Cours III :
Mécanique du solide

2 Cinétique des solides

2.1 Résultante cinétique (ou quantité de mouvement)

2.1.1 Définition

Définition :

On appelle **résultante cinétique** $\vec{P}$ d'un solide (S) la somme continue des quantités de mouvement élémentaires des volumes mésoscopiques constituant le solide :

$$\vec{P}_{(R)} = \iiint_\tau \overrightarrow{v(M)}_{(R)}.dm \tag{1}$$

Avec :	P	=	Quantité de mouvement en kg.m.s^{-1}
	τ	=	Volume du solide en m^3
	v(M)	=	Vitesse du point M en m.s^{-1}
	m	=	Masse du solide en kg

Propriété :

On peut aussi écrire la **résultante cinétique** sous la forme :

$$\vec{P}_{(R)} = m.\overrightarrow{v(G)}_{(R)} \tag{2}$$

Avec :	P	=	Quantité de mouvement en kg.m.s^{-1}
	m	=	Masse du solide en kg
	v(G)	=	Vitesse du centre de masse en m.s^{-1}

Démonstration :

$$\begin{aligned}
\vec{P}_{(R)} &= \iiint_\tau \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_{(R)}.dm \\
&= \iiint_\tau \left.\frac{d\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GM}}{dt}\right|_{(R)}.dm \\
&= \left.\frac{d\overrightarrow{OG}}{dt}\right|_{(R)}.\iiint_\tau dm + \iiint_\tau \left.\frac{d\overrightarrow{GM}}{dt}\right|_{(R)}.dm \\
&= m.\overrightarrow{v(G)}_{(R)} + \frac{d}{dt}\underbrace{\left(\iiint_\tau \overrightarrow{GM}.dm\right)}_{=\vec{0}}\Bigg|_{(R)} \\
&= m.\overrightarrow{v(G)}_{(R)}
\end{aligned}$$

2.1.2 Résultante cinétique barycentrique

Propriété :
Dans le référentiel barycentrique (R_G), le centre de masse, G, est immobile par construction :

$$\vec{P}_{(R_G)} = \vec{0}$$

Remarque :

- On obtient une nouvelle définition du référentiel barycentrique : référentiel dans lequel la quantité de mouvement est nulle.

2.2 Moment cinétique

2.2.1 Définition

Définition :
On appelle **moment cinétique** en un point A d'un solide (S) par rapport à un référentiel (R), noté $\overrightarrow{L_{A(R)}}$, la somme continue des moments cinétiques élémentaires en A des volumes mésoscopiques constituant le solide :

$$\overrightarrow{L_{A(R)}} = \iiint_{\tau} \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{v(M)}_{(R)}.dm \quad (3)$$

Avec : L_A = Moment cinétique en A en kg.m².s^{-1} ou J.s
τ = Volume du solide en m^3
v(M) = Vitesse du point M en m.s^{-1}
m = Masse du solide en kg

2.2.2 Formule de changement de point

Propriété :
On peut exprimer le moment cinétique en un point différent de A par la simple relation :

$$\overrightarrow{L_{A'(R)}} = \overrightarrow{L_{A(R)}} + \overrightarrow{A'A} \wedge \overrightarrow{P}_{(R)} \quad (4)$$

Avec : $L_{A'}$ = Moment cinétique en A' en kg.m².s^{-1}
L_A = Moment cinétique en A en kg.m².s^{-1}
P = Quantité de mouvement en kg.m.s^{-1}

Démonstration :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{L_{A'(R)}} &= \iiint_{\tau} \overrightarrow{A'M} \wedge \overrightarrow{v(M)}_{(R)}.dm \\
&= \iiint_{\tau} \left(\overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{AM}\right) \wedge \overrightarrow{v(M)}_{(R)}.dm \\
&= \overrightarrow{A'A} \wedge \iiint_{\tau} \overrightarrow{v(M)}_{(R)}.dm + \iiint_{\tau} \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{v(M)}_{(R)}.dm \\
&= \overrightarrow{A'A} \wedge \overrightarrow{P}_{(R)} + \overrightarrow{L_{A(R)}}
\end{aligned}$$

2.2.3 Moment cinétique barycentrique

Propriété :
Dans le référentiel barycentrique (R_G), le moment cinétique est indépendant du point d'application :

$$\overrightarrow{P}_{(R_G)} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{L}_{A'(R_G)} = \overrightarrow{L}_{A(R_G)} = \overrightarrow{L}_{(R_G)}$$

Remarque :

- Le moment cinétique dans le référentiel barycentrique est une grandeur intrinsèque au système.

2.2.4 Théorème de Koenig

Propriété :
Le théorème de Koenig nous donne une relation entre le moment cinétique d'un solide en un point A par rapport à un référentiel (R) et le moment cinétique barycentrique :

$$\overrightarrow{L}_{A(R)} = \overrightarrow{L}_{(R_G)} + \overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{P}_{(R)} \qquad (5)$$

Avec : L_A = Moment cinétique en A en kg.m².s^{-1}
L = Moment cinétique barycentrique en kg.m².s^{-1}
P = Quantité de mouvement en kg.m.s^{-1}

Démonstration :

$$\overrightarrow{L}_{A(R)} = \iiint_\tau \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{v(M)}_{(R)}.dm$$

$$= \iiint_\tau \overrightarrow{AM} \wedge \left(\overrightarrow{v(M)}_{(R_G)} + \overrightarrow{v(G)}_{(R)} + \overrightarrow{MG} \wedge \underbrace{\overrightarrow{\Omega}_{(R_G/R)}}_{=\vec{0}} \right).dm$$

$$= \iiint_\tau \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{v(M)}_{(R_G)}.dm + \iiint_\tau \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{v(G)}_{(R)}.dm$$

$$= \overrightarrow{L}_{A(R_G)} + \iiint_\tau \left(\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GM} \right) \wedge \overrightarrow{v(G)}_{(R)}.dm$$

$$= \overrightarrow{L}_{(R_G)} + \overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{v(G)}_{(R)} \iiint_\tau dm + \underbrace{\iiint_\tau \overrightarrow{GM}.dm}_{=\vec{0}} \wedge \overrightarrow{v(G)}_{(R)}$$

$$= \overrightarrow{L}_{(R_G)} + \overrightarrow{AG} \wedge m\overrightarrow{v(G)}_{(R)}$$

$$= \overrightarrow{L}_{(R_G)} + \overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{P}_{(R)}$$

Remarque :

- Cette relation permet de séparer le mouvement en deux : d'abord la contribution dû au mouvement d'ensemble (translation de (R_G) par rapport à (R)), puis la contribution dû au mouvement propre (mouvement de (S) dans (R_G)).

2.2.5 Moment cinétique par rapport à un axe

Définition :

Soit un axe Δ passant par A et dirigé selon $\overrightarrow{u_\Delta}$. Le **moment cinétique par rapport à l'axe Δ** est défini comme la projection du moment cinétique en A sur Δ :

$$L_{\Delta(R)} = \overrightarrow{L_{A(R)}}.\overrightarrow{u_\Delta} \qquad (6)$$

Avec : L_Δ = Moment cinétique par rapport à l'axe Δ en kg.m².s^{-1}

L_A = Moment cinétique en A en kg.m².s^{-1}

$\overrightarrow{u_\Delta}$ = Vecteur unitaire directeur de l'axe Δ

2.3 Torseur cinétique

Définition :

Le **torseur cinétique** est défini par :

$$C = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{P} \\ \overrightarrow{L_A} \end{Bmatrix}_{(R)}$$

2.4 Energie cinétique

2.4.1 Définition

Définition :

L'énergie cinétique d'un solide par rapport à une référentiel (R), notée, $Ec_{(R)}$, est la somme continue des énergies cinétiques élémentaires des volumes mésoscopiques qui constituent le solide :

$$Ec_{(R)} = \frac{1}{2}\iiint_\tau \left(\overrightarrow{v(M)_{(R)}}\right)^2.dm \qquad (7)$$

Avec : Ec = Energie cinétique du solide en J

τ = Volume du solide en m^3

v(M) = Vitesse du point M en m.s^{-1}

m = Masse du solide en kg

2.4.2 Théorème de Koenig

Propriété :

Le théorème de Koenig nous donne une relation entre l'énergie cinétique d'un solide par rapport à un référentiel (R) et l'énergie cinétique dans le référentiel barycentrique (R_G) :

$$Ec_{(R)} = Ec_{(R_G)} + \frac{1}{2}m\left(\overrightarrow{v(G)_{(R)}}\right)^2 \qquad (8)$$

Avec : Ec = Energie cinétique du solide en J

m = Masse du solide en kg

v(G) = Vitesse du centre de masse G en m.s^{-1}

Démonstration :

$$Ec_{(R)} = \frac{1}{2}\iiint_{\tau}\left(\overrightarrow{v(M)}_{(R)}\right)^2.dm$$

$$= \frac{1}{2}\iiint_{\tau}\left(\overrightarrow{v(M)}_{(R_G)} + \overrightarrow{v(G)}_{(R)}\right)^2.dm$$

$$= \frac{1}{2}\iiint_{\tau}\left(\overrightarrow{v(M)}_{(R_G)}\right)^2.dm + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{v(G)}_{(R)}\right)^2.\iiint_{\tau} dm + \underbrace{\left(\iiint_{\tau}\overrightarrow{v(M)}_{(R_G)}.dm\right)}_{=\vec{0}}.\overrightarrow{v(G)}_{(R)}$$

$$= Ec_{(R_G)} + \frac{1}{2}m\left(\overrightarrow{v(G)}_{(R)}\right)^2$$

2.5 Mouvements possibles d'un solide

2.5.1 Translation

Un solide en translation a les mêmes éléments cinétiques par rapport à (R) qu'un point matériel fictif confondu avec le centre de masse, G, où serait concentrée toute la masse du système.

2.5.1.1 Résultante cinétique

$$\vec{P}_{(R)} = m.\overrightarrow{v(G)}_{(R)}$$

2.5.1.2 Moment cinétique

$$\overrightarrow{L}_{A(R)} = \overrightarrow{AG} \wedge \vec{P}_{(R)} = \overrightarrow{AG} \wedge m.\overrightarrow{v(G)}_{(R)}$$

Démonstration :

$$\overrightarrow{L}_{A(R)} = \iiint_{\tau}\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{v(M)}_{(R)}.dm$$

$$= \iiint_{\tau}\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{v(G)}_{(R)}.dm \quad car \quad \overrightarrow{v(M)}_{(R)} = \overrightarrow{v(G)}_{(R)}$$

$$= \iiint_{\tau}\left(\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GM}\right) \wedge \overrightarrow{v(G)}_{(R)}.dm$$

$$= \left(\overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{v(G)}_{(R)}\right)\iiint_{\tau} dm + \underbrace{\iiint_{\tau}\overrightarrow{GM}.dm}_{=\vec{0}} \wedge \overrightarrow{v(G)}_{(R)}$$

$$= \overrightarrow{AG} \wedge m\overrightarrow{v(G)}_{(R)}$$

2.5.1.3 Energie cinétique

$$Ec_{(R)} = \frac{1}{2}m\left(\overrightarrow{v(G)}_{(R)}\right)^2$$

Démonstration :

$$Ec_{(R)} = \frac{1}{2}\iiint_{\tau}\left(\overrightarrow{v(M)}_{(R)}\right)^2.dm$$
$$= \frac{1}{2}\iiint_{\tau}\left(\overrightarrow{v(G)}_{(R)}\right)^2.dm$$
$$= \frac{1}{2}m\left(\overrightarrow{v(G)}_{(R)}\right)^2$$

2.5.2 Rotation autour d'un axe fixe

Soit un axe fixe Δ passant par le point O, origine du repère et dirigé suivant $\overrightarrow{u_\Delta}$, vecteur unitaire. La distance du point M appartenant au solide (S) en rotation autour de l'axe fixe Δ à l'origine du repère est notée OM = r. La projection du point M sur l'axe fixe est notée H. Le vecteur rotation instantané peut alors se mettre sous la forme :

$$\overrightarrow{\Omega_{(R_S/R)}} = \Omega.\overrightarrow{u_\Delta}$$

2.5.2.1 Résultante cinétique

$$\overrightarrow{P}_{(R)} = mr\Omega.\overrightarrow{u_\theta}$$

Démonstration :

$$\overrightarrow{P}_{(R)} = m.\overrightarrow{v(G)}_{(R)}$$
$$= m\left(\underbrace{\overrightarrow{v(O)}_{(R)}}_{=\vec{0}} + \overrightarrow{GO} \wedge \overrightarrow{\Omega_{(R_S/R)}}\right)$$
$$= m\Omega\left(\overrightarrow{GO} \wedge \overrightarrow{u_\Delta}\right)$$
$$= mr\Omega.\overrightarrow{u_\theta}$$

2.5.2.2 Moment d'inertie

<u>Définition :</u>

On appelle moment d'inertie d'un solide (S) par rapport à un axe Δ la quantité :

$$J_\Delta = \iiint_{\tau} HM^2.dm \qquad (9)$$

Avec :	J_Δ	=	moment d'inertie du solide en kg.m²
	τ	=	Volume du solide en m^3
	m	=	Masse du solide en kg

<u>Remarques :</u>

- Le moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe est une caractéristique de la répartition de la masse du solide, c'est une caractéristique intrinsèque du solide qui ne dépend donc pas du mouvement du solide, ni du temps. Il est d'autant plus grand que la masse est éloignée de l'axe Δ.

- De part sa définition, le moment d'inertie est toujours positif

Exemples :

Moment d'inertie d'une tige rectiligne, de section négligeable, de longueur 2b et de masse m, par rapport à sa médiatrice Δ	$J_\Delta = \frac{1}{3} mb^2$
Moment d'inertie d'un cerceau de section négligeable, de rayon R et de masse m, par rapport à son axe Δ	$J_\Delta = mR^2$
Moment d'inertie d'un disque, ou d'un cylindre plein, de rayon R et de masse m, par rapport à son axe de symétrie Δ	$J_\Delta = \frac{1}{2} mR^2$
Moment d'inertie d'une sphère creuse, de rayon R et de masse m, par rapport à son diamètre Δ	$J_\Delta = \frac{2}{3} mR^2$
Moment d'inertie d'une sphère pleine, de rayon R et de masse m, par rapport à son diamètre Δ	$J_\Delta = \frac{2}{5} mR^2$

2.5.2.3 *Moment cinétique*

On peut calculer le moment cinétique par rapport à l'axe Δ et le moment cinétique en O :

$$\begin{aligned} L_{\Delta(R)} &= J_\Delta \Omega \\ \overrightarrow{L_{O(R)}} &= J_\Delta \overrightarrow{\Omega_{(R_S/R)}} - \iiint_\tau \left(\overrightarrow{OH}.\overrightarrow{\Omega_{(R_S/R)}}\right).\overrightarrow{HM}.dm \\ &= L_{\Delta(R)}.\overrightarrow{u_\Delta} - \iiint_\tau \left(\overrightarrow{OH}.\overrightarrow{\Omega_{(R_S/R)}}\right).\overrightarrow{HM}.dm \end{aligned} \tag{10}$$

Avec : L_Δ = Moment cinétique par rapport à l'axe Δ en kg.m².s^{-1}
J_Δ = moment d'inertie du solide en kg.m²
Ω = Vecteur rotation instantanée en rad.s^{-1}
L_O = Moment cinétique en O en kg.m².s^{-1}
m = Masse du solide en kg
$\overrightarrow{u_\Delta}$ = Vecteur unitaire directeur de l'axe Δ

Remarque :

- Le moment cinétique au point O est composé de deux termes, l'un parallèle à l'axe Δ et l'autre perpendiculaire. La composante perpendiculaire peut s'annuler dans deux cas : si Δ est un axe de symétrie du solide (S) ou si le plan passant par O et perpendiculaire à Δ est un plan de symétrie de (S). Alors, le moment cinétique en O s'écrit :

$$\overrightarrow{L_{O\,(R)}} = J_{\Delta}\overrightarrow{\Omega_{(R_S/R)}}$$

Démonstration :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{L_{O\,(R)}} &= \iiint_{\tau} \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{v(M)}_{(R)}.dm \\
&= \iiint_{\tau} \overrightarrow{OM} \wedge \left(\overrightarrow{\Omega_{(R_S/R)}} \wedge \overrightarrow{OM}\right).dm \\
&= \iiint_{\tau} \left(\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OM}\right)\overrightarrow{\Omega_{(R_S/R)}} - \left(\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{\Omega_{(R_S/R)}}\right)\overrightarrow{OM}.dm \\
&= \iiint_{\tau} \left(\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HM}\right)^2.dm.\overrightarrow{\Omega_{(R_S/R)}} - \iiint_{\tau} \left(\overrightarrow{OH}.\overrightarrow{\Omega_{(R_S/R)}}\right).\left(\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HM}\right).dm \\
&= \left(\overrightarrow{OH}\right)^2 \overrightarrow{\Omega_{(R_S/R)}} \iiint_{\tau} dm + 2\iiint_{\tau} \underbrace{\left(\overrightarrow{OH}.\overrightarrow{HM}\right)}_{=\vec{0}}.dm.\overrightarrow{\Omega_{(R_S/R)}} + \iiint_{\tau} \left(\overrightarrow{HM}\right)^2.dm.\overrightarrow{\Omega_{(R_S/R)}} \\
&\quad -\left(\overrightarrow{OH}\right)^2 \overrightarrow{\Omega_{(R_S/R)}} \iiint_{\tau} dm - \iiint_{\tau} \left(\overrightarrow{OH}.\overrightarrow{\Omega_{(R_S/R)}}\right).\overrightarrow{HM}.dm \\
&= J_{\Delta}\overrightarrow{\Omega_{(R_S/R)}} - \iiint_{\tau} \left(\overrightarrow{OH}.\overrightarrow{\Omega_{(R_S/R)}}\right).\overrightarrow{HM}.dm
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_{\Delta(R)} &= \overrightarrow{L_{O\,(R)}}.\overrightarrow{u_{\Delta}} \\
&= \left(J_{\Delta}\overrightarrow{\Omega_{(R_S/R)}} - \iiint_{\tau} \left(\overrightarrow{OH}.\overrightarrow{\Omega_{(R_S/R)}}\right).\overrightarrow{HM}.dm\right).\overrightarrow{u_{\Delta}} \\
&= J_{\Delta}\Omega
\end{aligned}$$