Signal de sortie
e(t) = Signal d'entrée

Ainsi, sa fonction de transfert se met sous la forme :

$$\underline{I}(j\omega) = \frac{1}{j\tau\omega} \qquad (12)$$

Avec : $\underline{I}(j\omega)$ = Fonction de transfert de l'intégrateur pur
τ = Constante de temps en s

Etude du filtre :

Son module, argument et gain en dB s'écrivent :

$\lvert\underline{I}\rvert = \frac{1}{\tau\omega}$	$Arg(\underline{I}) = -\frac{\pi}{2}$	$G_{dB} = -20\log_{10}(\tau\omega)$

Etude d'un filtre passe-bas du premier ordre pour $\omega \gg \omega_P$:

On a montré en 1.3.2 que l'on avait le comportement asymptotique suivant :

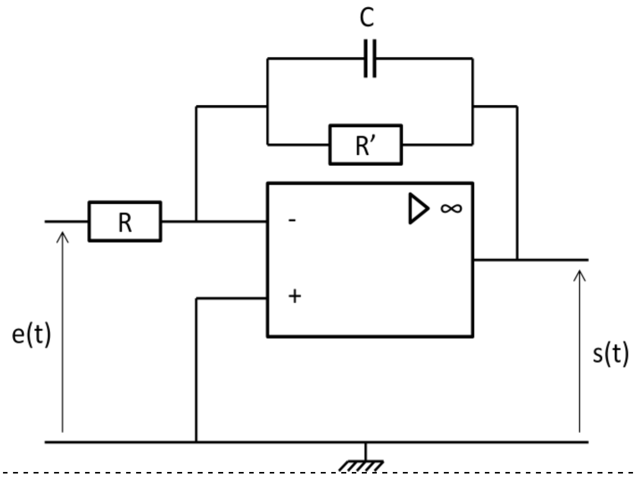
$\lvert\underline{H}\rvert = \frac{H_0}{\tau\omega}$	$Arg(\underline{H}) = -\frac{\pi}{2}$	$G_{dB} = -20\log_{10}(\tau\omega)$

Propriété :

Un filtre passe-bas du premier ordre se comporte comme un intégrateur dans un domaine de fréquence limité ($f \gg f_P$).

Exercice d'application : 1.7.2 Dérive d'un intégrateur pur

Exemple : Filtre passe-bas actif



$$v_- - e(t) = -Ri(t) \quad v_+ = 0 \quad s(t) - v_- = -\left(\frac{1}{\frac{1}{R'} + jC\omega}\right) i(t)$$

$$\underline{H} = -\frac{R'}{R}\left(\frac{1}{1 + jR'C\omega}\right)$$

D'où ω >> ω_P :

$$\underline{H} \approx -\frac{1}{jRC\omega}$$

1.6.3 Comportement dérivateur d'un filtre passe-haut du premier ordre

Définition :

Un dérivateur pur est un opérateur dont la relation entre signal d'entrée e(t) et signal de sortie s(t) est de la forme :

$$s(t) = \tau \frac{de(t)}{dt} \qquad (13)$$

Avec : τ = Constante de temps en s
s(t) = Signal de sortie
e(t) = Signal d'entrée

Ainsi, sa fonction de transfert se met sous la forme :

$$\underline{D}(j\omega) = j\tau\omega \qquad (14)$$

Avec : $\underline{D}(j\omega)$ = Fonction de transfert du dérivateur pur
τ = Constante de temps en s

Etude du filtre :

Son module, argument et gain en dB s'écrivent :

$\lvert\underline{D}\rvert = \tau\omega$	$Arg(\underline{D}) = \frac{\pi}{2}$	$G_{dB} = 20\log_{10}(\tau\omega)$

Etude d'un filtre passe-haut du premier ordre pour ω << ω_P :

On a montré en 1.4.2 que l'on avait le comportement asymptotique suivant :

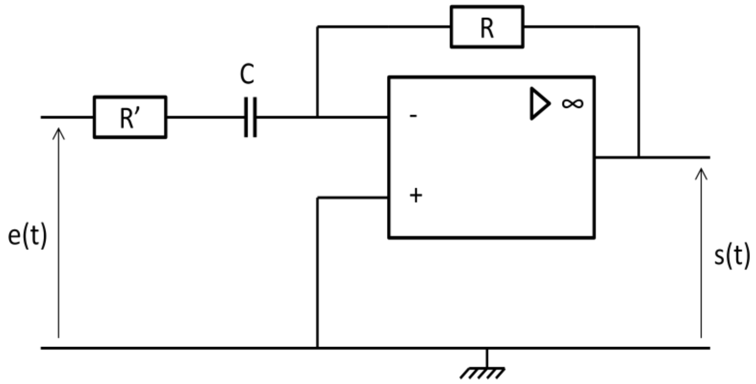
$\lvert\underline{H}\rvert = H_0\tau\omega$	$Arg(\underline{H}) = \frac{\pi}{2}$	$G_{dB} = 20\log_{10}(\tau\omega)$

Propriété :

Un filtre passe-haut du premier ordre se comporte comme un dérivateur dans un domaine de fréquence limité (f << f_P).

Exercice d'application : 1.7.3 Réalisation d'un dérivateur

Exemple : Filtre passe-haut actif



$$v_- - e(t) = -(R' + \frac{1}{jC\omega})i(t) \quad v_+ = 0 \quad s(t) - v_- = -Ri(t)$$

$$\underline{H} = -\frac{jRC\omega}{1 + jR'C\omega}$$

D'où ω << ωP :

$$\underline{H} \approx -jRC\omega$$

A retenir et savoir faire :

- Savoir calculer une fonction de transfert (module, phase et gain en dB).
- Savoir déterminer la nature d'une fonction de transfert (passe-bas, haut , bande).
- Savoir tracer son diagramme de Bode.
- Savoir déterminer le caractère intégrateur ou dérivateur d'un filtre.

1.7 Exercices d'application

1.7.1 Factorisation d'un second ordre

a) Montrer que pour certaines valeurs de σ la fonction de transfert H se factorise en produit de deux fonctions de transfert de premier ordre.

$$\underline{H} = \frac{H_0}{1 + 2j\sigma\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}}$$

b) Que deviennent alors les tracés asymptotiques en module et phase pour ce filtre ? Effectuer le tracé dans le cas où $H_0 = 1$ et $\sigma = 2$.

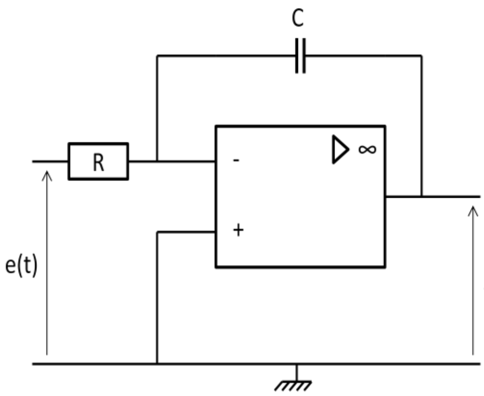
1.7.2 Dérive d'un intégrateur pur

On considère l'opérateur électronique de la figure a ci-dessous.

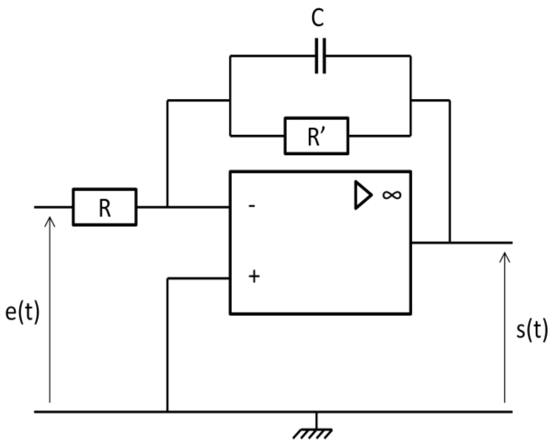
a) Montrer que tant que l'amplificateur opérationnel n'est pas saturé, ce circuit réalise la fonction d'intégrateur pur.

b) Que se passe-t-il si le signal placé en entrée est constant de valeur très faible ? On prendra numériquement $Ve = 10^{-3}$ V et $RC = 10^{-3}$ s. Que peut-on conclure pour un signal d'entrée quelconque ?

c) Montrer que le dispositif de la figure voisine b réalise la fonction d'un intégrateur dans un domaine limité de fréquence sans présenter l'inconvénient cité à la question b.



a



b

1.7.3 Réalisation d'un dérivateur

a) Comment varie le module de la fonction de transfert d'un dérivateur idéal ?

b) Qu'en est-il du comportement haute fréquences et quel inconvénient cela présente-t-il ?

c) Montrer que la réalisation d'un dérivateur à l'aide d'un filtre passe-haut permet de lever ce handicap.

d) Quel est le déphasage introduit par un dérivateur pur ou approché ?

1.8 Exercices

1.8.1 Etude d'un filtre de téléphone fixe

On considère le filtre dont le schéma est représenté ci-dessous. On suppose que l'amplificateur fonctionne en régime linéaire.

a) Déterminer la fonction de transfert et l'écrire sous la forme canonique :

$$\underline{H} = \frac{H_0}{1 + 2j\sigma\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}}$$

b) Que représente H_0 ?

c) On adopte la valeur C = 10 nF, déterminer k et R afin d'obtenir un coefficient d'amortissement $\sigma = \sqrt{2}/2$ et une bande passante à -3 dB égale à 3400 Hz (valeur usuelle en téléphonie).

d) Préciser le comportement asymptotique du diagramme de Bode relatif au module.