

Cours VI : Electromagnétisme

Programme officiel : L'enseignement d'électrostatique de TSI première année est complété par une approche locale et par un enseignement de la magnétostatique. [...] On souligne l'intérêt des propriétés de symétrie d'invariance des champs polaires et axiaux ; l'accent est mis sur la comparaison des propriétés respectives du champ électrostatique et du champ magnétostatique. L'enseignement de l'électromagnétisme est centré d'une part sur l'étude des actions mécaniques d'origine magnétique, des phénomènes d'induction et de leurs applications, et d'autre part sur l'étude de la propagation des ondes électromagnétiques.

1 Electrostatique

1.1 Formulation locale des lois de l'électrostatique

1.1.1 Champ et potentiel électrostatiques

En première année, le champ et le potentiel électrostatiques ont été définis pour une distribution donnée de charges par :

Distribution de charges	Champ électrostatique	Potentiel électrostatique
Unique charge ponctuelle	$\vec{E}(M) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 PM^3} \vec{PM}$	$V(M) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 PM}$
Ensemble de charges ponctuelles	$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{Q_i}{PM_i^3} \vec{PM_i}$	$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{Q_i}{PM_i}$
Distribution volumique $dq = \rho(P)dv$	$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{\rho(P)\vec{PM}}{PM^3} dv$	$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{\rho(P)}{PM} dv$
Distribution surfacique $dq = \sigma(P)ds$	$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \frac{\sigma(P)\vec{PM}}{PM^3} ds$	$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \frac{\sigma(P)}{PM} ds$
Distribution linéique $dq = \lambda(P)dl$	$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_L \frac{\lambda(P)\vec{PM}}{PM^3} dl$	$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_L \frac{\lambda(P)}{PM} dl$

Le potentiel électrostatique a ainsi été défini comme la circulation du champ électrostatique entre deux points A et B selon :

$$V(A) - V(B) = \int_A^B \vec{E}(M) \cdot \vec{dl} \quad (1)$$

Avec : V = Potentiel électrostatique en V

$\vec{E}$ = Champ électrostatique en $V.m^{-1}$

Pour une variation infinitésimale de potentiel, on a donc :

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Dans un système de coordonnées cartésiennes, par exemple, on aurait la formulation suivante :

$$\begin{cases} E_x(x, y, z) = -\frac{\partial V}{\partial x}(x, y, z) \\ E_y(x, y, z) = -\frac{\partial V}{\partial y}(x, y, z) \\ E_z(x, y, z) = -\frac{\partial V}{\partial z}(x, y, z) \end{cases}$$

Or, le potentiel électrostatique est une fonction de plusieurs variables, $V(x, y, z)$. On peut donc exprimer la différentielle de cette fonction comme :

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz$$

On peut alors utiliser l'**opérateur gradient** (défini en annexe) pour mettre l'expression précédent sous la forme :

$$dV = \vec{\text{grad}}V \cdot d\vec{l}$$

Et l'on a finalement la relation suivante entre champ et potentiel électrostatique (déjà vue en première année) :

$$\vec{E} = -\vec{\text{grad}}V \quad (2)$$

Avec : $\vec{E}$ = Champ électrostatique en V.m^{-1}
 V = Potentiel électrostatique en V

Terminologie :

Les équations (1) et (2) sont respectivement appelées **équation intégrale** et **équation locale**. Seul l'usage permettra de privilégier une écriture par rapport à une autre.

1.1.2 Equation de Maxwell-Gauss

Enoncé en première année, le théorème de Gauss permet d'exprimer le flux du champ électrostatique de la manière suivante :

Théorème de Gauss :

Le flux sortant du champ électrostatique au travers d'une surface fermée Σ est égal à la charge électrique totale contenue à l'intérieur de cette surface, divisée par la constante ϵ_0 :

$$\oiint_{\Sigma} \vec{E}(M) \cdot d\vec{s}n = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} \quad (3)$$

Avec : $\vec{E}$ = Champ électrostatique en V.m^{-1}
 Q_{int} = Charge électrique totale contenue dans Σ
 ϵ_0 = Permittivité du vide ($8,854 \cdot 10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$)

Remarque :

Cette écriture est de type intégral pour deux raisons :

- d'une part le flux est une intégrale de surface
- d'autre part la charge intérieure peut être vue comme une intégrale du volume telle que :

$$Q_{\text{int}} = \iiint_V \rho dv$$

Equation de Maxwell-Gauss :

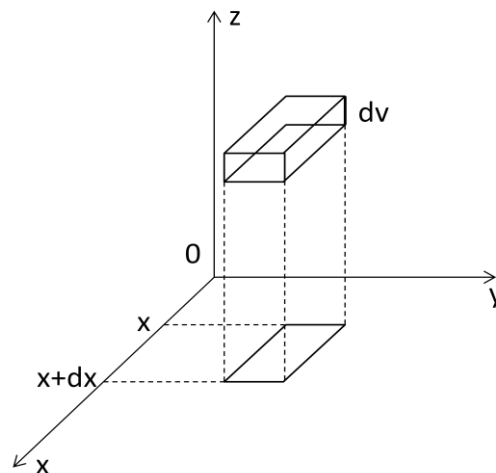
La formulation locale du théorème de Gauss se met sous la forme de l'équation de Maxwell-Gauss :

$$\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (4)$$

Avec : $\vec{E}$ = Champ électrostatique en V.m^{-1}
 ρ = Densité volumique de charge en C.m^{-3}
 ϵ_0 = Permittivité du vide ($8,854.10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$)

Démonstration :

Considérons un petit élément de volume en coordonnées cartésiennes :



L'expression du flux sortant de cet élément est :

$$\begin{aligned} d\phi &= [E_x(x+dx, y, z) - E_x(x, y, z)] dydz + \text{termes en } E_y \text{ et } E_z \\ &= \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) \underbrace{dx dy dz}_{dv} \end{aligned}$$

La charge élémentaire contenue dans cet élément de volume s'exprime à l'aide de la densité volumique de charge par :

$$dQ_{\text{int}} = \rho(x, y, z) dv$$

Alors, en appliquant le théorème de Gauss au volume élémentaire, on aboutit à une formulation locale :

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Pour simplifier cette expression, on introduit un nouvel opérateur, appelé divergence (défini en annexe), tel qu'en coordonnées cartésiennes :

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

On retrouve bien l'équation de Maxwell-Gauss :

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Théorème de Green-Ostrogradsky :

Soit une surface fermée S limitant un volume fini V à l'intérieur duquel est défini un champ de vecteur $\vec{b}$ alors :

$$\oint_S \vec{b} \cdot d\vec{s} = \iiint_V \operatorname{div} \vec{b} dv$$

Remarque :

En partant de la formulation intégrale du théorème de Gauss, on a alors :

$$\oint_{\Sigma} \vec{E}(M) \cdot d\vec{s} = \iiint_V \operatorname{div} \vec{E} dv = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = \iiint_V \frac{\rho}{\epsilon_0} dv$$

On retrouve la formulation de l'équation de Maxwell-Gauss :

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

1.1.3 Equation de Poisson

Equation de Poisson :

L'équation locale reliant potentiel et densité volumique de charge, appelée équation de poisson, s'écrit :

$$\Delta V + \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0 \quad (5)$$

Avec :	V	=	Potentiel électrostatique en V
	ρ	=	Densité volumique de charge en C.m ⁻³
	ϵ_0	=	Permittivité du vide (8,854.10 ⁻¹² F.m ⁻¹)

Démonstration :

En partant des équations (2) et (4), on aboutit à :

$$\operatorname{div} \vec{E} = \operatorname{div}(-\vec{\operatorname{grad}} V) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

On fait ainsi apparaître un autre opérateur, le Laplacien (défini en annexe) et noté comme suit en coordonnées cartésiennes :

$$\Delta v = \text{div}(\overrightarrow{\text{grad}V})$$

$$= \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

On a ainsi :

$$-\Delta V = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

1.2 Relations de passage du champ électrique à l'interface entre deux milieux

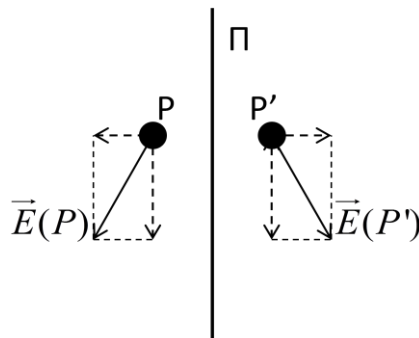
1.2.1 Rappels : symétries de la distribution de charges et du champ

Le principe de Curie postule que « les effets ont au moins les symétries des causes » et donc que le champ électrostatique a au moins les mêmes symétries que la distribution de charges.

1.2.1.1 Plans de symétrie et d'antisymétrie

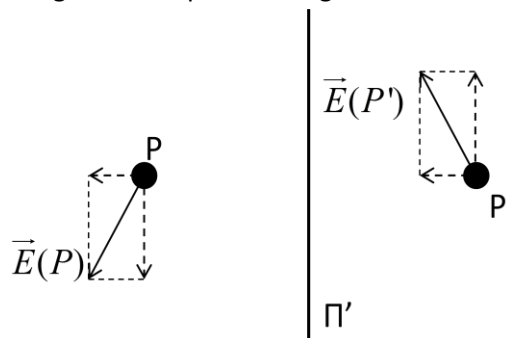
Si le plan Π est plan de symétrie de la distribution de charges, alors ce plan est également un plan de symétrie pour le champ :

- les composantes parallèles au plan sont égales
- les composantes orthogonales au plan sont opposées.



Si le plan Π' est plan d'antisymétrie de la distribution de charges, alors ce plan est également un plan d'antisymétrie pour le champ

- les composantes parallèles au plan sont opposées
- les composantes orthogonales au plan sont égales.



1.2.1.2 Invariances

Si la distribution de charges est invariante par translation selon un axe, le champ l'est aussi : il ne dépend donc pas de la coordonnée le long de cet axe.

Si la distribution de charges est invariante par rotation autour d'un axe, les composantes du champ le sont aussi : elles ne dépendent donc pas de la coordonnée angulaire qui définit la rotation autour de cet axe.

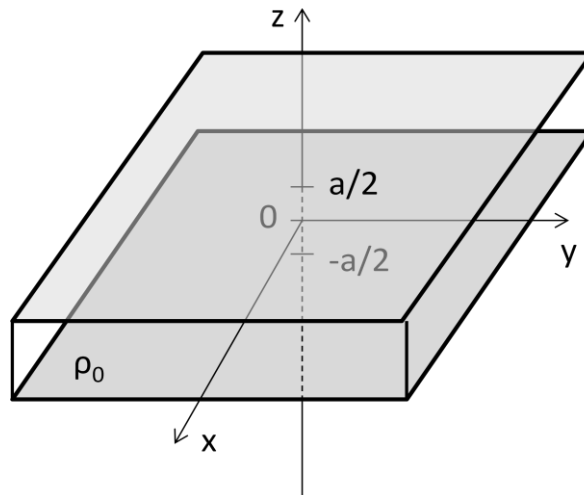
Si la distribution de charges est invariante par rotation autour d'un point, les composantes du champ le sont aussi : elles ne dépendent donc d'aucune coordonnée angulaire.

1.2.2 Composante normale du champ électrique

La composante normale du champ électrique présente une discontinuité à la traversée d'une surface, lorsque celle-ci porte une densité surfacique de charge σ_0 . Cette discontinuité est égale à σ_0/ϵ_0 .

Démonstration sur un exemple :

Soit deux plans parallèles d'équations respectives $z = a/2$ et $z = -a/2$, entre lesquels se trouve une distribution volumique de charge uniforme de valeur ρ_0 .



a) Symétries et invariances

- tout plan contenant l'axe (Mz) est plan de symétrie, donc $\vec{E}(M)$ est dirigé selon $\vec{u}_z$
- invariance par translation selon $\vec{u}_x$ et $\vec{u}_y$, donc $\vec{E}(M)$ ne dépend que de z
- Le plan xOy est plan de symétrie pour la distribution, donc la fonction $E(z)$ est impaire et nulle dans le plan xOy.

On a finalement :

$$\vec{E}(M) = E(z)\vec{u}_z$$

b) Equations locales

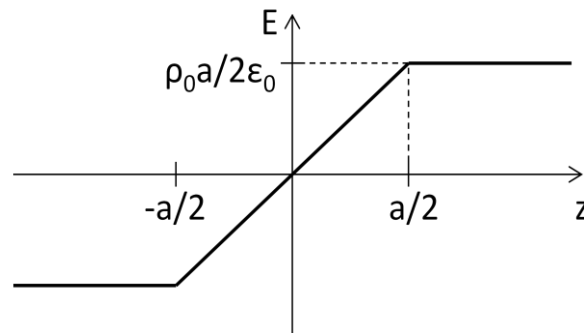
On utilise l'équation de Maxwell-Gauss dans chaque domaine :

- Entre les deux plans :

$$\text{div} \vec{E} = \frac{\partial E}{\partial z} = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \quad \text{donc} \quad E(z) = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} z \quad \text{pour} \quad |z| \leq \frac{a}{2}$$

- A l'extérieur des deux plans : $\rho = 0$

$$\text{div} \vec{E} = \frac{\partial E}{\partial z} = 0 \quad \text{donc} \quad E(z) = \text{constante}$$



c) Passage à une densité surfacique

On imagine maintenant que l'épaisseur a précédente devient infiniment fine, tandis que la densité volumique de charge ρ_0 tend vers l'infini, on a alors :

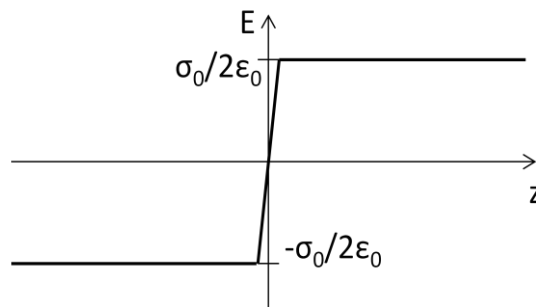
$$\sigma_0 = a\rho_0$$

On aboutit de ce fait à une distribution surfacique de charge, dont chaque élément de surface ds contient la même quantité de charge que la distribution initiale :

$$dQ = \sigma_0 ds$$

L'évolution du champ électrique présente alors une discontinuité de :

$$\Delta E(z) = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0}$$

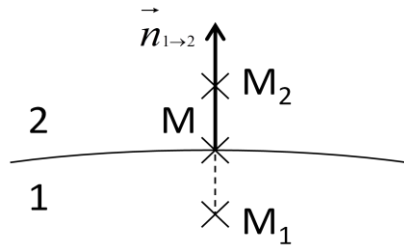


1.2.3 Composante tangentielle du champ électrique

La composante tangentielle du champ électrique reste continue à la traversée d'une surface, quel que soit l'état électrique de celle-ci.

1.2.4 Formulation vectorielle

Il est possible de réunir les deux résultats ci-dessus en une seule écriture vectorielle. On considère une interface entre deux demi-espaces indicés 1 et 2 et l'on note $\vec{n}_{1 \rightarrow 2}$ la normale en un point M de cette surface, orientée du milieu 1 vers le milieu 2. On définit deux points M_1 et M_2 dans chaque demi-espace au voisinage du point M .



Soit $\sigma(M)$ la densité surfacique de charge au point M, la relation suivante résume la relation de passage du champ électrique à la traversée de la surface :

$$\vec{E}(M_2) - \vec{E}(M_1) = \frac{\sigma(M)}{\epsilon_0} \vec{n}_{1 \rightarrow 2} \quad (6)$$

Avec :

- $\vec{E}$ = Champ électrostatique en $V.m^{-1}$
- σ = Densité surfacique de charge en $C.m^{-2}$
- ϵ_0 = Permittivité du vide ($8,854.10^{-12} F.m^{-1}$)
- $\vec{n}_{1 \rightarrow 2}$ = Normale à la surface orientée du milieu 1 vers le milieu 2

1.3 Conducteur en équilibre électrostatique

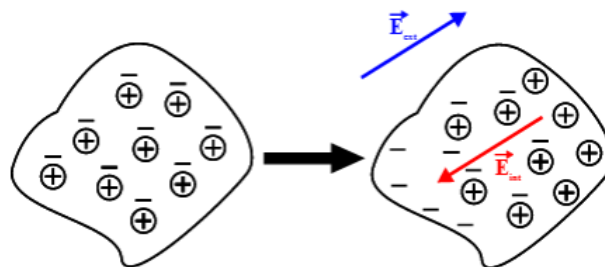
1.3.1 Equilibre électrostatique

Définition :

Un **conducteur** est un corps qui possède des particules chargées pouvant se déplacer librement et ainsi conduire le courant électrique :

- Les métaux sont conducteurs car ils possèdent des électrons libres
- Les électrolytes sont conducteurs car ils possèdent des ions.

On considère un corps conducteur placé à proximité d'une distribution de charges. Son état électrique va évoluer, sous l'effet du champ électrique créé par la distribution. Les charges vont se mouvoir dans le conducteur. Les charges cesseront leur déplacement lorsque le champ intérieur compensera exactement le champ extérieur et finalement le champ électrostatique total sera nul.



Définition :

A l'équilibre électrostatique, il n'y a plus de mouvement de charges dans le conducteur et de ce fait, le champ électrique est nul en tout point du conducteur :

$$\vec{j} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{E} = \vec{0}$$

1.3.2 Caractère équipotentiel et répartition des charges

La nullité du champ électrique en tout point d'un conducteur a des conséquences immédiates :

- d'après (2), le potentiel électrostatique, V , est constant à l'intérieur du conducteur

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}V} = \vec{0}$$

- d'après (4), la densité volumique de charges, ρ , est nulle en tout point intérieur au conducteur

$$\text{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0$$

Mais comme le conducteur a été préalablement chargé, les charges n'ont donc pu se répartir qu'à la surface du conducteur. On définit donc une densité surfacique de charge, σ . Le conducteur a alors pour charge totale :

$$Q = \iint_S \sigma ds$$

Propriété :

Un corps conducteur à l'équilibre électrostatique est un **volume équipotentiel**. Il est électriquement neutre dans son volume, mais peut porter des **charges en surface**.

Remarque :

D'après (5), on peut aussi simplifier l'équation de Poisson à l'intérieur du conducteur telle que :

$$\Delta V = 0$$

Cette équation prend alors le nom d'**équation de Laplace**.

Définition :

La **capacité** d'un conducteur, comme son nom l'indique, est la capacité qu'a le conducteur à accumuler des charges électriques sous un potentiel donné. Elle s'exprime par le rapport de la charge totale sur le potentiel du conducteur :

$$C = \frac{Q}{V}$$

1.3.3 Théorème de Coulomb

En première année, il a été vu que les lignes de champs étaient orthogonales aux surfaces équipotentielles (très facile à démontrer à partir de l'équation (2)).

De plus, nous avons mis en évidence que la composante normale du champ électrique était discontinue à la traversée d'une surface portant une densité surfacique de charges (1.2.2). L'équation (6) nous mène à l'écriture du théorème de Coulomb.

Théorème de Coulomb :

L'expression du champ électrique au voisinage de la surface d'un conducteur est la suivante :

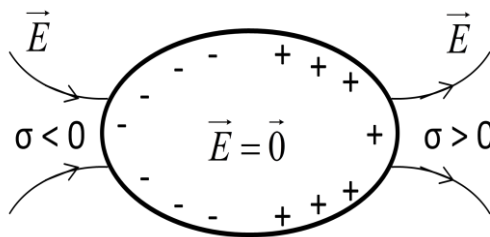
$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n} \quad (7)$$

Avec :	$\vec{E}$	=	Champ électrostatique en V.m^{-1}
	σ	=	Densité surfacique de charge en C.m^{-2}
	ϵ_0	=	Permittivité du vide ($8,854.10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$)
	$\vec{n}$	=	Normale au conducteur, dirigée vers l'extérieur du conducteur

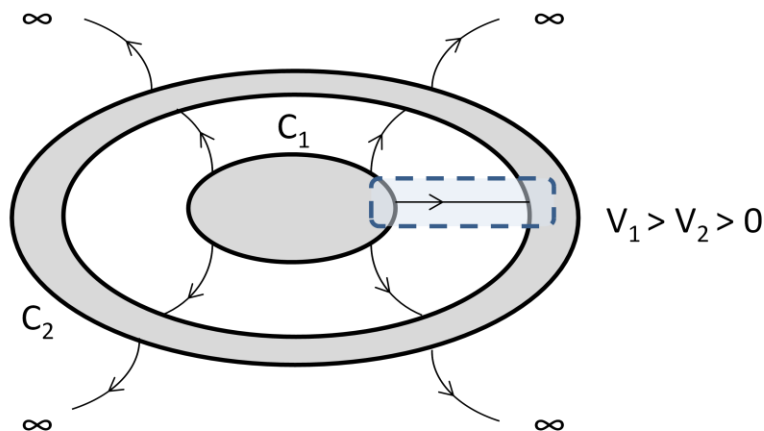
Remarque :

On peut en déduire suivant le signe de σ l'orientation des lignes de champ :

- si $\sigma > 0$, alors la ligne de champ quitte le conducteur
- si $\sigma < 0$, alors la ligne de champ aboutit sur le conducteur.

**1.4 Condensateurs****1.4.1 Définition**

Lorsque l'on approche un conducteur chargé (positivement par exemple) d'un conducteur neutre, les charges positives du conducteur neutre sont repoussées alors que ses charges négatives sont attirées. La répartition des charges dans le conducteur neutre a été modifiée par influence (partielle). On parle d'influence totale lorsqu'un des conducteurs entoure l'autre. On montre alors que les surfaces qui se font face portent des charges opposées.



Définition :

On appelle **condensateur** l'ensemble formé par :

- la face du conducteur 1 (armature intérieure)
- la face interne du conducteur 2 (armature externe)
- le domaine séparant des deux faces.

1.4.2 Capacité d'un condensateur

Prenons un tube de champ partant de la surface C_1 pour aller sur C_2 . Sur la surface fermée Σ englobant ces lignes de champ (représenté en pointillés ci-dessus), on peut appliquer le théorème de Gauss sur Σ :

$$\oiint_{\Sigma} \vec{E}(M) \cdot d\vec{s}n = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = 0$$

Car : - $\vec{E} \perp \vec{n}$ sur le tube

- $\vec{E} = \vec{0}$ dans les conducteurs

Or, la charge intérieure à Σ est nulle entre les deux armatures et égale à :

- $dQ_1 = \sigma_1 dS_1$ dans C_1 et $dQ_2 = \sigma_2 dS_2$ dans C_2 , soit au final : $dQ_1 = -dQ_2$.

Les charges électriques portées par les deux faces en regard sont donc opposées. Si l'on note Q la charge du conducteur 1, on appelle alors capacité du condensateur le coefficient C tel que :

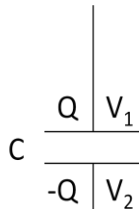
$$Q = C(V_1 - V_2)$$

Définition :

Lorsque deux conducteurs forment un condensateur, la charge portée par l'armature intérieure est proportionnelle à la différence de potentiel entre les conducteurs. Ce coefficient de proportionnalité est appelé **capacité du condensateur** :

$$Q = C(V_1 - V_2) \quad (8)$$

Avec : Q = Charge totale portée par l'armature intérieure en C
 C = Capacité du condensateur en F
 V_1 = Potentiel de l'armature intérieure en V
 V_2 = Potentiel de l'armature extérieure en V



Exemple :

Augmenter la valeur d'une capacité permet, pour une différence de potentiel donnée, d'accroître la valeur de la charge.

- Un condensateur dont les armatures ont une surface de l'ordre du cm^2 et sont écartées d'un dixième de millimètre atteignent dans l'air une capacité inférieure à la dizaine de picofarad.

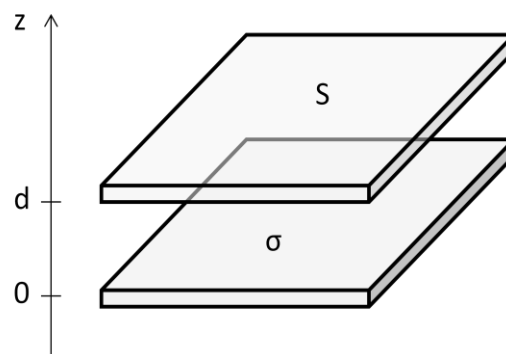
- Il faut donc accroître l'aire des surfaces en regard et diminuer l'épaisseur. Ceci dépendant de l'encombrement. Il faut aussi éviter le court-circuit. Il est possible de jouer sur la forme : enrouler deux conducteurs permet par exemple d'obtenir des surfaces beaucoup plus grandes dans un volume donné.

- Il est aussi possible d'utiliser un matériau isolant de permittivité ϵ plus élevée que celle du vide ou de l'air. Ainsi, on a dans le cas du condensateur plan : $C = \epsilon S/d$.

1.4.3 Condensateur plan idéal

Le modèle du condensateur plan s'applique dans le cas où la distance entre les armatures est très petite devant le rayon de courbure de celles-ci. Ce modèle comprend :

- deux faces planes parallèles de section S
- un espace vide les séparant de largeur d (distance entre les faces)
- des charges réparties surfaciquement uniformément sur ces faces, de valeur opposée.

**Etude du condensateur :**

En négligeant les effets de bord, on obtient des lignes de champ parallèles entre elles et dirigées perpendiculairement aux faces. Entre les deux faces, on a donc un champ uniforme (divergence nulle) :

$$\vec{E} = E_0 \vec{u}_z$$

Par application du théorème de Coulomb, on peut relier la valeur du champ à la densité surfacique de charge :

$$E_0 = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

La différence de potentiel peut ensuite être calculée par circulation sur un segment joignant perpendiculairement les deux faces :

$$V_1 - V_2 = E_0 d$$

La valeur de la charge Q résulte de l'intégration sur la surface :

$$Q = \sigma S$$

On en déduit l'expression de la capacité pour un condensateur plan déjà rencontrée en première année :

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2} = \epsilon_0 \frac{S}{d} \quad (9)$$

Avec : C	=	Capacité du condensateur en F
Q	=	Charge totale portée par l'armature intérieure en C
V_1	=	Potentiel de l'armature intérieure en V
V_2	=	Potentiel de l'armature extérieure en V
ϵ_0	=	Permittivité du vide ($8,854 \cdot 10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$)
S	=	Section du condensateur plan en m^2
d	=	Distance entre les faces du condensateur en m

1.4.4 Energie électrostatique

La notion d'énergie électrique a été introduite en première année en électrocinétique telle que dans un intervalle de temps $[t_1, t_2]$, l'énergie électrique reçue par le composant s'exprime (en fonction de la tension à ses bornes, u et du courant le traversant, i) par :

$$U_E = \int_{t_1}^{t_2} u i dt$$

Dans le cas d'un condensateur, on a de plus les relations suivantes (entre la tension, u , le courant, i , la charge du condensateur, q , et la capacité du condensateur) :

$$q = Cu \quad \text{et} \quad i = C \frac{du}{dt}$$

On obtient donc au final l'énergie électrique emmagasinée dans le condensateur à une constante près :

$$U_E = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} + U_0$$

En considérant naturellement qu'il n'y a pas d'énergie électrique lorsque le condensateur n'est pas chargé, on peut choisir $U_0 = 0$ et donc :

$$U_E = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} = \frac{1}{2} Cu^2$$

Dans le cas du condensateur plan, on peut utiliser la valeur de la capacité trouvée en équation (9) :

$$U_E = \frac{\epsilon_0}{2} \frac{S}{d} u^2$$

Enfin, la tension aux bornes du condensateur, u , est directement liée à la différence de potentiel entre ses deux armatures :

$$u = V_1 - V_2 = E_0 d \quad \Rightarrow \quad U_E = \frac{\epsilon_0}{2} S d E_0^2$$

On en déduit que dans le cas d'un condensateur plan, la densité volumique d'énergie est donnée par :

$$u_E = \frac{dU_E}{dv} = \frac{\epsilon_0}{2} E_0^2$$

On peut généraliser cette expression pour tout condensateur. On remarque alors que l'énergie est localisée là où règne le champ et que la densité volumique d'énergie ne dépend que de l'intensité du champ régnant en chaque point, à l'exclusion de tout paramètre géométrique sur le système.

Propriété :

La présence d'un champ électrique en un point de l'espace est associée à celle d'une **densité volumique d'énergie** stockée d'expression :

$$u_E = \frac{dU_E}{dv} = \frac{\epsilon_0}{2} E_0^2 \quad (10)$$

Avec :	u_E	=	Densité volumique d'énergie électrostatique en J.m^{-3}
	U_E	=	Energie électrostatique en J
	v	=	Volume en m^3
	ϵ_0	=	Permittivité du vide ($8,854.10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$)
	E_0	=	Champ électrique uniforme entre les armatures du condensateur en V.m^{-1}

A retenir et savoir faire :

- Connaître les équations locales et intégrales pour le champ électrostatique.
- Connaître les relations de passage à une interface entre deux milieux.
- Savoir appliquer ces équations au cas d'un conducteur en équilibre électrostatique.
- Connaître l'expression de la capacité d'un condensateur plan et celle de la densité volumique d'énergie électrostatique.

1.5 Exercices d'application

1.5.1 Relation potentiel-champ

Dans l'espace muni d'un repère cartésien (O, x, y, z) un champ électrique a pour expression :

$$\vec{E} = E_0 \frac{x}{a} \vec{u}_x \quad \text{pour} \quad -a \leq x \leq a$$

$$\vec{E} = E_0 \vec{u}_x \quad \text{pour} \quad x > a$$

$$\vec{E} = -E_0 \vec{u}_x \quad \text{pour} \quad x < -a$$

a) Déterminer l'expression du potentiel $V(x)$ en tout point, en veillant à assurer sa continuité. On pose $V(0) = 0$

b) On considère les points A (-a,0,0) et B (a,0,0), vérifier la relation :

$$V(A) - V(B) = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

c) Déterminer la densité volumique de charge $\rho(x)$ correspondant au champ électrique.

1.5.2 Piège électrostatique

On considère une région de l'espace, vide de charges, dans laquelle règne un potentiel :

$$V(x, y, z) = \frac{V_0}{a^2} (x^2 + y^2 - 2z^2)$$

V_0 est une grandeur positive, a désigne une longueur caractéristique du problème.

a) Vérifier l'équation de Poisson.

b) Sur l'axe Ox, quelle est la loi de variation du potentiel avec l'abscisse ? Que représente la quantité

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} ? \text{ Commenter son signe et comparer à celui obtenu pour } \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}.$$

c) Déterminer le champ électrique à l'origine du repère. Si l'on place une particule de charge q_0 en ce point, est-elle en équilibre stable ?

1.5.3 Equipotentielle nulle d'un dipôle

Deux charges opposées q et $-q$ occupent les points de coordonnées cartésiennes A (-a,0,0) et A' (a,0,0). Déterminer la surface équipotentielle $V = 0$. Que représente-t-elle en termes de symétrie ?

<http://gilbert.gastebois.pagesperso-orange.fr/java/champs/electrique/electrique.htm>

1.5.4 Potentiel au centre d'un disque

Un disque de rayon R porte une densité surfacique de charge uniforme σ . Déterminer le potentiel en son centre.

1.5.5 Géométrie sphérique

Une sphère de rayon R porte une densité surfacique de charge uniforme σ .

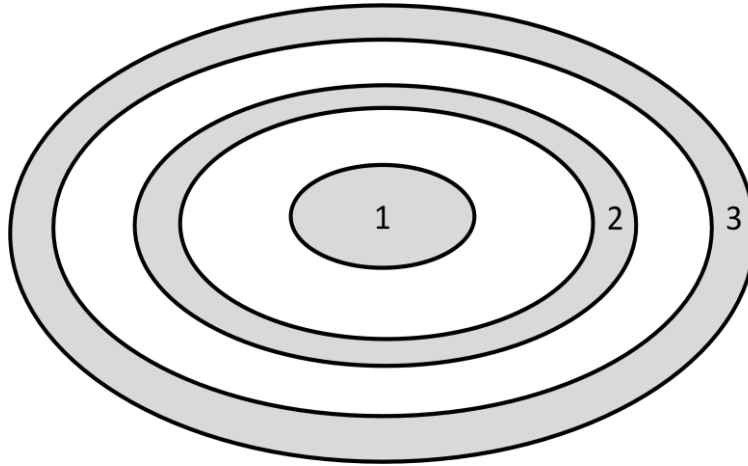
a) Déterminer le champ électrique à l'intérieur et à l'extérieur et examiner la relation de passage.

b) On place une charge ponctuelle de valeur Q au centre, reprendre l'étude.

1.5.6 Association de condensateurs

Trois conducteurs sont disposés comme indiqué sur la figure. Le conducteur 2 porte une charge totale nulle.

- Montrer qu'il est possible de définir deux condensateurs et indiquer quel est leur mode d'association (série ou parallèle).
- Définir un condensateur équivalent, dont les armatures seraient constituées du conducteur 1 et du conducteur 3 et donner l'expression de sa capacité.
- En raisonnant comme en première année dans le cadre de l'électrocinétique, retrouver cette expression.



1.5.7 Différents types de condensateurs

- Calculer la capacité d'un condensateur sphérique d'armatures concentriques de rayons respectifs R_1 et R_2 .
- Déterminer l'énergie stockée entre les armatures d'un condensateur sphérique en fonction de la charge Q portée par l'armature intérieure.
- Retrouver l'expression de la capacité à l'aide de la relation $U_E = Q^2/2C$.
- Calculer la capacité d'un condensateur cylindrique d'armatures concentriques de rayons respectifs R_1 et R_2 .

1.6 Exercices

1.6.1 Etude d'une membrane cellulaire

Une membrane cellulaire est assimilée au plan yOz ; l'axe Ox est orienté vers l'extérieur de la cellule. Toutes les grandeurs physiques sont supposées ne dépendre que de l'abscisse x .

Une micro-électrode relevant l'évolution du potentiel à la traversée de la membrane (de l'extérieur vers l'intérieur de la cellule), indique une variation de potentiel électrique en général négative.

On schématise le potentiel par la fonction $V(x)$ suivante (V_0 constante positive homogène à un potentiel, à une distance) :

$$\begin{aligned} x \leq 0 \quad V(x) &= -V_0 \\ x > 0 \quad V(x) &= -V_0 \exp\left(-\frac{x}{a}\right) \end{aligned}$$

- Calculer le champ électrique en tout point.
- Appliquer le théorème de Gauss à une surface cylindrique d'axe Ox et de base S , limitée par les plans d'abscisses x et $x+dx$. En déduire la densité volumique de charge ρ en tout point. Retrouver

cette expression par application de l'équation de Maxwell-Gauss puis par l'équation de Poisson. Quel est le signe de ρ ? Comment une densité volumique de charge peut-elle exister dans un liquide ?

c) En examinant l'éventuelle discontinuité du champ électrique, déterminer la densité surfacique de charge σ présente sur la surface d'équation $x = 0$.

d) Calculer la charge totale contenue dans un cylindre d'axe Ox et de base S , s'étendant indéfiniment le long de l'axe Ox (de $-\infty$ à $+\infty$). Commenter ce résultat.

