Cours III :
Mécanique du solide

Programme officiel : *L'enseignement de la mécanique du solide est également dispensé par le professeur de génie mécanique. Certaines connaissances de cette formation sont exploitées en physique, dans les exercices et les problèmes, au fur et à mesure des besoins. Le but en physique est de savoir mener l'étude de systèmes simples électromécaniques.*

1 Cinématique des solides

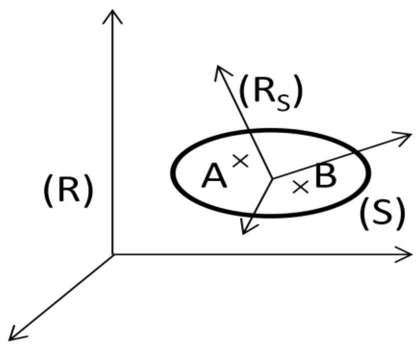
1.1 Le solide indéformable

1.1.1 Définition

Définition :
En mécanique, on appelle **solide** un corps indéformable : la distance entre deux points quelconques d'un solide reste constante au cours du temps.

Soit un solide (S) associé au référentiel (R_S), A et B deux points lui appartenant. Quelque soit le mouvement du solide dans un référentiel d'étude (R), tous les points du solide sont immobiles dans le référentiel (R_S).

$$\left(\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right)_{R_S} = \vec{0}$$



1.1.2 Masse d'un solide

Pour un système de points matériels de masses m_i, la masse totale, m, du système est définie comme :

$$m = \sum_i m_i$$

Définition :
Pour un solide, on parlera de répartition continue volumique. La **masse**, m, du solide s'exprime alors par :

$$m = \iiint_\tau dm = \iiint_\tau \rho . d\tau \qquad (1)$$

Avec : m = Masse du solide en kg

τ	=	Volume du solide en m^3
ρ	=	Masse volumique du solide en kg. m^{-3}

1.1.3 Centre d'inertie (ou centre de masse)

Pour un système de points matériels de masses m_i, le centre d'inertie (ou centre de masse ou barycentre), G, du système est défini comme :

$$\sum_i m_i \overrightarrow{GM_i} = \vec{0}$$

<u>Définition :</u>

Pour un solide, le **centre de masse** est défini par :

$$\iiint_\tau \overrightarrow{MG}.dm = \vec{0} \qquad (2)$$

Avec :	τ	=	Volume du solide en m^3
	M	=	Point appartenant au solide
	G	=	Centre d'inertie du solide
	m	=	Masse du solide en kg

<u>Remarques :</u>

- Cette définition est indépendante du repère choisi.
- La désignation de G centre de masse comme centre d'inertie est un abus de langage (bien qu'ils soient souvent confondus) : le centre d'inertie est normalement défini comme le barycentre des points M appartenant à (S) pondérés d'un facteur dépendant de $\vec{a}$ (accélération exercées par la Terre sur l'élément de volume dV):

$$d\vec{P} = dm\vec{a} = \rho(M)dV\vec{a}$$

<u>Propriété :</u>

- Il est souvent commode de repérer la position de G par rapport à une origine O d'un repère, on peut transformer (2) en :

$$\iiint_\tau \left(\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OM}\right).dm = -m\overrightarrow{OG} + \iiint_\tau \overrightarrow{OM}.dm = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{m}\iiint_\tau \overrightarrow{OM}.dm = \frac{1}{m}\iiint_\tau \rho(M)\overrightarrow{OM}.d\tau \qquad (3)$$

Avec :	O	=	Origine du repère
	G	=	Centre d'inertie du solide
	m	=	Masse du solide en kg
	τ	=	Volume du solide en m^3
	M	=	Point appartenant au solide
	ρ	=	Masse volumique du solide en kg. m^{-3}

1.1.4 Référentiel barycentrique

Définition :
Le **référentiel barycentrique** (R_G) du solide (S) est le référentiel associé au centre d'inertie, G, du solide. Il est centré en G et animé par rapport au référentiel d'étude (R) d'un mouvement de translation.

Remarques :

- Cette translation peut être quelconque (rectiligne, circulaire, curviligne, …). Si le référentiel d'étude (R) est galiléen, (R_G) ne l'est pas forcément.
- Le référentiel (R_G) a ses axes parallèles aux axes du référentiel d'étude (R).
- Ne pas confondre (R_G) et (R_S).
- Les dérivations dans (R) et dans (R_G) son identiques, en particulier :

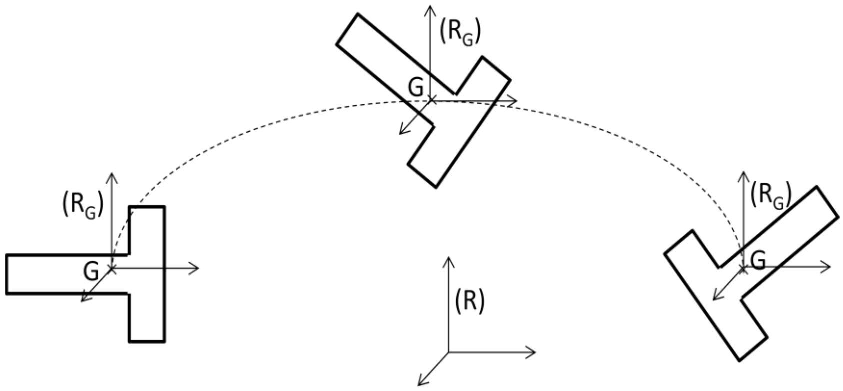
$$\left(\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right)_{(R)} = \left(\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right)_{(R_G)}$$

- Le vecteur rotation de (R_G) par rapport à (R) est nul :

$$\vec{\Omega}_{(R_G/R)} = \vec{0}$$

- La force d'inertie de Coriolis est nulle dans (R_G).

Exemple : Equerre lancée en l'air, avec un mouvement de rotation



1.2 Champ des vitesses d'un solide

1.2.1 Relation de Varignon

On se place dans le référentiel d'étude (R). Soit S un solide et (R_S) le référentiel lié au solide. On prend deux points A et B appartenant au solide. Alors $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur fixe dans le référentiel (R_S). D'après la loi de composition des vitesses dans des référentiels différents :

$$\left(\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right)_{(R)} = \underbrace{\left(\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right)_{(R_s)}}_{=0} + \vec{\Omega}_{(R_s/R)} \wedge \overrightarrow{AB}$$

On a alors :

$$\vec{v}(B)_{(R)} = \vec{v}(A)_{(R)} + \vec{\Omega}_{(R_s/R)} \wedge \overrightarrow{AB}$$

Ou encore :

$$\vec{v}(A)_{(R)} = \vec{v}(B)_{(R)} + \overrightarrow{AB} \wedge \vec{\Omega}_{(R_s/R)} \quad (4)$$

Avec :	v	=	Vitesse en m.s^{-1}
	(R)	=	Référentiel d'étude
	(RS)	=	Référentiel liée au solide
	$\vec{\Omega}$	=	Vecteur rotation du solide en s^{-1}

Remarques :

- Connaissant la vitesse d'un point du solide et le vecteur rotation, la vitesse des autres points du solide peut être déduite.
- On distingue le solide du point matériel par ses degrés de liberté : la vitesse d'un point matériel ne dépend que de 3 degrés de liberté ; la vitesse d'un point d'un solide dépend de la vitesse d'un autre point du solide et du vecteur rotation, on a au total 6 degrés de liberté.

Moyen mnémotechnique : formule « BABAR »

- On peut réécrire la relation de Varignon (avec $\vec{R}$ le vecteur rotation) sous la forme :

$$\vec{v}(B)_{(R)} = \vec{v}(A)_{(R)} + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{R}_{(R_s/R)}$$

1.2.2 Torseur cinématique

Rappel : Torseur

Un torseur est un outil mathématique composé de deux vecteurs :

- $\overrightarrow{M_A}$: moment du torseur au point A de coordonnées (L, M, N) dans (R)
- $\vec{R}$: résultante du torseur de coordonnées (X, Y, Z) dans (R)

Les moments aux points A et B sont reliés par la formule de Varignon :

$$\overrightarrow{M_B} = \overrightarrow{M_A} + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{R}$$

Il se note :

$$\Gamma = \begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \overrightarrow{M_A} \end{Bmatrix}_{(R)} = \begin{Bmatrix} X & L \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}_{(A,R)}$$

Définition :

Le **torseur cinématique** est défini par :

$$\Gamma_C = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega} \\ \vec{v}(A) \end{Bmatrix}_{(R)}$$

1.3 Mouvements possibles d'un solide

1.3.1 Translation

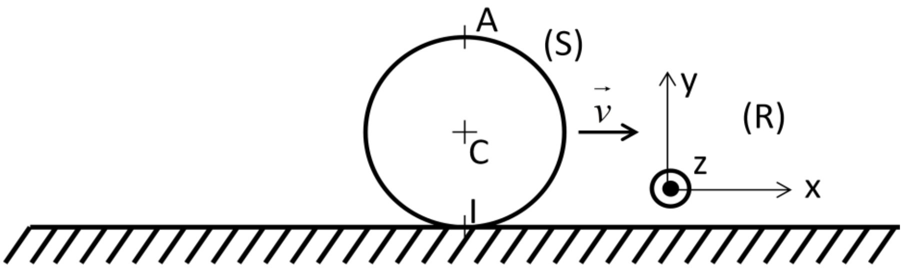
Un solide (S) est en translation par rapport à un référentiel (R) si tous les points liés à (S) ont la même vitesse par rapport à (R), ou de manière équivalente à chaque instant :

$$\vec{\Omega}_{(R_s/R)} = \vec{0}$$

Remarques :

- La translation peut être quelconque, rectiligne, curviligne, …
- Le nombre de degré de liberté est réduit à 3. On peut parler de LA vitesse du solide par rapport à (R).

Exemple : Roue en glissement pur sur le sol



$$\vec{v}(C)_{(R)} = \vec{v}(A)_{(R)} = \vec{v}(I)_{(R)} = \vec{v}$$

1.3.2 Rotation autour d'un axe fixe

Un solide est en rotation autour d'un axe fixe Δ par rapport à un référentiel (R) si tous ses points sont en mouvement circulaire sur des cercles d'axe Δ avec la même vitesse angulaire :

$$\omega = \left\| \vec{\Omega}_{(R_s/R)} \right\|$$

Remarques :

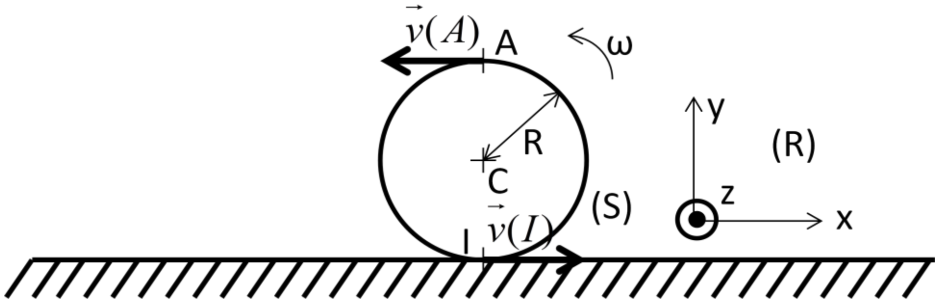
- Soit le point O appartenant à Δ alors :

$$\vec{v}(O)_{(R)} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{v}(M)_{(R)} = \overrightarrow{MO} \wedge \vec{\Omega}_{(R_s/R)}$$

- $\vec{\Omega}$ est orienté suivante l'axe fixe. Soit r la distance de M à Δ dans un repère cylindrique alors :

$$\vec{v}(M)_{(R)} = r\omega.\vec{e_\theta}$$

Exemple : Roue qui patine sur le sol



$$\vec{v}(C)_{(R)} = \vec{0} \quad \vec{v}(A)_{(R)} = -\omega \mathrm{R}\,\overrightarrow{\mathrm{e}_x} \quad \vec{v}(I)_{(R)} = \omega \mathrm{R}\,\overrightarrow{\mathrm{e}_x}$$

1.3.3 Rotation autour d'un axe de direction fixe

En plus du mouvement précédent, on suppose que le solide possède un mouvement de translation. Son mouvement s'écrit donc comme la somme :

- d'une rotation autour d'un axe Δ, qui peut être différent à chaque instant, appelé axe instantané de rotation.
- d'une translation parallèle à Δ.

Remarque :

- Utilisation du référentiel barycentrique : (R_G) est en translation par rapport à (R)

$$\overrightarrow{\Omega}_{(R_s/R)} = \overrightarrow{\Omega}_{(R_s/R_G)}$$

Dans (R_G), la vitesse au point M appartenant au solide s'écrit :

$$\vec{v}(M)_{(R_G)} = \vec{v}(G)_{(R_G)} + \overrightarrow{MG} \wedge \overrightarrow{\Omega}_{(R_s/R_G)} = \overrightarrow{MG} \wedge \overrightarrow{\Omega}_{(R_s/R)}$$

Le mouvement dans (R_G) est donc une rotation autour d'un axe fixe passant par G et colinéaire à l'axe de rotation dans (R).

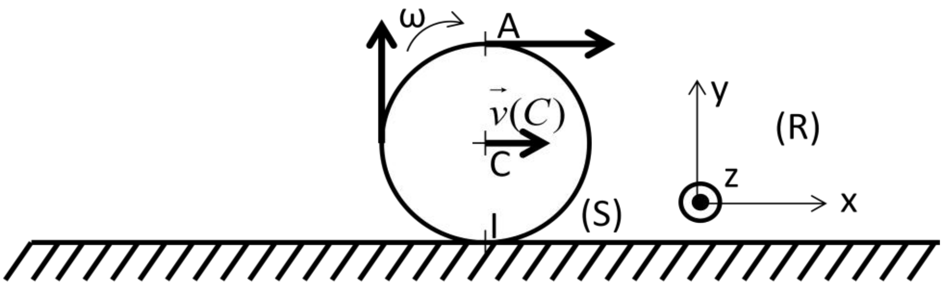
Dans (R), la vitesse au point M s'écrit :

$$\vec{v}(M)_{(R)} = \vec{v}(G)_{(R)} + \overrightarrow{MG} \wedge \overrightarrow{\Omega}_{(R_s/R)}$$

On peut donc décompose le mouvement en :

- mouvement de translation de G
- mouvement de rotation autour d'un axe fixe passant par G et colinéaire à l'axe de rotation dans (R).

<u>Exemple</u> : Roue sur le sol



$$\vec{v}(I)_{(R)} = \vec{0} \quad \vec{v}(C)_{(R)} = \vec{v}(I)_{(R)} + \overrightarrow{CI} \wedge \vec{\Omega}_{(R_s/R)} = \omega \mathrm{R}\, \overrightarrow{\mathrm{e}_x}$$
$$\vec{v}(A)_{(R)} = \vec{v}(C)_{(R)} + \overrightarrow{AC} \wedge \vec{\Omega}_{(R_s/R)} = 2\omega \mathrm{R}\, \overrightarrow{\mathrm{e}_x}$$

1.4 Solides en contact

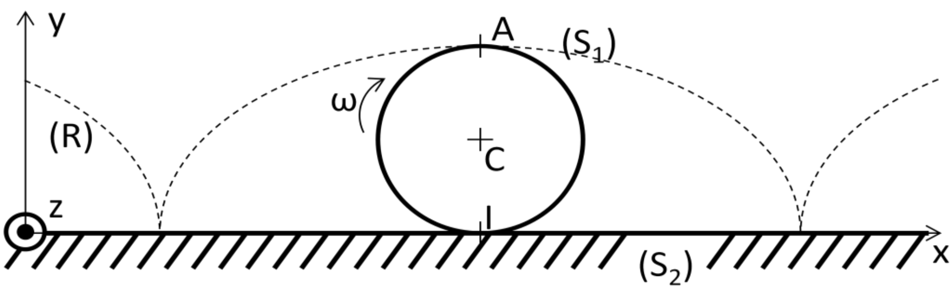
1.4.1 Position du problème

Soient (S_1) et (S_2) deux solides se déplaçant par rapport à un référentiel (R) tout en restant en contact entre eux au point I. On doit distinguer en un point de contact trois points différents :

- le point géométrique I qui localise le contact
- le point I_1 de (S_1) qui à l'instant t est au contact de (S_2)
- le point I_2 de (S_2) qui à l'instant t est au contact de (S_1)

Ces trois points ont des trajectoires différentes, donc des vitesses différentes.

<u>Exemple</u> : Roue sur le sol



Le point I se trouve sur le sol, il se déplace le long de (Ox). Le point I_2 ne se déplace pas. Le point I_1 décrit une cycloïde.

1.4.2 Vitesse de glissement

<u>Définition :</u>
On appelle **vitesse de glissement** de (S_1) sur (S_2) au point de contact I à l'instant t le vecteur :

$$\overrightarrow{v_g}(I)_{(S_1/S_2)} = \vec{v}(I_1)_{(R)} - \vec{v}(I_2)_{(R)} = \vec{v}(I_1)_{(S_2)}$$

<u>Remarques :</u>

- La vitesse de glissement ne dépend pas du référentiel d'étude mais seulement du mouvement relatif de (S_1) par rapport à (S_2).

- La vitesse de glissement se trouve dans le plan tangent aux deux solides en I.

1.4.3 Roulement et pivotement

Le mouvement relatif de (S_1) par rapport à (S_2) est aussi caractérisé par un vecteur rotation :

$$\vec{\Omega}_{(S_1/S_2)}$$

On appelle **vitesse angulaire de roulement** la composante de ce vecteur rotation parallèle au plan tangent commun aux deux solides.

On appelle **vitesse angulaire de pivotement** la composante de ce vecteur perpendiculaire au plan tangent commun aux deux solides.

Exemple :

- Lorsqu'on tourne le guidon d'un vélo en faisant du surplace, on observe un pivotement

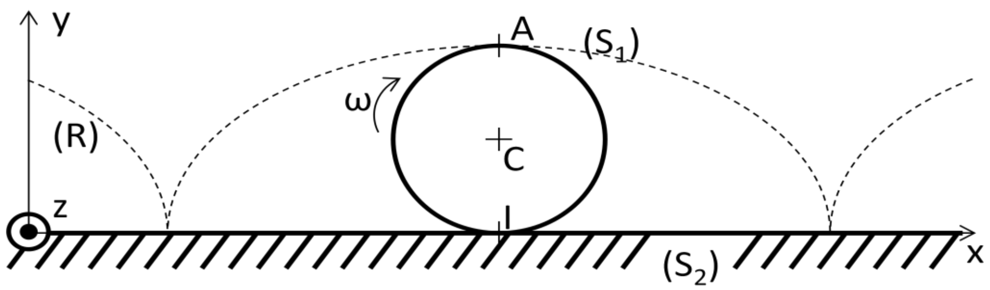
1.4.4 Mouvement de roulement sans glissement

Définition :

Il y a roulement sans glissement lorsque :

- le vecteur rotation $\vec{\Omega}_{(S_1/S_2)}$ est parallèle au plan tangent commun aux deux solides
- la vitesse de glissement est nulle

Exemple : Roue sur le sol



On retrouve les résultats donnés pour le mouvement de rotation autour d'un axe de direction fixe :

$$\vec{v}(I)_{(R)} = \vec{0} \quad \vec{v}(C)_{(R)} = \vec{v}(I)_{(R)} + \overrightarrow{CI} \wedge \vec{\Omega}_{(R_s/R)} = \omega \mathrm{R}\, \vec{e}_x$$

$$\vec{v}(A)_{(R)} = \vec{v}(C)_{(R)} + \overrightarrow{AC} \wedge \vec{\Omega}_{(R_s/R)} = 2\omega \mathrm{R}\, \vec{e}_x$$

A retenir et savoir faire :

- Savoir relier les vitesses des points d'un solide.

1.5 Exercices d'application

1.5.1 Mouvement de la Terre

Le mouvement de la Terre, dont le centre de masse est noté C, est composé dans le référentiel de Copernic d'une translation circulaire de rayon a = $1,5.10^{11}$ m (révolution) autour du Soleil en une durée T_1 = 1 an et d'une rotation sur elle-même en T_2 = 23 h 56 mn 4 s = 86164 s. On suppose que l'axe de rotation $\mathbf{u_z}$ de la Terre est perpendiculaire au plan de son orbite.

a) Définir le référentiel barycentrique terrestre et décrire son mouvement par rapport au référentiel de Copernic.
b) Ecrire la vitesse d'un point M quelconque de la Terre dans le référentiel de Copernic.
c) Trouver l'axe instantané de rotation de la Terre dans son référentiel barycentrique, ainsi que dans le référentiel de Copernic. On rappelle que le rayon de la Terre est R = 6400 km et le rayon de l'orbite lunaire est d_L = 380000 km.

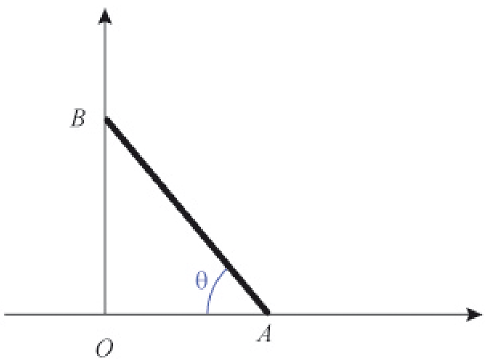
1.6 Exercices

1.6.1 Détermination de centre d'inertie

Déterminer la position du centre d'inertie des solides suivants :
a) un arc de cercle de masse m et d'angle d'ouverture $2\theta_0$
b) un secteur circulaire plein homogène de masse m et d'angle d'ouverture $2\theta_0$
c) un disque de rayon R dans lequel on a découpé un disque de rayon R/2 dont le centre est la distance R/2 de celui du disque initial.

1.6.2 Echelle adossée au mur

Une échelle AB de masse m, de longueur 2a est assimilée à une barre homogène d'épaisseur négligeable.

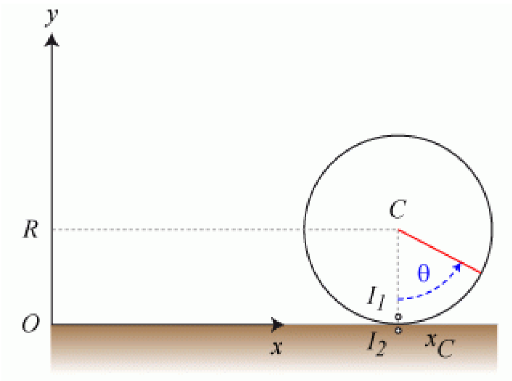


a) Quelle est la trajectoire du centre de masse G?
b) Quel est le nombre de degrés de liberté ? Quelle variable décrit le mouvement de la tige ? Définir le vecteur rotation associé au mouvement de la barre.
c) Le torseur cinématique est défini par le couple de vecteurs $\left(\vec{\Omega}, \vec{v_G}\right)$. Exprimer chacune de ces composantes vectorielles en fonction de a, θ et de leurs dérivées.

1.6.3 Etude du contact d'un disque

a) Un disque vertical homogène de rayon R, de centre C de masse M roule sans glisser sur un plan. Exprimer la vitesse de glissement du disque sur le plan. Écrire la condition de roulement sans glissement.

b) Le même disque vertical roule sans glisser dans un guide circulaire de rayon R_g en mouvement. Exprimer la vitesse de glissement du disque sur le guide. Écrire la condition de roulement sans glissement.



1.6.4 Train épicycloïdale

Un cylindre C1 de rayon R1, d'axe Δ1 horizontal, tourne avec une vitesse angulaire constante Ω1. L'axe Δ1 est fixe par rapport à un référentiel galiléen noté R0. Un second cylindre C2 de rayon R2 et d'axe Δ2 horizontal, roule sur C1 en tournant autour de son axe avec une vitesse angulaire Ω2. Les axes Δ1 et Δ2 sont reliés par une manivelle M de longueur R1 + R2 qui les maintient à distance constante. La manivelle M tourne autour de Δ1 avec une vitesse angulaire Ω3.

Montrer que l'hypothèse du roulement sans glissement impose une contrainte sur les vitesses de rotation Ω1, Ω2 et Ω3.