Cours VI : Electromagnétisme

2 Magnétostatique

Nous avons étudié jusqu'à présent les interactions entre des particules chargées immobiles. Mais que se passe-t-il si les particules chargées sont en mouvement ?

Ces particules chargées en mouvement vont créer des courants électriques. L'étude des effets dus à ces courants électriques s'appelle le magnétisme. Notre propos se limitera à la magnétostatique, c'est à dire à la description des phénomènes magnétiques indépendants du temps

2.1 Force de Lorentz

2.1.1 Expression

On étudie un ensemble de particules chargées en mouvement par rapport à un référentiel R donné. Une particule de cet ensemble de masse m, caractérisée par sa charge q, animée d'une vitesse v, se trouvant à l'instant t en un point M_0, subit une force F appelée force de Lorentz :

$$\vec{F} = q\left(\vec{E}\left(M_0,t\right)+\vec{v}\wedge\vec{B}\left(M_0,t\right)\right) \quad (1)$$

Avec : F = Force de Lorentz en N
q = Charge portée par la particule en C
E = Champ électrique en $V.m^{-1}$
v = Vitesse de la particule en $m.s^{-1}$
B = Champ magnétique en T (Tesla)

Remarques :

- Il y a donc deux composantes dans l'expression de cette force :
  - une force électrique (déjà rencontrée en première année) :

$$\vec{F_1} = q\vec{E}$$

  - une force magnétique :

$$\vec{F_2} = q\vec{v}\wedge\vec{B}$$

- Les champs E et B sont les composantes d'une entité unique : le champ électromagnétique $\left(\vec{E},\vec{B}\right)$.

Dans le cas des régimes permanents seulement, on peut étudier les deux séparément.

- Dans le cas où la vitesse de la particule est très petite devant la vitesse de la lumière dans le vide, on pourra négliger le poids devant la force de Lorentz.

2.1.2 Expression volumique

Dans une description en termes de densités volumiques de charge et de courant, on peut proposer une écriture de la force de Lorentz pour un élément de volume dτ. Pour chaque particule de ce volume, la force de Lorentz prend l'expression :

$$\vec{F_i} = q_i\left(\vec{E_i}+\vec{v_i}\wedge\vec{B_i}\right)$$

On en déduit, en sommant toutes les particules ($n_i d\tau$) présentes dans l'élément de volume :

$$d\vec{F} = \sum_i \left(n_i d\tau\right) q_i \left(\vec{E} + \vec{v_i} \wedge \vec{B}\right)$$
$$= \sum_i n_i q_i \vec{E} d\tau + \sum_i n_i q_i \vec{v_i} \wedge \vec{B} d\tau$$

On reconnait l'expression de la densité de courant (rencontrée dans le cours d'électrocinétique de première année) et de la densité volumique de charges :

$$\vec{j} = \sum_i n_i q_i \vec{v_i} \quad et \quad \rho = \sum_i n_i q_i$$

On peut donc finalement déterminer la densité volumique de force de Lorentz :

$$\vec{f_V} = \frac{d\vec{F}}{d\tau} = \rho\vec{E} + \vec{j} \wedge \vec{B} \qquad (2)$$

Avec : f_V = Densité volumique de force de Lorentz en $N.m^{-3}$
F = Force de Lorentz en N
$d\tau$ = Elément de volume en m^3
ρ = Densité volumique de charges en $C.m^{-3}$
E = Champ électrique en $V.m^{-1}$
j = Densité de courant en $A.m^{-2}$
B = Champ magnétique en T (Tesla)

2.1.3 Puissance de la force de Lorentz

La puissance de la force de Lorentz est donnée par :

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v}$$
$$= q\left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}\right) \cdot \vec{v}$$
$$= q\vec{E} \cdot \vec{v}$$

Remarque :

- La partie magnétique de la force de Lorentz ne travaille pas.
- D'après le principe fondamental de la dynamique, le champ magnétique agira sur la trajectoire de la particule.
- D'après le théorème de l'énergie cinétique, seul le champ électrique pourra modifier l'énergie cinétique de la particule.

2.1.4 Effet Hall

Soit un conducteur métallique rectiligne de section rectangulaire. On note b sa largeur selon (Oy) et δ son épaisseur selon (Oz). Le milieu comprend une densité volumique de charges mobiles (de charge q), notée n, soumise à un champ magnétique uniforme dirigé selon (Oz) :

$$\vec{B} = B\vec{u_z}$$

Il est parcouru par un courant d'intensité I avec une densité de courant j uniformément répartie :

$$\vec{j} = qn\vec{v} = qnv\vec{u_x}$$

L'ensemble des charges mobiles est soumis à la partie magnétique de force de Lorentz :

$$\overrightarrow{f_{V,2}} = q\vec{v} \wedge \vec{B} = -qvB\overrightarrow{u_y}$$

Elle dévie donc les particules amenant les charges positives et négatives sur les deux faces latérales opposées du conducteur :

- face 2 pour les charges négatives
- face 1 pour les charges positives.

Ces charges créent alors un champ électrostatique qui s'oppose à cette distribution de charge, appelé **champ de Hall**, E_H, dirigé de la face 1 vers la face 2 :

$$\overrightarrow{E_H} = E_H \overrightarrow{u_y}$$

En régime permanent, le terme magnétique de la force de Lorentz est alors compensé par le terme électrique dû au champ de Hall tel que :

$$q\overrightarrow{E_H} = -q\vec{v} \wedge \vec{B}$$

Alors, le champ de Hall peut se mettre sous la forme :

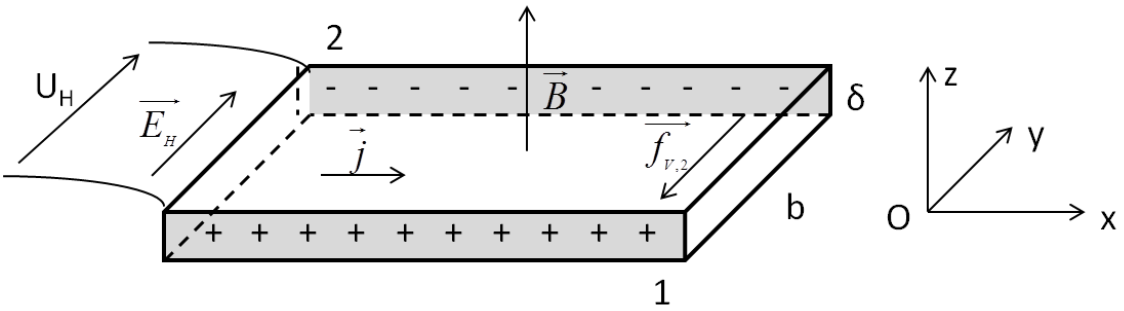
$$\begin{aligned}\overrightarrow{E_H} &= -\vec{v} \wedge \vec{B} \\ &= -\frac{1}{nq}\vec{j} \wedge \vec{B} \\ &= -\frac{1}{nq}\frac{I}{b\delta}\overrightarrow{u_x} \wedge B\overrightarrow{u_z} \\ &= \frac{IB}{nqb\delta}\overrightarrow{u_y}\end{aligned}$$

Il apparaît donc aussi une différence de potentiel, appelée **tension de Hall** U_H, entre les faces avant et arrière du conducteur :

$$U_H = V_2 - V_1 = -bE_H = -\frac{IB}{nq\delta} = -\frac{R_H IB}{\delta}$$

L'apparition de cette différence de potentiel s'appelle **effet Hall**. On note R_H la **constante de Hall** tel que :

$$R_H = \frac{1}{nq}$$



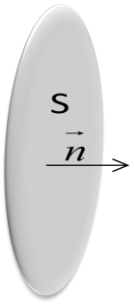
Remarque :

- L'effet Hall est utilisé dans de nombreux capteurs pour mesurer un champ magnétique (teslamètre) ou l'intensité d'un courant électrique.

2.2 Distributions de courant

2.2.1 Courant et intensité électriques

Considérons une surface S munie en tout point d'une normale orientée par un vecteur unitaire $\vec{n}$. On note δQ_m la charge mobile traversant cette surface entre les instants t et t + δt, comptée positivement dans le sens choisi par l'orientation de S.



Définition :

L'intensité I du courant électrique à travers une surface S est liée à la charge δQ_m qui traverse S entre les instants t et t + δt. Elle dépend de l'orientation de S. Elle s'exprime en ampère (symbole : A), unité de base du Système International d'unités.

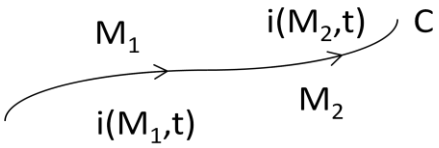
$$\delta Q_m = I \delta t \quad (3)$$

Avec : δQ_m = Charge mobile traversant S en C

I = Intensité du courant électrique en A

2.2.2 Distribution de courant électrique filiformes

Un fil conducteur (en général métallique) de faible section à l'échelle macroscopique peut être assimilé à une courbe C (sans épaisseur). Dans cette modélisation, la seule information à laquelle nous avons accès est la quantité de charge passant au point M par unité de temps, c'est à dire l'intensité i(M, t). Elle dépend en général à la fois du point M considéré et du temps.



La flèche tracée indique l'orientation du vecteur unitaire normal à une section du fil. Un déplacement de charges positives dans le sens de la flèche ou de charges négatives dans le sens contraire correspond à un courant $i(M, t) > 0$.

Remarque :

En régime permanent, la charge mobile étant uniformément répartie dans le conducteur et ne pouvant s'accumuler en aucun point du fil, nous pouvons en déduire les propriétés suivantes :

- un courant filiforme ne peut exister que sur un circuit fermé
- l'intensité i a la même valeur en tout point d'un fil sans dérivation.

2.2.3 Distributions de courant électrique non filiformes

2.2.3.1 Densité volumique de courant

Dans un conducteur (métal, électrolyte,....), on considère un ensemble de particules de charge q, de densité n et animées d'un mouvement d'ensemble de vitesse $\vec{v}$. La densité volumique de charges mobiles est : $\rho_m = nq$.

Définition :

Le vecteur densité volumique de courant associé à un mouvement d'ensemble à vitesse $\vec{v}$ est :

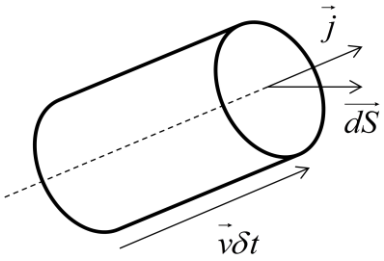
$$\vec{j} = nq\vec{v} = \rho_m \vec{v} \quad (4)$$

Avec : j = Densité volumique de courant en $A.m^{-2}$
n = Densité volumique de particules en m^{-3}
q = Charge des particules en C
v = Vitesse du mouvement d'ensemble en $m.s^{-1}$
ρ_m = Densité volumique de charges mobiles en $C.m^{-3}$

Remarque :

Il est important de ne pas confondre la densité de charges mobiles (électrons libres dans un métal, ions dans une solution,...) avec la densité totale de charges qui tient compte des charges fixes (ions d'un réseau cristallin par exemple).

Considérons la charge mobile δQ_m traversant entre les instants t et t + δt la surface élémentaire $\overrightarrow{dS}$. Elle est contenue à la date t dans le cylindre oblique de hauteur vδt et de volume $d\tau = \vec{v}\delta t \cdot \overrightarrow{dS}$.



La charge mobile est égale à :

$$\delta Q_m = nqd\tau = nq\vec{v}\delta t \cdot \overrightarrow{dS}$$

L'intensité dI traversant une surface S est :

$$dI = nq\vec{v} \cdot \overrightarrow{dS}$$

Définition :

L'intensité du courant électrique traversant une surface S est égale au flux du vecteur densité volumique de courant $\vec{j}(M,t)$ à travers cette surface :

$$I = \iint \vec{j}(M,t) \cdot \overrightarrow{dS} \quad (5)$$

Avec : I = Intensité du courant électrique en A
j = Densité volumique de courant en $A.m^{-2}$

2.2.3.2 Densité surfacique de courant

Lorsque la distribution de courants volumique se trouve confinée dans une nappe d'épaisseur faible à l'échelle macroscopique, nous pouvons assimiler celle-ci à une distribution surfacique de courants. On considère une surface portant une densité surfacique de charges mobiles σ_m animées d'un mouvement d'ensemble à vitesse $\vec{v}$.

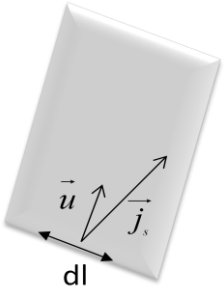
Définition :
Le vecteur densité surfacique de courant associé à un mouvement d'ensemble à vitesse $\vec{v}$ est :

$$\vec{j_s} = \sigma_m \vec{v} \quad (6)$$

Avec : j_s = Densité surfacique de courant en $A.m^{-1}$
σ_m = Densité surfacique de charges mobiles en $C.m^{-2}$
v = Vitesse du mouvement d'ensemble en $m.s^{-1}$

Lorsque les courants circulent sur des nappes surfaciques, le vecteur densité surfacique de courant associé est défini par :

$$dI = \vec{j_s} dl \vec{u}$$



Définition :
L'intensité du courant électrique traversant une ligne L reliant deux points de la surface est égale à la circulation du vecteur densité surfacique de courant $\vec{j_s}(M,t)$ le long de cette ligne :

$$I_{AB} = \int_A^B \vec{j_s}(M,t) \cdot dl \vec{u} \quad (7)$$

Avec : I = Intensité du courant électrique en A
j_s = Densité surfacique de courant en $A.m^{-1}$

2.2.4 Invariances, plans de symétrie et d'antisymétrie d'une distribution de courant

2.2.4.1 Invariances

Définition :
Une distribution de courants est invariante par translation lorsque l'image de la distribution par la translation est la distribution elle-même.

Remarques :
- Ceci n'est possible qu'avec une distribution s'étendant jusqu'à l'infini ; sinon la superposition entre la distribution et son image par translation n'est que partielle.

- Ce type d'invariance permet de ne plus tenir compte de la dépendance selon cette direction.

Exemple : Fil rectiligne infini parcouru par une intensité I
On considère une distribution invariante par toute translation le long de l'axe Ox alors :

$$\vec{j}(x+a,y,z)=\vec{j}(x,y,z)$$ pour toute valeur de a

Donc $\vec{j}$ ne dépend pas de x.

Définition :
L'invariance par rotation correspond au cas où la distribution obtenue après rotation se superpose rigoureusement avec la distribution initiale que ce soit en position dans l'espace ou en valeur locale de la densité de courants.

Remarque :
Ce type d'invariance permet de ne plus tenir compte de la dépendance selon l'angle de rotation considéré.

Exemple : Fil rectiligne parcouru par une intensité I
On considère une distribution invariante par toute rotation autour de l'axe Oz alors :

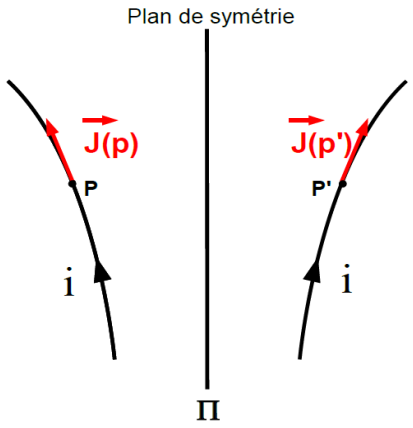
$$\vec{j}(r,\theta+\varphi,z)=\vec{j}(r,\theta,z)$$ pour toute valeur de φ

Donc $\vec{j}$ ne dépend pas de θ.

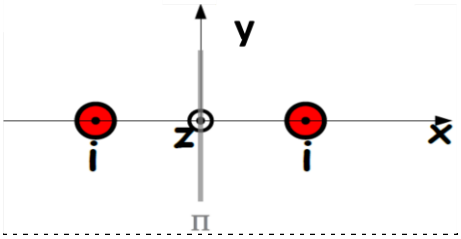
2.2.4.2 Plan de symétrie

Définition :
Une distribution de courant possède un plan de symétrie Π si :
- Π est un plan de symétrie géométrique de la distribution
- si tout point P de la distribution a une image P' appartenant à la distribution

$$\vec{j}(P')=sym\left[\vec{j}(P)\right]$$



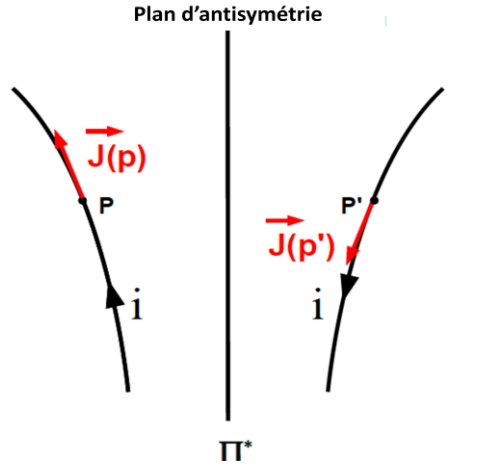
Exemple : Ligne bifilaire
On considère deux fils infinis parallèles à l'axe Oz parcourus par un courant i. Les deux fils coupent le plan xOy en (a,0,0) et (-a,0,0). Le plan yOz est plan de symétrie (Π) si les courants circulent dans le même sens :



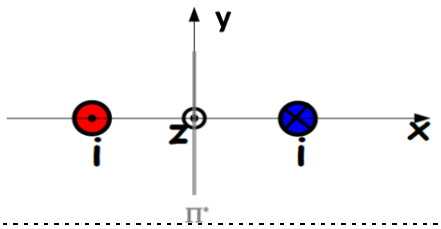
2.2.4.3 Plan d'antisymétrie

Définition :
Une distribution de courant possède un plan d'antisymétrie Π* si :
- Π* est un plan de symétrie géométrique de la distribution
- si tout point P de la distribution a une image P' appartenant à la distribution

$$\vec{j}(P') = -sym\left[\vec{j}(P)\right]$$



Exemple : Ligne bifilaire
On considère deux fils infinis parallèles à l'axe Oz parcourus par un courant i. Les deux fils coupent le plan xOy en (a,0,0) et (-a,0,0). Le plan yOz est plan d'antisymétrie (Π*) si les courants circulent en sens inverse :



2.3 Topographie du champ magnétostatique

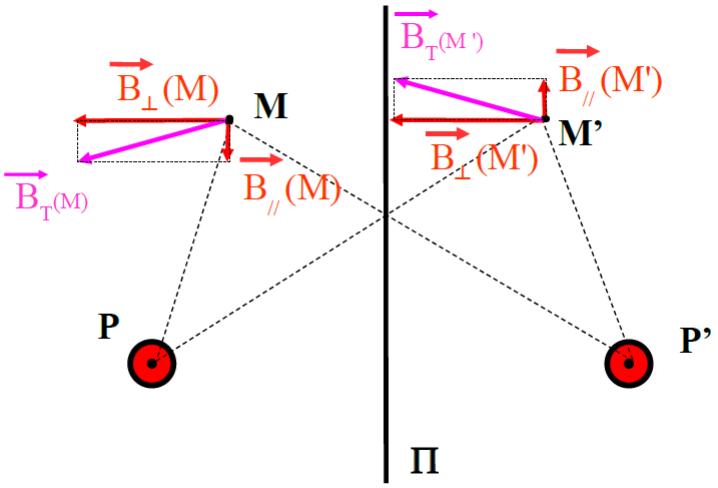
2.3.1 Invariances

Si la distribution de courants est invariante par translation selon un axe, le champ l'est aussi : il ne dépend donc pas de la coordonnée le long de cet axe.

Si la distribution de courants est invariante par rotation autour d'un axe, les composantes du champ le sont aussi : elles ne dépendant donc pas de la coordonnée angulaire qui définit la rotation autour de cet axe.

2.3.2 Plan de symétrie de la distribution de courant

Propriété :
Si le plan Π est **plan de symétrie** de la distribution de courant, alors ce plan est un **plan d'antisymétrie pour le champ magnétostatique** :
- les composantes parallèles au plan sont opposées
- les composantes orthogonales au plan sont égales.

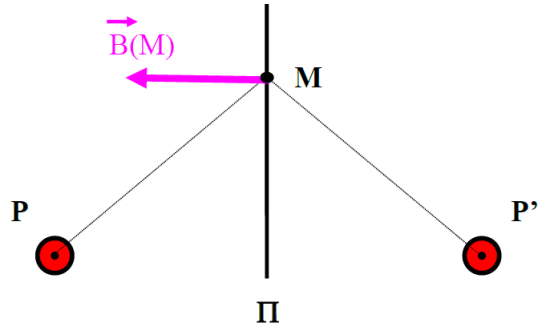


Conséquence :
Si M appartient au plan de symétrie Π, alors :

$$M = M' \quad \Rightarrow \quad \vec{B}_{\parallel}(M) = -\vec{B}_{\parallel}(M') = \vec{0}$$

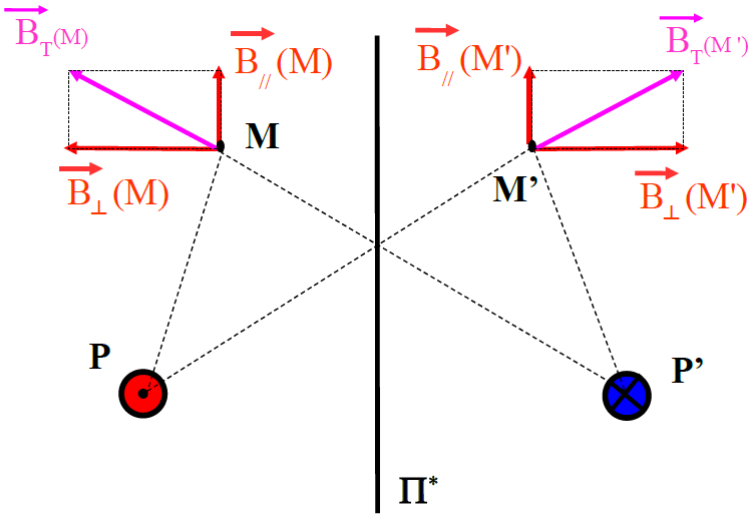
Le champ magnétique est perpendiculaire au plan de symétrie Π :

$$\vec{B}(M) \perp \Pi$$



2.3.3 Plan d'antisymétrie de la distribution de courant

Propriété :
Si le plan Π* est **plan d'antisymétrie** de la distribution de courant, alors ce plan est un **plan de symétrie pour le champ magnétostatique** :
- les composantes parallèles au plan sont égales
- les composantes orthogonales au plan sont opposées.



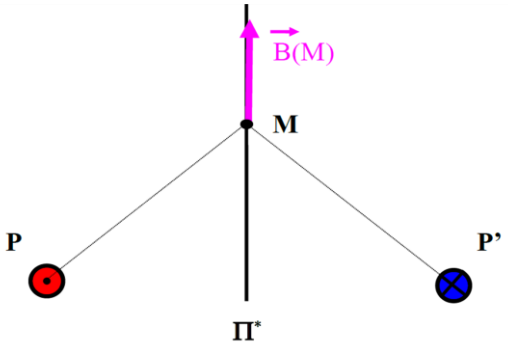
Conséquence :

Si M appartient au plan d'antisymétrie Π*, alors :

$$M = M' \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{B_\perp}(M) = -\overrightarrow{B_\perp}(M') = \vec{0}$$

Le champ magnétique appartient au plan d'antisymétrie Π* :

$$\vec{B}(M) \,||\, \Pi^*$$



Remarques :

Le champ magnétique a les propriétés de symétrie d'un **vecteur axial** ou « **pseudo-vecteur** ».

2.3.4 Exemples de distributions de courant

2.3.4.1 Fil rectiligne infini parcouru par un courant I

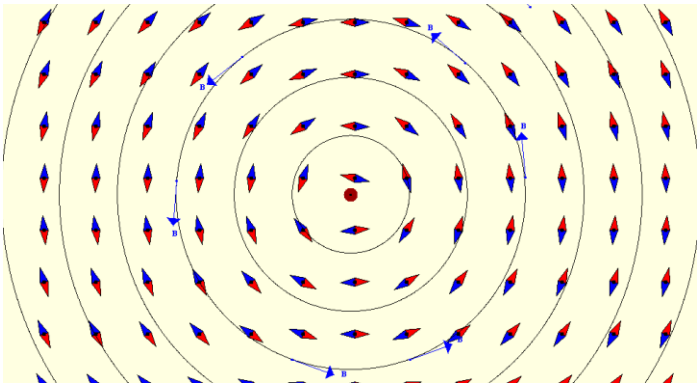
Le fil est confondu avec l'axe Oz :

- tous les plans contenant le fil sont plans de symétrie (Π) de la distribution de courant
- tous les plans perpendiculaires au fil sont plans d'antisymétrie de la distribution de courant

Le champ magnétique étant perpendiculaire aux plans de symétrie et la distribution de courants étant invariante par translation selon z et rotation selon θ, on a :

$$\vec{B} = B_\theta(r)\vec{e_\theta}$$

Les lignes de champ sont orthoradiales. Ce sont des cercles d'axe Oz.



2.3.4.2 Bobine circulaire plate parcourue par un courant I

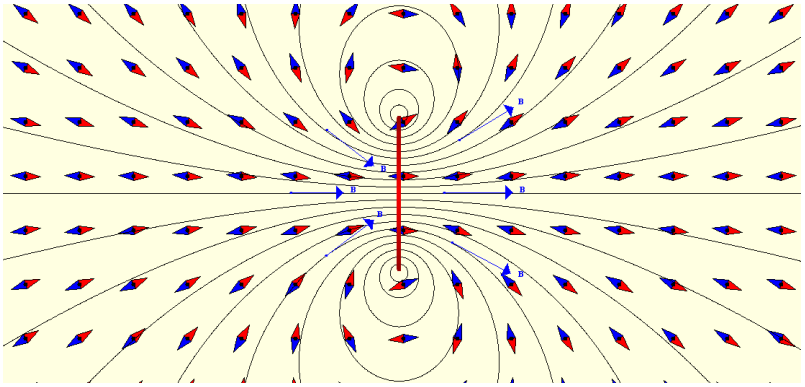
On considère une bobine circulaire plate d'axe Oz parcourue par un courant i. La bobine est contenue dans le plan xOy :

- tout plan contenant l'axe Oz est plan d'antisymétrie de la distribution de courants.

En tout point M, le champ magnétique est contenu dans le plan passant par M et contenant l'axe Oz. Par ailleurs, la distribution de courants est invariante par rotation selon θ. On en déduit :

$$\vec{B} = B_r(r,z)\vec{e_r} + B_z(r,z)\vec{e_z}$$

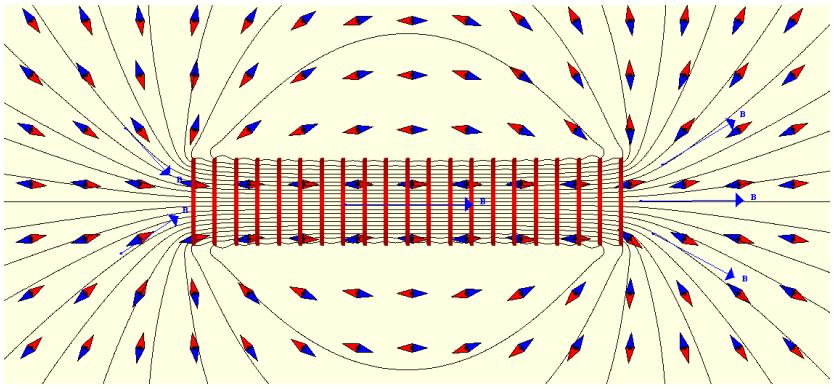
Le plan xOy est plan de symétrie de la distribution de courants. Le champ magnétique est perpendiculaire à ce plan en tout point de xOy. De plus, xOy étant plan de symétrie, les composantes du champ sont des fonctions paires de z.



2.3.4.3 Solénoïde fini parcouru par un courant I

Le solénoïde d'axe Oz et de centre O est de taille finie. Le plan xOy est plan de symétrie de la distribution de courants. Tous les plans passant par l'axe Oz sont plans d'antisymétrie. La distribution de courants est invariante par rotation selon θ.

On a donc les mêmes expressions générales et conclusions que dans le cas précédent de la bobine plate.



Remarques :

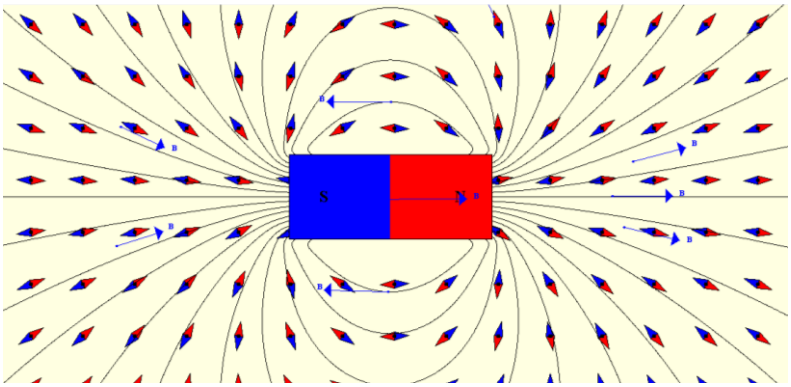
- Cas du solénoïde infini :

Dans ce cas, les plans perpendiculaires à l'axe Oz (axe du solénoïde) sont plans de symétrie. En tout point M, le champ magnétique est donc normal au plan passant par M et perpendiculaire à l'axe du solénoïde. La distribution de courants ne dépend plus que de r. On en déduit l'expression générale du champ magnétique :

$$\vec{B} = B_z(r)\vec{e_z}$$

- Cas d'un aimant permanent :

La distribution de courant et le champ produit loin de l'aimant sont alors équivalents à ceux d'un solénoïde.



2.3.5 Topographie du champ magnétostatique

Définition :
Le champ magnétique est tangent à des courbes appelées **lignes de champ** qui sont orientées dans le sens du champ.
Un **tube de champ** est formé par un ensemble de lignes de champ qui s'appuyant sur un contour fermé.

Remarques :

- Les lignes de champ magnétostatique ne divergent pas à partir de leur source (les courants) : elles « tourbillonnent » autour de cette source.
- Un tire-bouchon qui tourne dans le sens du courant (respectivement sens des lignes de champ) progresse dans le sens du champ à l'intérieur du circuit (respectivement sens de l'intensité du courant).

2.4 Loi de Biot et Savart

2.4.1 Formulation

Considérons un conducteur filiforme parcouru par un courant d'intensité I et notons $\overrightarrow{dl}$ un déplacement élémentaire le long de ce circuit orienté dans le même sens que le courant.

On appelle élément de courant, le vecteur $\overrightarrow{dC} = I\overrightarrow{dl}$ dont la norme s'évalue en A.m. Cet élément de courant est à l'origine du champ magnétique.

Loi de Biot et Savart :

La contribution d'un élément de courant $\overrightarrow{dC} = I\overrightarrow{dl}$, situé au point P, au champ total $\vec{B}(M)$ créé en M par une distribution de courant est donnée par la loi de Biot et Savart :

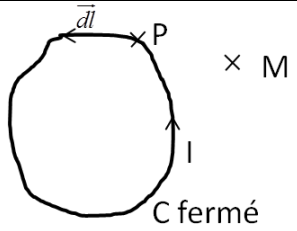
$$\overrightarrow{dB} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\overrightarrow{dl} \wedge \overrightarrow{PM}}{PM^3} \quad (8)$$

Avec : $\overrightarrow{dB}$ = Contribution au champ magnétique apportée par $\overrightarrow{dC}$ en M
μ_0 = Perméabilité du vide ($4\pi 10^{-7}$ H.m^{-1})
I = Courant parcourant le conducteur filiforme en A
$\overrightarrow{dl}$ = Déplacement élémentaire le long du circuit en m

On en déduit l'expression du champ magnétique pour les circuits fermés filiformes :

$$\vec{B}(M) = \oint_C \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\overrightarrow{dl} \wedge \overrightarrow{PM}}{PM^3} \quad (9)$$

Avec : $\vec{B}$ = Champ magnétique crée par le circuit fermé C en M
μ_0 = Perméabilité du vide ($4\pi 10^{-7}$ H.m^{-1})
I = Courant parcourant le conducteur filiforme en A
$\overrightarrow{dl}$ = Déplacement élémentaire le long du circuit en m



Remarques (Hors programme) :

- Dans le cas d'une distribution surfacique de courant $\overrightarrow{dC} = \vec{j}_s dS$:

$$\overrightarrow{dB} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{j}_s dS \wedge \overrightarrow{PM}}{PM^3}$$

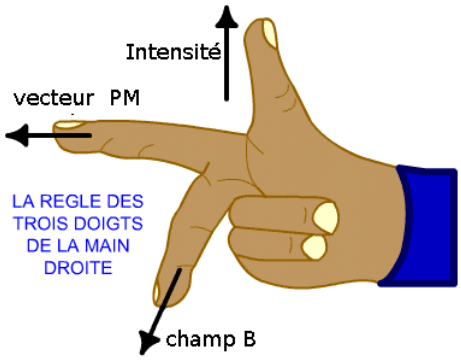
- Dans le cas d'une distribution volumique de courant $\overrightarrow{dC} = \vec{j}d\tau$:

$$\overrightarrow{dB} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{j}d\tau \wedge \overrightarrow{PM}}{PM^3}$$

Rermarques :

- L'expression du champ magnétique ne peut se calculer que le long d'un circuit fermé (sinon I nul).

- Les propriétés de symétrie du champ magnétique (pseudo-vecteur) découlent du produit vectoriel.
- En pratique, pour connaître la direction et le sens du champ magnétique en un point M quelconque, on utilise la règle dite des “trois doigts” de la main droite. Le courant entre par la base du pouce et ressort par son extrémité, l’index indique le sens du vecteur $\overrightarrow{PM}$ et le sens de $\vec{B}$ est donné par le majeur. Le pouce, l’index et le majeur formant une base orthogonale directe.



2.4.2 Théorème de superposition

Théorème :

Soit $\overrightarrow{B_1}$ le champ magnétique créé par une source 1, $\overrightarrow{B_2}$ le champ magnétique créé par une source 2 indépendante. Lorsque les deux sources coexistent, et s’il n’y a pas d’influence de l’une sur l’autre, le champ résultant est :

$$\vec{B} = \overrightarrow{B_1} + \overrightarrow{B_2}$$

Remarque :

En fait, on l’a déjà utilisée lorsqu’on a sommé les différentes contributions $\overrightarrow{dB}$.

2.4.3 Exemples de calcul de champs magnétiques créée par des courants filiformes

Méthode de résolution :

1- Rechercher les symétries et invariances.

2- Calculer le champ magnétique élémentaire crée par l’élément de courant $\overrightarrow{dC}$

3- Utiliser les symétries pour simplifier

4- Intégrer sur le circuit fermé.

2.4.3.1 Champ d’un fil rectiligne illimité

Nous considérons ici un fil rectiligne infini confondu avec l’axe Oz et parcouru par un courant I. Le courant et l’axe Oz sont orientés dans le même sens. Ce système modélise un circuit fermé comportant une portion rectiligne de longueur L grande devant la distance r au point M où est évalué le champ $\vec{B}(M)$. Le point M(r, θ, z) est repéré par ses coordonnées cylindriques.

1- Recherche des symétries et invariances (voir 2.3.4.1)

$$\vec{B} = B_\theta(r)\overrightarrow{e_\theta}$$

2- Champ magnétique élémentaire

L’élément de courant $I\overrightarrow{dl}$ situé en P(0, 0, Z), crée le champ élémentaire :

$$\overrightarrow{dB} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\overrightarrow{dl} \wedge \overrightarrow{PM}}{PM^3} \quad avec \quad \overrightarrow{dl} = dZ\overrightarrow{e_z}$$

On décompose le vecteur $\overrightarrow{PM}$ en utilisant le projeté H (0, 0, z) de M sur l'axe Oz, on obtient :

$$\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{PH} + \overrightarrow{HM} = (Z-z)\vec{e}_z + r\vec{e}_r \quad d'où \quad \overrightarrow{dB} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{IrdZ}{\left(r^2+(Z-z)^2\right)^{3/2}}\vec{e}_\theta$$

3- Simplification

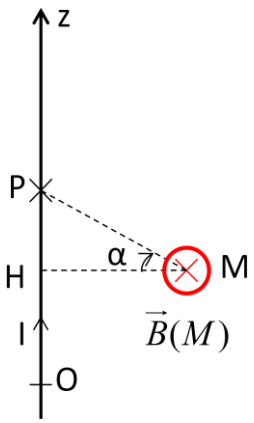
On introduit l'angle α entre $\overrightarrow{MH}$ et $\overrightarrow{MP}$, on obtient :

$$\cos\alpha = \frac{r}{\left(r^2+(Z-z)^2\right)^{1/2}} \quad et \quad \tan\alpha = \frac{Z-z}{r} \quad \Rightarrow \quad dZ = \frac{rd\alpha}{\cos^2\alpha}$$

4- Intégration

Finalement, le champ magnétique crée par le fil infini se calcule en intégrant l'expression ci-dessous pour α variant entre -π/2 et π/2 :

$$\overrightarrow{dB} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\cos\alpha d\alpha}{r}\vec{e}_\theta \quad d'où \quad \vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi r}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\alpha d\alpha\vec{e}_\theta = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\vec{e}_\theta$$



2.4.3.2 Champ sur l'axe d'une spire circulaire

Nous calculons ici le champ en un point M de l'axe de la spire. Le point M(r, θ, z) est repéré par ses coordonnées cylindriques.

1- Recherche des symétries et invariances (voir 2.3.4.1)

$$\vec{B} = B_r(r,z)\vec{e}_r + B_z(r,z)\vec{e}_z$$

Or, ici on se trouve sur l'axe de la spire qui fait partie des plans d'antisymétrie de la distribution de courant et de plus, r ne varie pas d'où :

$$\vec{B} = B_z(z)\vec{e}_z$$

2- Champ magnétique élémentaire

Le champ magnétique élémentaire créé par la spire d'axe Oz et placée dans le plan (xOy) est donné par :

$$\begin{cases} \overrightarrow{dl} = Rd\theta\vec{e}_\theta \\ \overrightarrow{PM} = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OM} = -R\vec{e}_r + z\vec{e}_z \end{cases} \Rightarrow \quad \overrightarrow{dB} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{IRd\theta\vec{e}_\theta \wedge \left(-R\vec{e}_r + z\vec{e}_z\right)}{\left(R^2+z^2\right)^{3/2}}$$

3- Simplification

En utilisant les propriétés de symétrie :

$$\overrightarrow{dB}\cdot\vec{e}_z=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{IR^2d\theta}{\left(R^2+z^2\right)^{3/2}}$$

4- Intégration

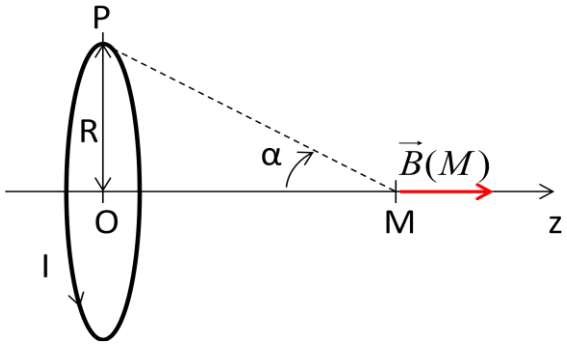
L'expression du champ total créé par la spire en M s'obtient en intégrant l'expression du champ élémentaire sur toute la spire :

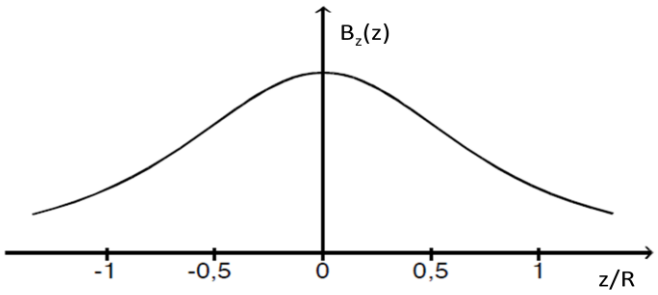
$$\vec{B}(M)=\frac{\mu_0 I}{4\pi\left(R^2+z^2\right)^{3/2}}\int_0^{2\pi}R^2d\theta\vec{e}_z$$

$$=\frac{\mu_0 IR^2}{2\left(R^2+z^2\right)^{3/2}}\vec{e}_z$$

On peut aussi exprimer le champ magnétique en fonction de l'angle α entre $\overrightarrow{MO}$ et $\overrightarrow{MP}$, on obtient :

$$\sin\alpha=\frac{R}{\left(R^2+z^2\right)^{1/2}}\quad\Rightarrow\quad\vec{B}(M)=\frac{\mu_0 I}{2R}\sin^3\alpha\vec{e}_z$$





2.4.3.3 Champ sur l'axe d'un solénoïde circulaire

Le solénoïde est constitué de spires jointives enroulées sur un cylindre : soit L sa longueur, R son rayon, N son nombre total de spires et n son nombre de spires par unité de longueur tel que n =N/L. Il est parcouru par un courant d'intensité I.

Une tranche de solénoïde de longueur dz est équivalente à une bobine peu épaisse d'épaisseur dz et contenant dN spires : dN = ndz.

Elle produit en M un champ magnétique dirigé selon Oz et donné par :

$$\overrightarrow{dB}(M)=\frac{\mu_0 I}{2R}\sin^3\alpha dN\overrightarrow{e_z}=\frac{\mu_0 IR^2}{2\left(R^2+z^2\right)^{3/2}}dN\overrightarrow{e_z}$$

En utilisant l'angle α :

$$\tan\alpha=\frac{R}{z}\quad\Rightarrow\quad z=R\cot an\alpha\quad\Rightarrow\quad dz=-\frac{R}{\sin^2\alpha}d\alpha$$

$$\overrightarrow{dB}(M)=\frac{\mu_0 I}{2R}\sin^3\alpha dN\overrightarrow{e_z}$$

$$=\frac{\mu_0 nI}{2R}\sin^3\alpha\left(-\frac{R}{\sin^2\alpha}d\alpha\right)\overrightarrow{e_z}$$

$$=-\frac{\mu_0 nI}{2}\sin\alpha d\alpha\overrightarrow{e_z}$$

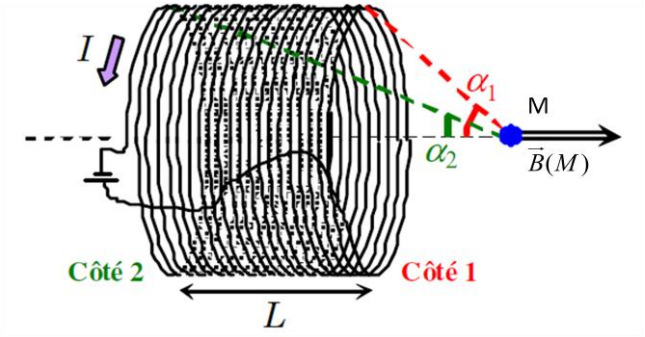
On intègre alors α de α_1 à α_2 :

$$\overrightarrow{B}(M)=-\frac{\mu_0 nI}{2}\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\sin\alpha d\alpha\overrightarrow{e_z}$$

$$=\frac{\mu_0 nI}{2}\left(\cos\alpha_2-\cos\alpha_1\right)\overrightarrow{e_z}$$

Pour le solénoïde infini, α_1 tend vers π et α_2 tend vers 0 d'où :

$$\overrightarrow{B}=\mu_0 nI\overrightarrow{e_z}$$

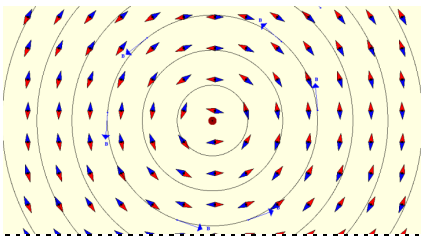


2.5 Propriétés du champ magnétique

2.5.1 Flux du champ magnétique

Exemple : Fil rectiligne illimité de direction Oz (voir 2.3.4.1 et 2.4.3.1)

- Les lignes de champ sont dirigées selon $\overrightarrow{e_\theta}$ et forment des cercles autour du fil.
- Les tubes de champ forment des anneaux s'appuyant sur des surfaces fermées autour du fil.



Il y a symétrie de révolution autour de l'axe Oz, donc le flux élémentaire dϕ du champ magnétique est le même à travers toute section dS d'un tube de champ élémentaire :

$$d\phi = \vec{B} \cdot \overrightarrow{dS}$$

Donc à travers la surface fermée que constitue une portion de tube de champ, le flux entrant est égal au flux sortant. Le flux sortant du champ magnétique à travers S fermée est nul.

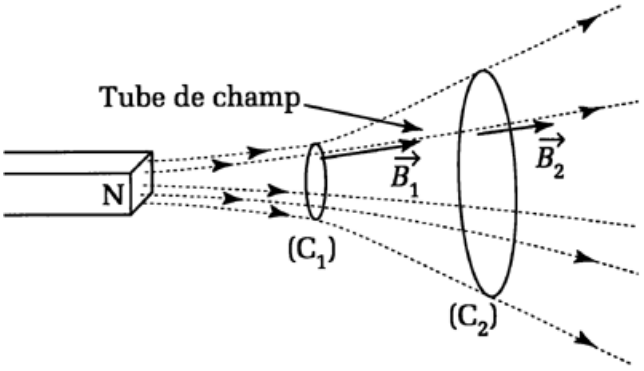
Propriété :
Le flux du champ magnétique à travers une surface fermée est nul. On dit que le champ magnétique est à **flux conservatif**.

$$\phi = \oiint_S \vec{B} \cdot \overrightarrow{dS} = 0 \qquad (10)$$

Avec : ϕ = Flux du champ magnétique en Wb (Weber) (1Wb = 1 T.m^2)
$\vec{B}$ = Champ magnétique en T

Sens physique :
Cette propriété du champ magnétique est liée au fait qu'il n'a pas de sources formées de « charges magnétiques » (Analogie avec le théorème de Gauss).

Conséquence :
Le flux du champ magnétique garde la même valeur à travers toutes les sections d'un même tube de champ. Il s'évase en se dirigeant vers les champs faibles.



Formulation locale : **Equation de Maxwell-Thomson** (ou Maxwell-flux)
D'après le théorème de Green-Ostrogradsky, on a :

$$div\vec{B} = 0 \qquad (11)$$

Avec : $\vec{B}$ = Champ magnétique en T

2.5.2 Potentiel-vecteur A

2.5.2.1 Définition

On introduit un nouvel opérateur, appelé rotationnel (défini en annexe), tel qu'en coordonnées cartésiennes :

$$\overrightarrow{rot}\vec{A}=\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\vec{e_x}+\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\vec{e_y}+\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\vec{e_z}$$

Calculons la divergence de cet opérateur :

$$\begin{aligned} div\left(\overrightarrow{rot}\vec{A}\right) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right) \\ &= \frac{\partial A_z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial A_z}{\partial y\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial z\partial x}-\frac{\partial A_y}{\partial x\partial z}+\frac{\partial A_x}{\partial y\partial z}-\frac{\partial A_x}{\partial z\partial y} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Réciproquement, lorsqu'un champ présente en tout point une divergence nulle, il existe un champ vectoriel dont il est le rotationnel.

Définition :

L'équation de Maxwell-Thomson implique l'existence d'un **potentiel vecteur**, noté $\vec{A}(M)$ et définit par :

$$\vec{B}=\overrightarrow{rot}\left(\vec{A}\right) \quad (12)$$

Avec : $\vec{B}$ = Champ magnétique en T

$\vec{A}$ = Potentiel vecteur en en Wb.m^{-1}

Remarque :

Le potentiel vecteur n'est pas unique ; lui ajouter le gradient de n'importe quel champ scalaire ne change pas la valeur du champ magnétique correspondant. Soit :

$$\overrightarrow{A'}=\vec{A}+\overrightarrow{grad}\,f$$

$$\overrightarrow{rot}\vec{A'}=\overrightarrow{rot}\left(\vec{A}+\overrightarrow{grad}\,f\right)=\overrightarrow{rot}\vec{A} \quad car \quad \overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{grad}\,f\right)=\vec{0}$$

$$\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{grad}\,f\right)=\left(\frac{\partial f}{\partial y\partial z}-\frac{\partial f}{\partial z\partial y}\right)\vec{e_x}+\left(\frac{\partial f}{\partial z\partial x}-\frac{\partial f}{\partial x\partial z}\right)\vec{e_y}+\left(\frac{\partial f}{\partial x\partial y}-\frac{\partial f}{\partial y\partial x}\right)\vec{e_z}=\vec{0}$$

2.5.2.2 Relation intégrale

Le théorème de Stokes s'énonce sous la forme :

Théorème de Stokes :

Soit une surface ouverte S s'appuyant sur un contour fermé C dans une région de l'espace V où est défini un champ de vecteur $\vec{A}$.

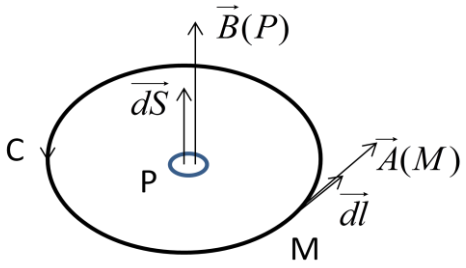
$$\oint_C \vec{A}\cdot\vec{dl}=\iint_S \overrightarrow{rot}\vec{A}\cdot\vec{dS}$$

D'après ce théorème, on peut donc relier champ magnétique et potentiel vecteur sous une relation intégrale :

$$\oint_C \vec{A}\cdot\vec{dl} = \iint_S \vec{B}\cdot\vec{dS} \qquad (13)$$

Avec : $\vec{A}$ = Potentiel vecteur en en Wb.m^{-1}

$\vec{B}$ = Champ magnétique en T



2.5.2.3 Symétries et antisymétries

La présence d'un produit vectoriel dans la relation définissant le rotationnel montre que les symétries du champ magnétique sont des antisymétries pour le potentiel vecteur et vice versa.

Le potentiel vecteur présente donc les mêmes symétries que la distribution de courant.

Exemple : Fil rectiligne infini

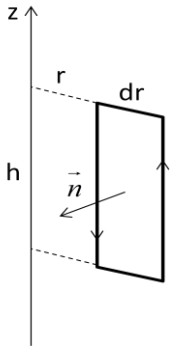
On a démontré en 2.4.3.1 que le champ magnétique généré par ce fil d'axe Oz se mettait sous la forme :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\vec{e_\theta}$$

Le potentiel vecteur ayant les mêmes symétries que la distribution de courant (voir 2.3.4.1), il s'écrit sous la forme :

$$\vec{A} = A(r)\vec{e_z}$$

On peut alors déterminer le potentiel vecteur en utilisant la formule du rotationnel en coordonnées cylindriques ou ne utilisant la relation intégrale sur le contour représenté ci-dessous :



La circulation du potentiel vecteur s'écrit :

$$\oint_C \vec{A}\cdot\vec{dl} = \oint_C A(r)\vec{e_z}\cdot\vec{dl} = A(r+dr)h - A(r)h$$

Le flux du champ magnétique s'écrit :

$$\iint_S \vec{B}\cdot\vec{dS} = \iint_S B(r)\vec{e_\theta}\cdot\vec{dS} = -B(r)hdr$$

On a alors :

$$\frac{dA(r)}{dr} = -B(r)$$

En posant arbitrairement, une constante d'intégration pour laquelle le potentiel vecteur est nul égale à $\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln(R)$:

$$\vec{A} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln(\frac{r}{R})\vec{e_z}$$

2.6 Théorème d'Ampère

2.6.1 Circulation du champ magnétique

Exemple : Fil rectiligne illimité de direction Oz

On a démontré en 2.4.3.1 que le champ magnétique généré par ce fil se mettait sous la forme :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\vec{e_\theta}$$

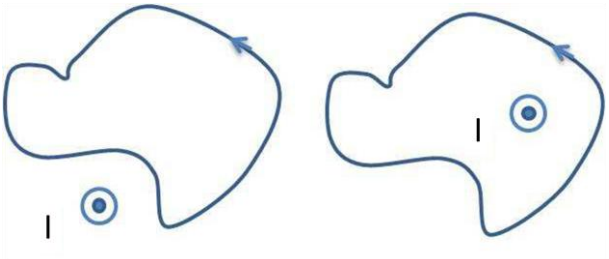
La circulation du champ magnétique sur un circuit fermé Γ est donnée par l'expression suivante :

$$C = \oint_\Gamma \vec{B}\cdot\vec{dl}$$

$$= \oint_\Gamma \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\vec{e_\theta}\cdot\left(dr\vec{e_r} + rd\theta\vec{e_\theta} + dz\vec{e_z}\right)$$

$$= \oint_\Gamma \frac{\mu_0 I}{2\pi r} rd\theta$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi}\oint_\Gamma d\theta$$



On peut distinguer deux cas :

- Le circuit n'entoure pas le fil : $\oint_\Gamma d\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad C = 0$
- Le circuit entoure le fil : $\oint_\Gamma d\theta = 2\pi \quad \Rightarrow \quad C = \mu_0 I$

2.6.2 Théorème d'Ampère

Théorème d'Ampère :

La circulation du champ magnétostatique créé par un ensemble de courants sur un contour orienté est égale à la somme des courants enlacés multipliée par μ_0 :

$$C = \oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot \vec{dl} = \mu_0 I_{int} \quad (14)$$

Avec : C = Circulation du champ B le long de Γ

$\vec{B}$ = Champ magnétique en T

μ_0 = Perméabilité du vide ($4\pi 10^{-7}$ H.m^{-1})

I_{int} = Somme algébrique de toutes les intensités intérieures à Γ (ou enlacées par Γ)
Intensité comptée positivement si elles traversent Γ dans le sens positif

2.6.3 Formulation locale

Equation de Maxwell-Ampère :

La formulation locale du théorème d'Ampère se met sous la forme de l'équation de Maxwell-Ampère :

$$\overrightarrow{rot}\vec{B} = \mu_0 \vec{j} \quad (15)$$

Avec : $\vec{B}$ = Champ magnétique en T

μ_0 = Perméabilité du vide ($4\pi 10^{-7}$ H.m^{-1})

j = Densité volumique de courant en A.m^{-2}

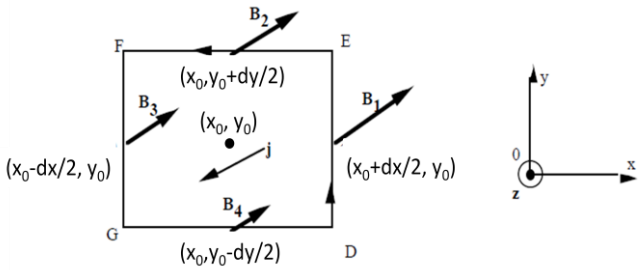
Démonstration :

Considérons dans le plan x0y un circuit rectangulaire DEFG centré autour du point de composantes (x_0,y_0). Les côtés du rectangle sont dx et dy.

Le champ magnétique est noté B_1, B_2, B_3, B_4 sur les branches DE, EF, FG, GH du circuit.

Un courant, de densité de courant j, traverse ce cadre. Le vecteur $\vec{j}$ a comme composante j_x, j_y, j_z.

Imposons un sens positif au circuit DEFG. Telle qu'est fixée l'orientation du circuit, le vecteur surface $\vec{dS} = dxdy\vec{e_z}$ est dirigé vers les z positifs.



L'intensité de courant traversant le cadre est égale à :

$$dI = \vec{j} \cdot \vec{dS} = j_z dxdy$$

D'après le théorème d'Ampère :

$$\vec{B_1} \cdot \vec{DE} + \vec{B_2} \cdot \vec{EF} + \vec{B_3} \cdot \vec{FG} + \vec{B_4} \cdot \vec{GD} = \mu_0 j_z dxdy$$

$$\overrightarrow{B_1}\cdot\overrightarrow{DE} = B_y\left(x_0 + a/2, y_0\right)dy$$
$$\overrightarrow{B_3}\cdot\overrightarrow{FG} = -B_y\left(x_0 - a/2, y_0\right)dy$$

Par un développement de Taylor (a étant un infiniment petit) :

$$B_y\left(x_0 + dy/2, y_0\right) = B_y\left(x_0, y_0\right) + \frac{dy}{2}\frac{\partial B_y}{\partial x}\left(x_0, y_0\right)$$
$$B_y\left(x_0 - dy/2, y_0\right) = B_y\left(x_0, y_0\right) - \frac{dy}{2}\frac{\partial B_y}{\partial x}\left(x_0, y_0\right)$$

On a alors :

$$\overrightarrow{B_1}\cdot\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{B_3}\cdot\overrightarrow{FG} = dxdy\frac{\partial B_y}{\partial x}\left(x_0, y_0\right)$$

Par le même raisonnement sur EF et GD, on obtient :

$$\overrightarrow{B_2}\cdot\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{B_4}\cdot\overrightarrow{GD} = -dxdy\frac{\partial B_x}{\partial y}\left(x_0, y_0\right)$$

On a donc finalement sur l'ensemble du contour fermé :

$$dxdy\frac{\partial B_y}{\partial x}\left(x_0, y_0\right) - dxdy\frac{\partial B_x}{\partial y}\left(x_0, y_0\right) = \mu_0 j_z dxdy$$
$$\mu_0 j_z = \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y}\right)$$

On reconnait la formule du rotationnel projeté sur Oz.

Remarque :

En partant de la formulation intégrale du théorème d'Ampère, on a alors (en utilisant le théorème de Stokes) :

$$\oint_\Gamma \overrightarrow{B}\cdot\overrightarrow{dl} = \iint_S \overrightarrow{rot}\overrightarrow{B}\cdot\overrightarrow{dS} = \mu_0 I_{\text{int}} = \mu_0 \iint \vec{j}\cdot\overrightarrow{dS}$$

On retrouve la formulation de l'équation de Maxwell-Ampère :

$$\overrightarrow{rot}\overrightarrow{B} = \mu_0\vec{j}$$

2.6.4 Exemples de calcul de champs magnétiques

Méthode de résolution :

1- Rechercher les symétries et invariances.
2- Choisir le contour fermé d'Ampère
3- Calcul du champ magnétostatique

2.6.4.1 Courants filiformes

2.6.4.1.1 Champ d'un fil rectiligne illimité parcouru par un courant I

1- Recherche des symétries et invariances (voir 2.3.4.1)

Le fil est confondu avec l'axe Oz :

- Le plan contenant le fil et le point M est plan de symétrie de la distribution de courant

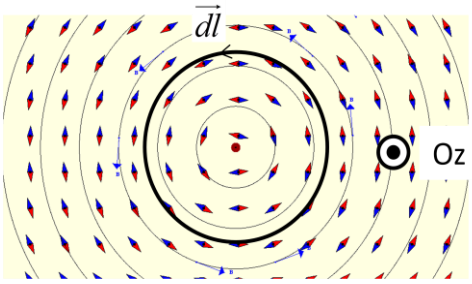
- Le plan perpendiculaire au fil et contenant le point M est plan d'antisymétrie de la distribution de courant.

La distribution de courants étant invariante par translation selon z et rotation selon θ, on a :

$$\vec{B} = B_\theta(r)\vec{e_\theta}$$

2- Choix du contour d'Ampère

On choisit un cercle d'axe Oz et de rayon r parcouru dans le sens trigonométrique.



3- Calcul du champ B

$$C = \oint_\Gamma \vec{B}\cdot\vec{dl} = \oint_\Gamma B(r)\vec{e_\theta}\cdot rd\theta\vec{e_\theta} = B(r)\int_0^{2\pi} rd\theta = 2\pi rB(r)$$

$$I_{\text{int}} = +I$$

D'après le théorème d'Ampère :

$$2\pi rB(r) = \mu_0 I \quad \Rightarrow \quad \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\vec{e_\theta}$$

2.6.4.1.2 Champ en tout point intérieur d'un solénoïde infiniment long

1- Recherche des symétries et invariances (voir 2.3.4.3)

Le solénoïde a pour axe l'axe Oz :

- Le plan contenant l'axe Oz et le point M est plan d'antisymétrie de la distribution de courant

- Le plan perpendiculaire à l'axe Oz et contenant le point M est plan de symétrie de la distribution de courant.

La distribution de courants étant invariante par translation selon z et rotation selon θ, on a :

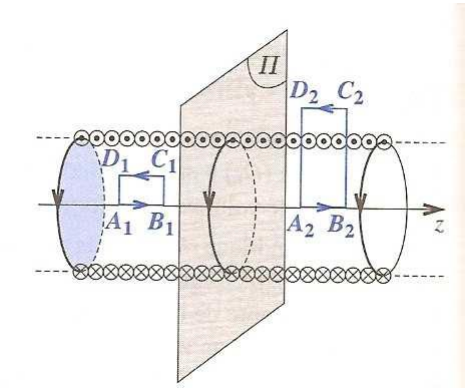
$$\vec{B} = B_z(r)\vec{e_z}$$

Nous avons démontré en 2.4.3.3 que le champ créé par un solénoïde infini de rayon R et constitué d'un enroulement de n spires par unité de longueur sur son axe Oz est :

$$\vec{B} = \mu_0 nI\vec{e_z}$$

2- Choix du contour d'Ampère

Le contour d'Ampère permettant de déterminer l'expression du champ magnétique est un cadre ABCD dont un des côtés est placé sur l'axe Oz, de longueur l selon Oz.



3- Calcul du champ B

La circulation sur les contours BC et DA est nulle car le champ magnétique est perpendiculaire du déplacement.

$$C = \oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot \vec{dl} = \oint_{\Gamma} B_z(r)\vec{e_z} \cdot dz\vec{e_z} = B_z(r=0)\int_A^B dz - B_z(r)\int_C^D dz = l\left(B_z(r=0) - B_z(r)\right)$$

$$C = l\left(\mu_0 nI - B_z(r)\right)$$

Pour déterminer les courants enlacés par le contour d'Ampère, on distingue deux cas :

- r < R : le cadre est à l'intérieur du solénoïde ($A_1B_1C_1D_1$).

Il n'y a pas de courants enlacés et la circulation C est donc nulle. D'après le théorème d'Ampère, en tout point intérieur au solénoïde :

$$\mu_0 nI - B_z(r) = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{B} = \mu_0 nI\vec{e_z}$$

- r > R : le cadre chevauche le solénoïde ($A_2B_2C_2D_2$).

$$I_{\text{int}} = \int_0^l nIdz = nIl$$

D'après le théorème d'Ampère, en tout point extérieur au solénoïde :

$$l\left(\mu_0 nI - B_z(r)\right) = \mu_0 nIl \quad \Rightarrow \quad \vec{B} = \vec{0}$$

2.6.4.2 Courants non filiformes

2.6.4.2.1 Cylindre parcouru par un courant volumique

Un cylindre infini de rayon R et d'axe Oz est parcouru par une un courant volumique $\vec{j} = j_z\vec{e_z}$ ($j_z > 0$ et $I = j_z\pi R^2$). On cherche à déterminer le champ magnétique en tout point.

1- Recherche des symétries et invariances

Le cylindre est d'axe Oz :

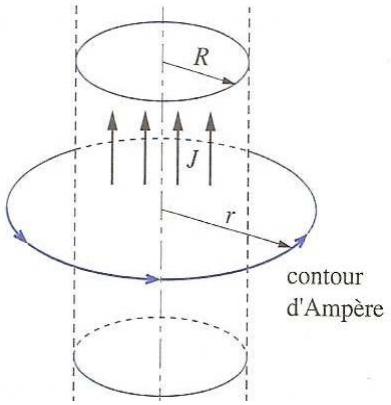
- Le plan contenant l'axe Oz et le point M est plan de symétrie de la distribution de courant
- Le plan perpendiculaire à l'axe Oz et contenant le point M est plan d'antisymétrie de la distribution de courant.

La distribution de courants étant invariante par translation selon z et rotation selon θ, on a :

$$\vec{B} = B_\theta(r)\vec{e_\theta}$$

2- Choix du contour d'Ampère

On choisit un cercle d'axe Oz et de rayon r parcouru dans le sens trigonométrique.



3- Calcul du champ B

$$C = \oint_\Gamma \vec{B}\cdot\vec{dl} = \oint_\Gamma B(r)\vec{e_\theta}\cdot rd\theta\vec{e_\theta} = B(r)\int_0^{2\pi} rd\theta = 2\pi rB(r)$$

Pour déterminer les courants enlacés par le contour d'Ampère, on distingue deux cas :

- r > R : le courant enlacé par le contour ne dépend pas de r.

$$I_{\text{int}} = \iint \vec{j}\cdot\vec{dS} = j_z\pi R^2$$

D'après le théorème d'Ampère :

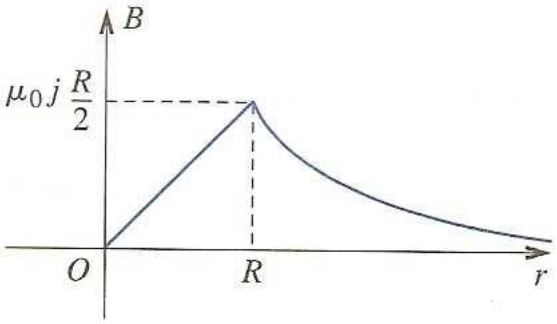
$$2\pi rB(r) = \mu_0 j_z \pi R^2 \quad \Rightarrow \quad \vec{B} = \frac{\mu_0 j_z R^2}{2r}\vec{e_\theta}$$

- r < R : le courant enlacé par le contour dépend de r.

$$I_{\text{int}} = \iint \vec{j}\cdot\vec{dS} = \int_0^r\int_0^{2\pi} j_z\vec{e_z}\cdot rdrd\theta\vec{e_z} = j_z\pi r^2$$

D'après le théorème d'Ampère :

$$2\pi rB(r) = \mu_0 j_z \pi r^2 \quad \Rightarrow \quad \vec{B} = \frac{\mu_0 j_z r}{2}\vec{e_\theta}$$



2.6.4.2.2 Cylindre parcouru par un courant surfacique

On peut envisager le cas où le courant ne circule pas en volume mais à la surface du cylindre de rayon R. On définit alors la densité de courant surfacique $\vec{j_s} = j_{s,z}\vec{e_z}$. On a alors I = 2πRj$_{s,z}$. On a les mêmes symétries et invariances que précédemment et la même circulation du champ B s'appuyant sur le même contour.

Pour déterminer les courants enlacés par le contour d'Ampère, on distingue deux cas :

- r > R : le courant enlacé par le contour ne dépend pas de r.

$$I_{\text{int}} = \int \vec{j_s} \cdot \vec{dl} = \int_0^{2\pi} j_{s,z} \vec{e_z} \cdot R d\theta \vec{e_z} = j_{s,z} 2\pi R$$

D'après le théorème d'Ampère :

$$2\pi r B(r) = \mu_0 j_{s,z} 2\pi R \quad \Rightarrow \quad \vec{B} = \frac{\mu_0 j_{s,z} R}{r} \vec{e_\theta}$$

- r < R : le courant enlacé par le contour est nul.

$$I_{\text{int}} = 0$$

D'après le théorème d'Ampère :

$$\vec{B} = \vec{0}$$

On peut noter la discontinuité du champ magnétique à la traversée d'une densité surfacique de courant.

2.6.4.2.3 Nappe parcourue par un courant volumique

On cherche à déterminer le champ magnétique créé par une plaque d'épaisseur e parcourue par une densité volumique de courant $\vec{j} = j_x \vec{e_x}$. Les densités de courants sont uniformes et orientées selon $\vec{e_x}$.

1- Recherche des symétries et invariances

La plaque d'épaisseur e, infinie selon Ox et Oy, est délimitée par les plans z = e/2 et z = −e/2 :

- Tous les plans parallèles à Oxz sont des plans de symétries de la distribution de courant.
- Tous les plans parallèles à Oyz sont des plans d'antisymétrie de la distribution de courant.

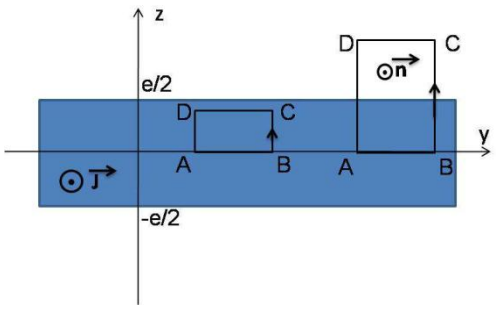
La distribution de courants étant invariante par translation selon x et y, on a :

$$\vec{B} = B_y(z) \vec{e_y}$$

Au point M'(x, y,−z), symétrique du point M(x, y, z) par rapport au plan de symétrie Oxy, le champ magnétique est l'opposé du symétrique du champ magnétique au point M : la fonction $B_y(z)$ est impaire.

2- Choix du contour d'Ampère

Le champ étant nul en z = 0, on choisit comme contour d'Ampère un rectangle ABCD de hauteur z et de longueur l contenu dans le plan Oyz.



3- Calcul du champ B

La circulation du champ magnétique sur les côtés BC et DA est nulle car le champ magnétique est perpendiculaire à ces deux côtés. La circulation sur AB est également nulle puisque le champ magnétique est nul sur AB. Finalement, on obtient pour z > 0 :

$$C = \oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot \vec{dl} = \oint_{\Gamma} B_y(z)\vec{e_y} \cdot dy\vec{e_y} = B_y(z)\int_C^D dy = -LB_y(z)$$

Pour déterminer les courants enlacés par le contour d'Ampère, on distingue deux cas :

- La hauteur z du cadre est supérieure à la demi épaisseur de la plaque (z > e/2)

$$I_{\text{int}} = \iint \vec{j} \cdot \vec{dS} = \int_0^L \int_0^{e/2} j_x \vec{e_x} \cdot dydz\vec{e_x} = j_x \frac{Le}{2}$$

D'après le théorème d'Ampère :

$$-B_y(z)L = \mu_0 j_x \frac{Le}{2} \quad \Rightarrow \quad \vec{B} = -\frac{\mu_0 j_x e}{2}\vec{e_y}$$

- La hauteur z du cadre est inférieur à la demi épaisseur de la plaque (0 < z < e/2)

$$I_{\text{int}} = \iint \vec{j} \cdot \vec{dS} = \int_0^L \int_0^z j_x \vec{e_x} \cdot dydz\vec{e_x} = j_x Lz$$

D'après le théorème d'Ampère :

$$-B_y(z)L = \mu_0 j_x Lz \quad \Rightarrow \quad \vec{B} = -\mu_0 j_x z\vec{e_y}$$

La fonction étant impaire, on obtient finalement :

$$\begin{cases} \vec{B} = -\mu_0 j_x z\vec{e_y} & si \quad |z| < e/2 \\ \vec{B} = -\frac{\mu_0 j_x e}{2} signe(z)\vec{e_y} & si \quad |z| > e/2 \end{cases}$$

2.7 Relations de passage

2.7.1 Composante tangentielle du champ magnétique

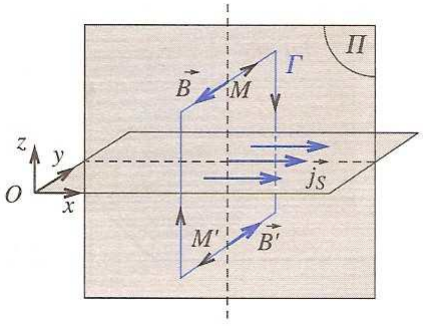
La composante tangentielle du champ magnétique présente une discontinuité en présence d'une densité surfacique de courant $\vec{j_s}$. Cette discontinuité est égale à $\mu_0 j_s$.

Exemple : Nappe de courant parcourue par un courant surfacique

On peut envisager le cas où le courant ne circule pas en volume (voir 2.6.4.2.3) mais à la surface de la nappe. On définit alors la densité de courant surfacique $\vec{j_s} = j_{s,x}\vec{e_x}$. On a les mêmes symétries et invariances que précédemment.

2- Choix du contour d'Ampère

Le champ étant nul en z = 0, on choisit comme contour d'Ampère un rectangle ABCD de hauteur 2z à cheval sur la surface contenu dans le plan Oyz. Les côtés AB et CD ont pour côtes −z et z.



3- Calcul du champ B

La circulation du champ magnétique sur les côtés BC et DA est nulle car le champ magnétique est

perpendiculaire à ces deux côtés. Finalement, on obtient pour z >0 :

$$C = \oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot \vec{dl} = \oint_{\Gamma} B_y(z)\vec{e_y} \cdot dy\vec{e_y} = B_y(z)\int_A^B dy - B_y(-z)\int_C^D dy = 2LB_y(z)$$

$$I_{\text{int}} = \int \vec{j_s} \cdot \vec{dl} = -\int_A^B j_{s,x}\vec{e_x} \cdot dy\vec{e_x} = -Lj_{s,x}$$

D'après le théorème d'Ampère :

$$2B_y(z)L = -\mu_0 j_{s,x} L \quad \Rightarrow \quad \vec{B} = -\frac{\mu_0 j_{s,x}}{2}\vec{e_y}$$

La fonction étant impaire, on obtient finalement :

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0 j_{s,x}}{2} signe(z)\vec{e_y}$$

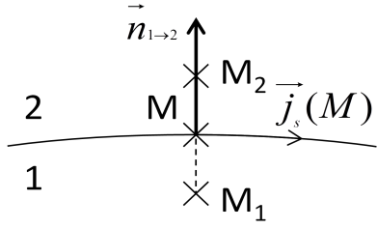
Le champ magnétique est discontinu au passage de la surface parcourue par le courant surfacique $\vec{j_s}$ La discontinuité vaut $\mu_0 \left\| \vec{j_s} \right\| \vec{e_y}$.

2.7.2 Composante normale du champ magnétique

La composante normale du champ magnétique reste continue à la traversée d'une surface.

2.7.3 Formulation vectorielle

Il est possible de réunir les deux résultats ci-dessus en une seule écriture vectorielle. On considère une interface entre deux demi-espaces indicés 1 et 2 et l'on note $\vec{n}_{1\to2}$ la normale en un point M de cette surface, orientée du milieu 1 vers le milieu 2. On définit deux points M_1 et M_2 dans chaque demi-espace au voisinage du point M.



Soit $\vec{j_s}(M)$ la densité surfacique de courants au point M, la relation suivante résume la relation de passage du champ magnétique à la traversée de la surface :

$$\vec{B}(M_2) - \vec{B}(M_1) = \mu_0 \vec{j_s}(M) \wedge \vec{n}_{1\to2} \qquad (16)$$

Avec : $\vec{B}$ = Champ magnétique en T

μ_0 = Perméabilité du vide ($4\pi 10^{-7}$ H.m^{-1})

j_s = Densité surfacique de courant en A.m^{-1}

$\vec{n}_{1\to2}$ = Normale à la surface orientée du milieu 1 vers le milieu 2

A retenir et savoir faire :

- Connaître l'expression de la force de Lorentz
- Savoir expliquer le phénomène d'effet hall et faire les calculs qui y sont liés.
- Savoir faire une étude de symétries pour limiter les calculs
- Connaître l'expression de la capacité d'un condensateur plan et celle de la densité volumique d'énergie électrostatique.
- Savoir exprimer les différentes distributions de courant.
- Savoir faire l'étude des invariances et symétries d'une distribution de courant.
- Connaître et savoir appliquer l'expression de la loi de Biot et Savart pour les circuits fermés filiformes.
- Savoir refaire tous les exemples de cours (fil rectiligne illimité, spire circulaire, solénoïde).
- Connaître les propriétés du champ magnétique.
- Connaître les liens (local et intégral) entre le champ magnétique et le potentiel vecteur.
- Connaître et savoir appliquer le théorème d'Ampère et connaître sa formulation locale.
- Savoir refaire le calcul du champ magnétique créé par un solénoïde infini.
- Connaître les relations de passage du champ magnétique.

2.8 Exercices d'application

2.8.1 Trajectoire d'une particule

Une particule de charge électrique q et de masse m pénètre à l'instant t = 0 en O (x = y = z = 0) avec une vitesse v_0 dans une région où règnent un champ électrique uniforme E et un champ magnétique uniforme B parallèles, dirigés suivant l'axe Oy d'un référentiel Oxyz rectangulaire.
La vitesse v_0 est dans le plan yOz et fait l'angle α avec les champs E et B. On introduira le paramètre

$$\omega = \frac{qB}{m}$$

a) Déterminer les composantes v_x, v_y et v_z de la vitesse v de la particule à l'instant t en intégrant les équations différentielles du mouvement.
b) Déterminer les équations paramétriques du mouvement de la particule et définir sa trajectoire.
c) On supprime le champ électrique. Définir la nouvelle trajectoire de la particule.

2.8.2 Effet Hall

Un ruban d'argent de largeur a = 1 cm, d'épaisseur e = 0,1 mm, est parcouru par un courant I = 15 A ; les lignes de courant sont parallèles à la longueur (supposée infinie). Ce ruban est placé dans un champ magnétique uniforme B = 2 T, normal au plan de ce ruban.
a) En régime permanent, on constate l'existence d'une d.d.p. V_H entre les deux bords du ruban distants de a. Expliquer ce phénomène.
b) On mesure V_H = 25,2 µV. En déduire :

- La vitesse de déplacement des électrons en régime permanent,
- Le nombre n d'électrons libres par unité de volume, et le comparer au nombre n' d'atomes d'argent par unité de volume du ruban.

On donne : M_{Ag} = 108 g.mol^{-1} ; masse volumique de l'argent : µ = 10,5 g/cm^3 ; charge élémentaire e = - 1,6.10^{-19} C ; nombre d'Avogadro N_A = 6,02.10^{23} mol^{-1}

2.8.3 Bobines "façon Helmholtz"

Une "spire" rectangulaire de centre O, comportant N tours de fil, est parcourue par un courant I.
Sa longueur 2L' selon l'axe (Oz) est très supérieure à sa largeur 2L selon l'axe (Oy), de telle sorte qu'on peut la modéliser par une paire de fils rectilignes "infinis" parcourus par des courants de sens contraires.
a) D'après les symétries, déterminer l'orientation du champ magnétique en un point M de l'axe (Ox).
b) Calculer (algébriquement) le champ magnétique B(x) en M. Tracer la courbe représentative de B(x).
c) En déduire qu'en associant deux spires identiques, de même axe, dont les centres sont à une distance D l'un de l'autre, judicieusement choisie, on obtient un champ pratiquement uniforme dans une région de l'espace à préciser.

On considère un assemblage de deux spires, à la distance D déterminée précédemment.
d) D'après les symétries, déterminer l'orientation du champ magnétique en un point M de l'axe (Oy).
e) Calculer (algébriquement) le champ magnétique B(y) en M. Tracer la courbe représentative de B(y). Commenter.

2.8.4 Potentiels vecteurs d'un champ uniforme

On considère le champ magnétostatique uniforme :

$$\vec{B} = B_0 \vec{u_z}$$

a) Proposer un potentiel vecteur A, cherché sous la forme :

$$\vec{A} = A(y)\vec{u_x}$$

A(y) est une fonction de la seule ordonnée y, que l'on pourra imposer nulle à l'origine de l'espace.

b) Faire de même pour :

$$\vec{A'} = A'(x)\vec{u_y}$$

c) Vérifier que A'-A peut être écrit comme le gradient d'un champ scalaire f(M).

2.9 Exercices

2.9.1 Cyclotron

Un cyclotron comporte deux demi-boîtes cylindriques métalliques creuses ou « D », séparées par un intervalle, entre lesquelles on établit une tension u sinusoïdale de fréquence convenable f. Les « D » sont situés dans l'entrefer d'un électroaimant qui fournit un champ magnétique B uniforme parallèle aux génératrices des « D ».

On injecte des protons (m = $1{,}66.10^{-27}$ kg, q = $1{,}60.10^{-19}$ C) dans une direction perpendiculaire à B, avec une vitesse négligeable. On donne B = 1,5 T.

a) Quelle doit être la fréquence f de la tension u pour que le proton soit accéléré (pendant un temps très court) à chaque passage entre les « D » ?

b) La tension atteint sa valeur maximale U = 200 kV.

- Déterminer en fonction de n le rapport des rayons des deux demi-cercles consécutifs numérotés n et n + 1, si le premier demi-cercle décrit après la première accélération porte le numéro 1.
- Calculer le rayon de la trajectoire après 1 tour (2 passages entre les D) et après 10 tours.

c) Le rayon de la dernière trajectoire décrite par les protons accélérés avant de bombarder une cible est R_m = 35 cm ; déterminer :

- L'énergie cinétique du proton avant le choc,
- Le nombre de tours décrits par le proton après sa première accélération.

2.9.2 Expérience de Rowland

Un condensateur est constitué de deux disques métalliques de rayon R, très proches l'un de l'autre.0 Si on impose une différence de potentiel U entre ces disques des charges électriques surfaciques apparaissent sur les faces métalliques en regard. On admet que la charge sur le disque positif est uniformément répartie, avec une densité surfacique σ. Le disque positif, de centre O, est mis ne rotation autour de l'axe (Oz).

a) Calculer le champ magnétique en un point M de l'axe (Oz). En quel point ce champ est-il maximal ? On repèrera M par l'angle α.

b) U = 100kV, R = 10 cm et e = 0,5 mm, et la vitesse de rotation est de 6000 tours par minute. Calculer la valeur maximale du champ magnétique. Comparer cette valeur à celle du champ magnétique terrestre (≈10^{-5} T).

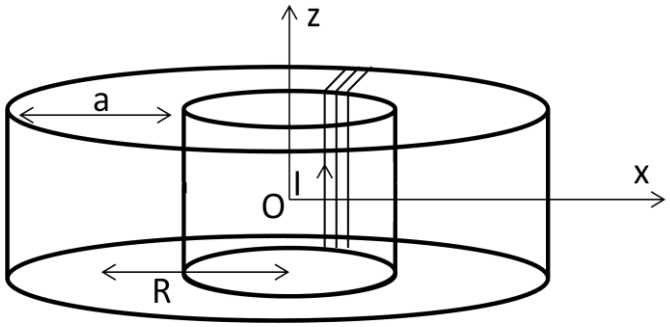
2.9.3 Segment de courant

a) Calculer le champ crée en un point M distant de d.

b) En déduire le champ crée par une spire carré, de côté a de centre O et d'axe Oz en un point de son axe.

2.9.4 Tore circulaire

On veut étudier le champ magnétique créé par une distribution de courants présente sur un tore circulaire de rayon R à la section carré de côté a. On note O le centre du tore et (Oz) son axe de révolution. La distribution de courants est constituée par un enroulement d'un grand nombre de N spires jointives enroulées sur toute la surface du tore, le sens du courant étant donnée sur la figure. On négligera l'épaisseur des fils. Soit M un point quelconque de l'espace où l'on cherche le champ magnétique crée par cette distribution, déterminer l'expression de B en un point quelconque de l'intérieur et de l'extérieur du tore.



2.9.5 Champ crée par un faisceau cylindrique d'électrons

Un faisceau électronique a la forme d'un cylindre très long de rayon R et d'axe Oz. Les électrons ont tous la même vitesse $\vec{v} = v\vec{e_z}$ et ils sont uniformément répartis avec une densité de n électrons par unité de volume.

a) En adoptant un modèle volumique, calculer la densité volumique de charge et le vecteur densité volumique de courant $\vec{j}$.

b) Calculer le champ électrique $\vec{E}(M)$ en un point M de coordonnées cylindriques (r, θ, z).

c) Calculer le champ magnétique $\vec{B}(M)$. Quelle relation relie E et B ?

4) Le faisceau peut-il rester cylindrique ?