

Cours V : Electrocinétique

2 Analyse de Fourier

L'objectif de ce cours est de présenter une analyse des signaux analogiques en termes de fréquences, et de dégager la notion de spectre de fréquence d'un signal. Cette approche permettra la compréhension du principe de fonctionnement des filtres analogiques, dont l'usage est extrêmement répandu en électronique.

2.1 Décomposition d'un signal en série de Fourier

2.1.1 Principe

Définition :

Mathématiquement, il est possible de décomposer une fonction $f(t)$ périodique de période $T = 2\pi/\omega$ en somme de termes sinusoïdaux du temps, de pulsations multiples de ω . Cette somme est appelée **série de Fourier** :

$$f(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} (A_k \cos(k\omega t) + B_k \sin(k\omega t)) \quad (1)$$

Avec : $A_k, B_k =$ Coefficients de Fourier de la fonction $f(t)$

Remarques :

- La fonction se compose de trois parties :
 - Partie qui ne varie pas : A_0
 - Terme qui a la même période que la fonction elle-même, appelé **fondamental** :

$$A_1 \cos(\omega t) + B_1 \sin(\omega t)$$
 - Termes qui varient de plus en plus vite ($k > 1$), appelés **harmoniques** de rang k

2.1.2 Coefficients de la série

Définition :

Les coefficients de ce développement sont donnés par des intégrales portant sur une période du signal :

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{T} \int_{(T)} f(t) dt \\ A_k &= \frac{2}{T} \int_{(T)} f(t) \cos(k\omega t) dt \\ B_k &= \frac{2}{T} \int_{(T)} f(t) \sin(k\omega t) dt \end{aligned} \quad (2)$$

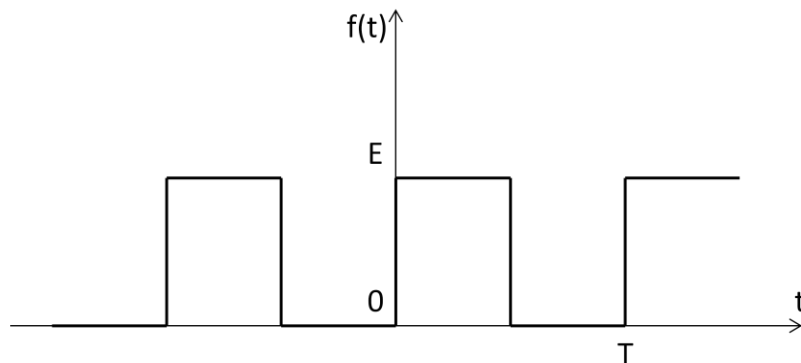
Remarques :

- Le terme constant A_0 de la série de Fourier est la **valeur moyenne** du signal.
- Si la fonction $f(t)$ est **paire** : les coefficients B_k sont nuls.

- Si la fonction $f(t)$ est **impaire** : les coefficients A_k sont nuls.

Exemple : Signal carré

Soit le signal carré représenté ci-dessous :



$$A_0 = \frac{1}{T} \int_{(T)} f(t) dt = \frac{E}{2}$$

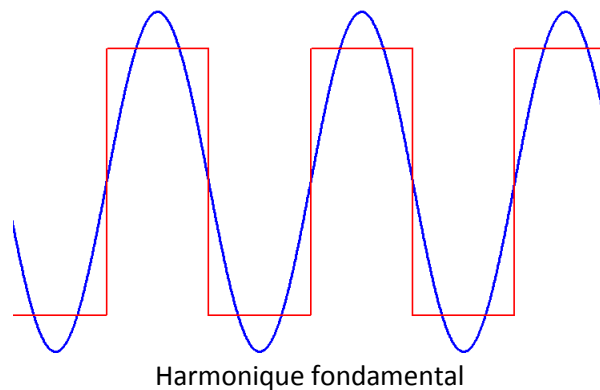
$$A_k = \frac{2}{T} \int_{(T)} f(t) \cos(k\omega t) dt = 0$$

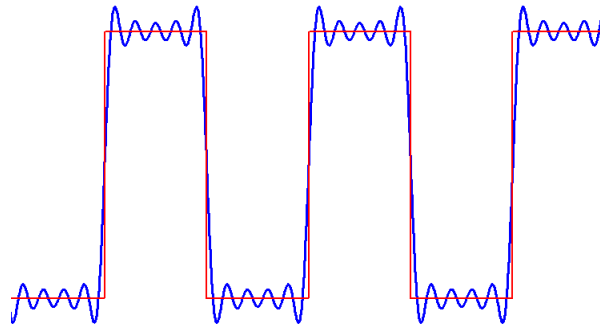
$$\begin{aligned} B_k &= \frac{2}{T} \int_{(T)} f(t) \sin(k\omega t) dt \\ &= \frac{E}{k\pi} (1 - \cos(k\pi)) \\ &= \frac{2E}{(2p+1)\pi} \quad \text{si } k = 2p+1 (p \in \mathbb{Z}) \\ &= 0 \quad \text{si } k = 2p (p \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

On a donc au final :

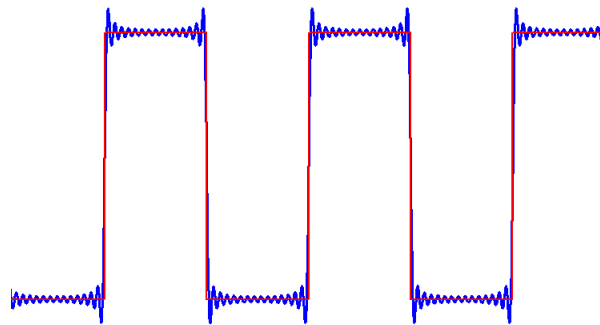
$$f(t) = \frac{E}{2} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{2E}{(2p+1)\pi} \sin((2p+1)\omega t)$$

On peut alors représenter cette fonction en fonction de la valeur de k :





Avec 10 harmoniques



Avec 30 harmoniques

Lorsqu'on accroît le nombre de termes pris en compte, on épouse de mieux en mieux la forme du signal total. L'existence de variations brutales au cours du temps est associée à la présence significative de termes de rang élevé dans la série de Fourier (Phénomène de Gibbs).

2.2 Représentation spectrale

2.2.1 Autre écriture

Définition :

On peut exprimer la série de Fourier d'une fonction sous une autre forme qui fait intervenir l'amplitude et la phase de chaque terme de pulsation $k\omega$:

$$f(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} C_k \cos(k\omega t + \varphi_k) \quad (3)$$

$$\text{avec } C_k = \sqrt{A_k^2 + B_k^2} \quad \text{et} \quad \varphi_k = \tan^{-1} \frac{B_k}{A_k}$$

Remarques :

- Pour un signal physique, l'amplitude des harmoniques tend vers 0 lorsque leur rang k tend vers l'infini.

- La série de Fourier peut être également écrite en utilisant les nombres complexes :

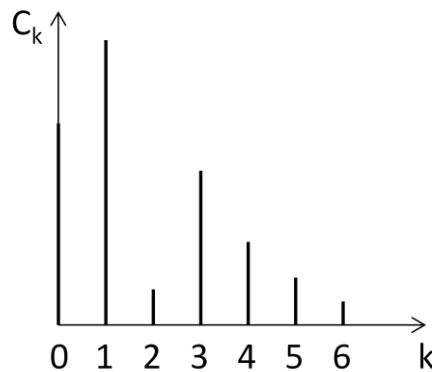
$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \underline{C}_k e^{jk\omega t} \quad \text{avec} \quad \underline{C}_k = \frac{1}{T} \int_{(T)} f(t) e^{-jk\omega t} dt$$

$$\underline{C}_0 = A_0 \quad \underline{C}_k = \frac{A_k - jB_k}{2} \quad |C_k| = \frac{C_k}{2}$$

2.2.2 Spectre d'un signal

Définition :

La représentation des amplitudes C_k des harmoniques en fonction de leur rang k est appelé **spectre** du signal.



Remarques :

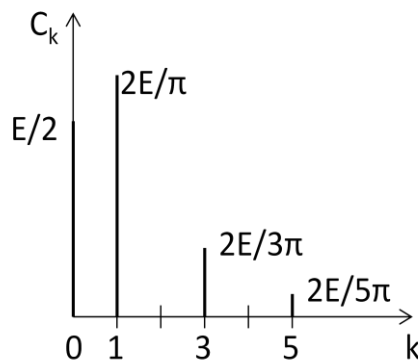
- Il est aussi possible de graduer l'axe des abscisses en pulsation $k\omega$ ou en fréquence kf .

Exemple : Signal carré

L'amplitude de ses harmoniques de rang pair est égale à :

$$C_{2p+1} = \frac{2E}{(2p+1)\pi}$$

On peut donc représenter son spectre :



Exercice d'application : 2.4.1 Signal triangulaire

2.2.3 Interprétation énergétique

La **puissance** d'un signal est définie comme la valeur moyenne du carré du signal (appelé aussi **valeur efficace**) :

$$\langle f^2 \rangle = f_{eff}^2 = \frac{1}{T} \int_{(T)} f^2(t) dt$$

En utilisant les séries de Fourier, on peut la relier à la valeur des amplitudes des harmoniques telle que :

$$\langle f^2 \rangle = A_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} C_k^2$$

La puissance du signal résultant est la somme des puissances de chacun des termes.

2.2.4 Distorsion harmonique

Un critère de reconnaissance de la linéarité d'un système porte sur l'examen du signal de sortie pour une entrée dépendant sinusoidalement du temps. Si le signal de sortie est sinusoidal, de même fréquence que le signal d'entrée alors le système est linéaire. Dans ce cas, seuls les coefficients de l'harmonique sont non nuls. Les termes d'ordre supérieur constituent ce que l'on appelle la distorsion harmonique.

On appelle taux de distorsion harmonique le rapport entre la puissance des termes harmoniques et celle du fondamental :

$$THD = \frac{\sqrt{\sum_{k=2}^{+\infty} C_k^2}}{C_1}$$

2.3 Effet d'un filtre sur un signal périodique

Soit la fonction de transfert $\underline{H}(j\omega)$ du filtre. Le spectre de sortie est le produit du spectre d'entrée par le module $|\underline{H}(j\omega)|$ de la fonction de transfert.

2.3.1 Filtre passe-bas

Un filtre passe-bas transmet intégralement la composante continue du signal. Le signal de sortie ne présente jamais de discontinuité.

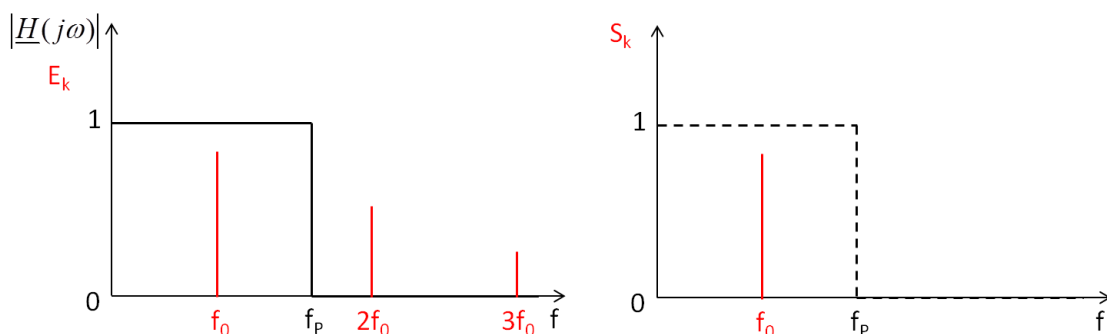
Pour un signal périodique de fréquence f_0 :

- très inférieur à la fréquence de coupure f_p : le signal de sortie est voisin du signal d'entrée
- de l'ordre de f_p : le signal est transmis avec une déformation importante
- très supérieur à f_p : le signal de sortie est quasiment continu.

Cas particuliers :

- Si $f_0 < f_p < 2f_0$, la composante fondamentale est la seule à ne pas être modifiée par le filtre.

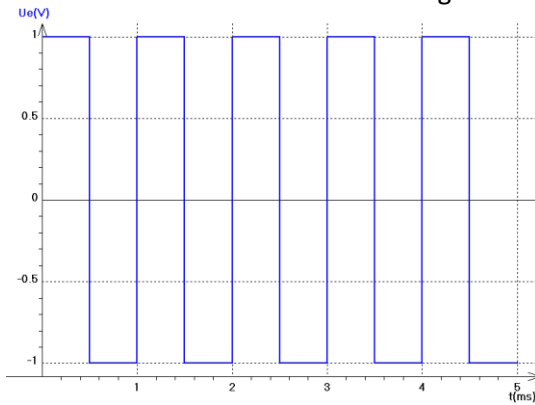
Les termes d'harmoniques sont fortement atténués.



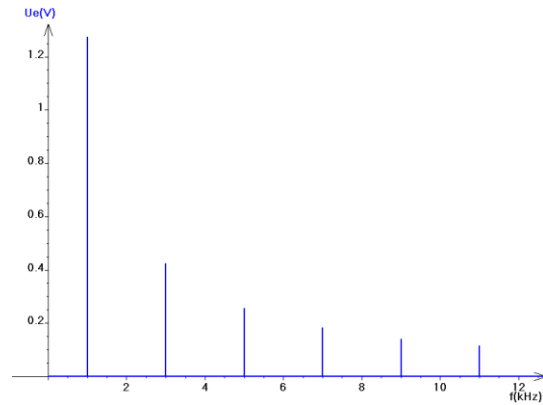
- Si toutes les composantes spectrales d'amplitude non négligeable sont contenues dans la bande passante. Le spectre de sortie sera quasiment égal à celui d'entrée. Plus précisément, les discontinuités et points anguleux du signal d'entrée sont adoucis dans le signal de sortie, car ces informations sont protégées par les harmoniques de rang élevés.

Exemple : Signal carré

Signal de fréquence 1 kHz

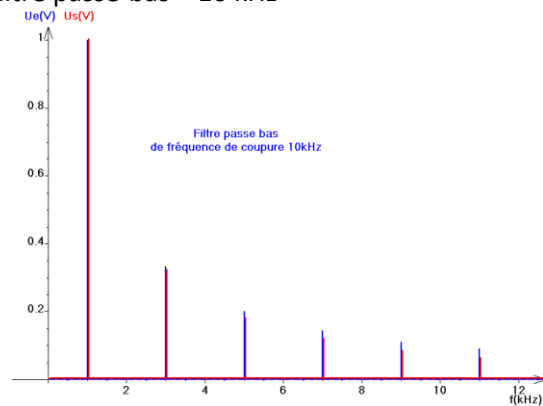
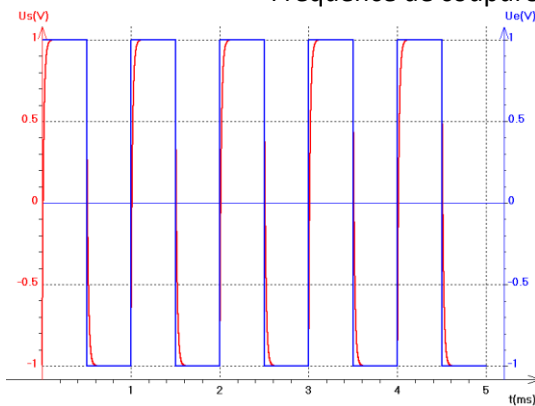


En fonction du temps

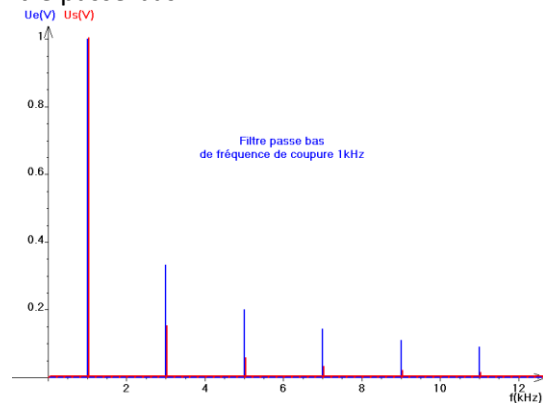
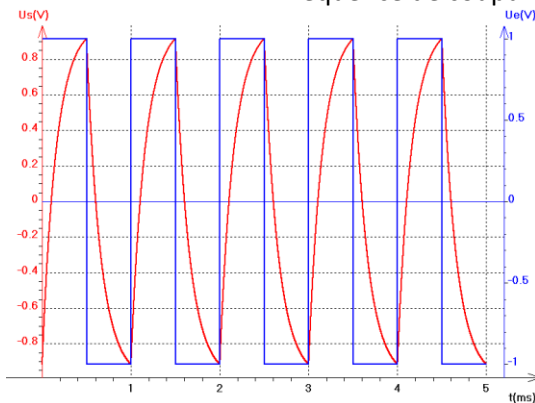


En fonction de la fréquence

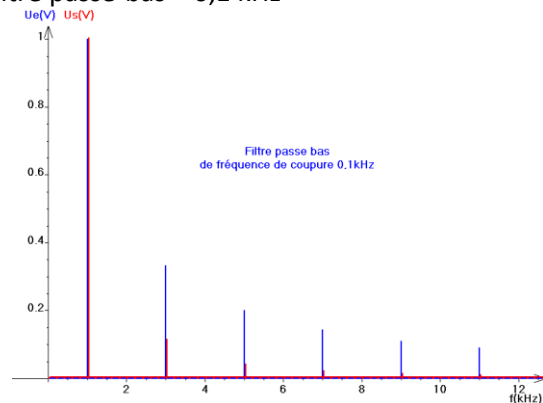
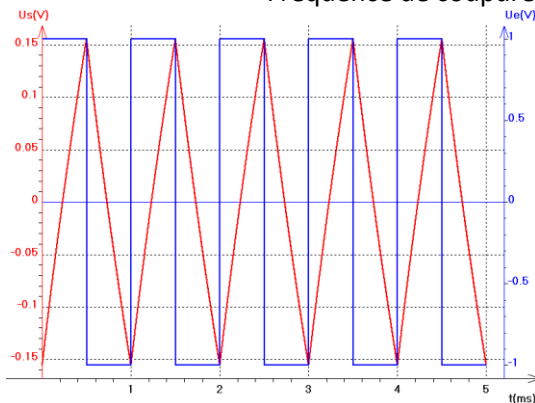
Fréquence de coupure du filtre passe-bas = 10 kHz



Fréquence de coupure du filtre passe-bas = 1 kHz



Fréquence de coupure du filtre passe-bas = 0,1 kHz



2.3.2 Filtre passe-haut

Un filtre passe-haut transmet intégralement les discontinuités du signal et élimine sa composante continue.

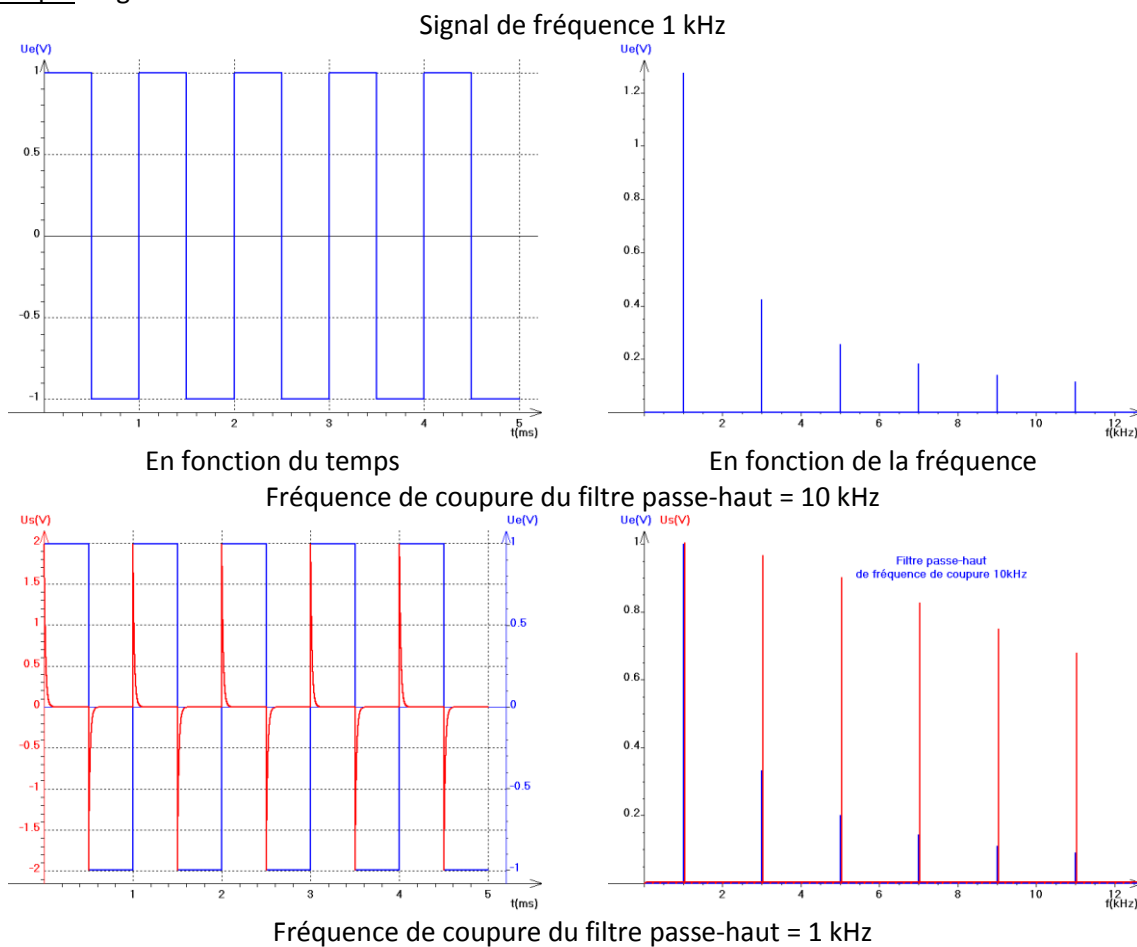
Pour un signal périodique de fréquence f_0 :

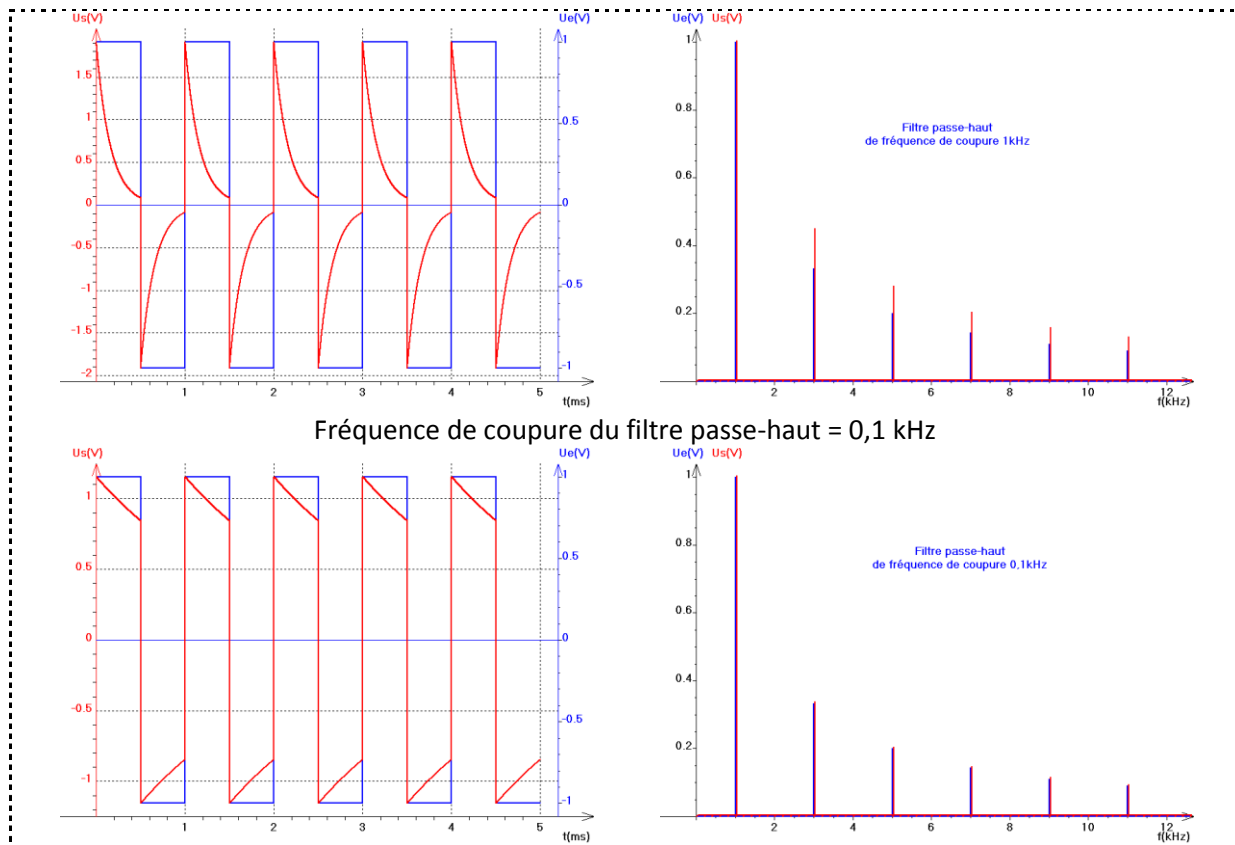
- très inférieur à la fréquence de coupure f_p : le signal de sortie est d'amplitude très faible sauf au niveau des discontinuités du signal d'entrée
- de l'ordre de f_p : le signal est transmis avec une déformation importante
- très supérieur à f_p : le signal de sortie est peu déformé, sa composante continue est éliminée.

Remarque :

- Un filtre passe-haut se trouve à l'entrée des oscilloscopes permettant d'éliminer la valeur moyenne d'un signal (mode AC).

Exemple : Signal carré





2.3.3 Filtre passe-bande

Un filtre passe-bande élimine la composante continue du signal. Le signal de sortie ne présente pas de discontinuités.

Pour un signal périodique de fréquence f_0 :

- très inférieur à la fréquence de coupure f_p : le signal de sortie est d'amplitude très faible sauf au niveau des discontinuités du signal d'entrée (effet passe-haut)
- de l'ordre de f_p : le signal de sortie est voisin de la partie variable du signal d'entrée
- très supérieur à f_p : le signal de sortie est d'amplitude très faible (effet passe-bas).

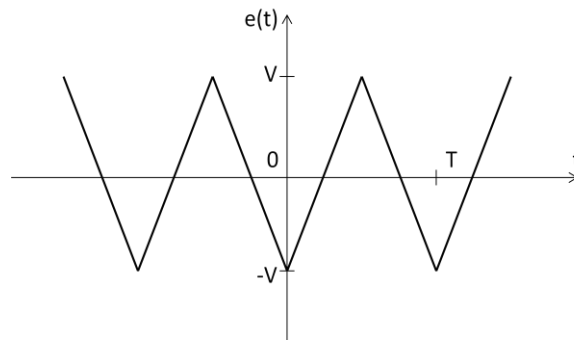
A retenir et savoir faire :

- Savoir interpréter l'effet d'un filtre du premier et du second ordre sur un signal périodique.

2.4 Exercices d'application

2.4.1 Signal triangulaire

a) Décomposer en série de Fourier le signal triangulaire suivant :



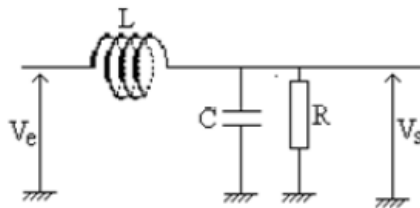
b) Tracer son spectre et étudier l'influence des filtres passe-bas et passe-haut sur le signal.

2.5 Exercices

2.5.1 Effet d'un filtre sur une tension créneau

Le filtre F étudié et la résistance de charge R sont représentés sur la figure ci-dessous. On pose :

$$LC\omega_0^2 = 1 \quad R = 80\Omega \quad L = 200mH \quad C = 10\mu F$$



a) Déterminer la fonction de transfert H du montage.

b) On pose $\underline{H} = Ge^{i\varphi}$ (G réel positif). Etudier les variations de G en fonction de la pulsation ω .

c) L et R étant imposées, montrer que lorsque C est inférieure à une certaine valeur C_0 , G est une fonction décroissante de ω . Calculer C_0 en fonction de L et R ; vérifier qu'avec les valeurs numériques imposées plus haut, on a bien $C < C_0$.

d) Le filtre F est maintenant alimenté par la tension V_1 rectangulaire, périodique, de fréquence $f = 1000$ Hz, de valeur V_0 de $t = 0$ à $t = T_1$ et de valeur nulle de $t = T_1$ à $t = T$.

On appelle α le rapport cyclique de cette tension V_1 tel que $\alpha = T_1/T$.

On décompose V_1 en série de Fourier sous la forme :

$$V_1 = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)]$$

Déterminer les coefficients a_0 , a_n et b_n en fonction de V_0 et de α .

e) On écrit la série de Fourier sous la forme :

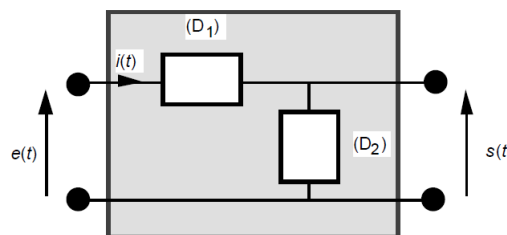
$$V_1 = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \underline{c}_n \cos(n\omega t + \varphi) \quad \text{avec} \quad |\underline{c}_n| \geq 0$$

Déterminer $|\underline{c}_n|$ en fonction de V_0 et de α .

- f) Expliquer pourquoi la tension de sortie V_2 est sensiblement constante. Déterminer la valeur V_{2m} de cette tension en fonction de V_0 et de α .
- g) Vérifier que, pour obtenir un ordre de grandeur convenable de l'ondulation résiduelle de la tension de sortie V_2 , il suffit de ne considérer dans le calcul que le premier harmonique de la série de Fourier.
- h) Déterminer alors, dans le cadre de l'approximation précédente, l'ondulation $\Delta V_2 = V_{2\max} - V_{2\min}$ de la tension de sortie ainsi que le taux d'ondulation $\Delta V_2 / 2V_{2m}$. Calculer la valeur numérique de ce taux pour $\alpha = 3/4$. Conclusion.

2.5.2 Boîte noire

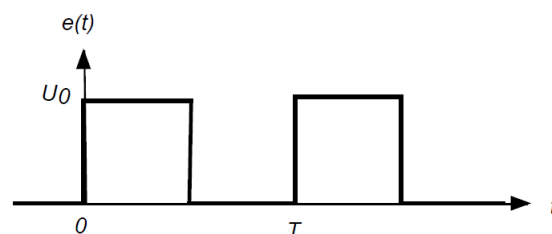
Un quadripôle constitué de deux dipôles (D_1) et (D_2), disposés comme l'indique la figure, contient une résistance R , un condensateur de capacité C et une bobine d'inductance L . Seules les bornes d'entrée et de sortie sont accessibles à l'expérimentateur.



On réalise les mesures suivantes :

- On relie l'entrée à une pile de f.é.m. $e(t) = E_0 = 15 \text{ V}$ et de résistance interne nulle, la sortie étant ouverte. On mesure, en régime établi, un courant d'entrée d'intensité $i(t) = i_0 = 15 \text{ mA}$.
- On remplace la pile précédente par un générateur de tension sinusoïdale $e(t) = E_0 \cos(\omega t)$, et on effectue une étude en fréquence de la réponse du système. L'expérience montre qu'il s'agit d'un filtre passe-bande dont le gain passe par sa valeur maximale pour la fréquence $f_0 = 1,16 \text{ kHz}$, et dont la bande passante à -3 dB vaut $\Delta f = 0,34 \text{ kHz}$.

- a) Expliquer pourquoi les trois composants ne peuvent pas être en série.
- b) Déterminer la disposition des composants dans le quadripôle ainsi que la valeur numérique des composants.
- c) Représenter qualitativement la forme du signal en sortie de ce filtre lorsque celui-ci se voit imposer une entrée en créneau.
 - Pour $T = 100 \text{ ms}$.
 - Pour $T = 0,01 \text{ ms}$.



- d) Mêmes questions lorsque ce filtre se voit imposer une entrée en signal triangulaire avec les pulsations précédentes.
- e) Comment rendre ce filtre plus sélectif ? Quelle serait alors l'influence sur la forme des signaux de sortie des exemples précédents ?