Cours III : Mécanique du solide

3 Dynamique des solides

3.1 Actions mécaniques

3.1.1 Définition

Définition :
On appelle **action (ou effort)** toute cause susceptible de maintenir un solide au repos, de créer un mouvement ou de déformer un système.

3.1.2 Classification

Parmi toutes les actions pouvant s'exercer sur un solide (S), certaines peuvent provenir d'éléments internes à (S). Elles sont dites intérieures, par opposition aux actions extérieures exercées par des éléments extérieurs au solide sur le solide.

Exemple :
Ensemble d'étoiles d'une galaxie
- action intérieure = force gravitationnelle entre étoiles
- actions extérieure = force gravitationnelle d'étoiles d'autres galaxie

Deux solides en contact
- action intérieure = action de contact entre solide ou action de liaison
- action extérieure = poids

3.1.3 Principe des actions mutuelles

On considère un système composé d'un ensemble de points. On note F_{ji} (j≠i) l'action exercée par M_j sur M_i. Alors la somme des actions intérieures sur M_i vaut :

$$\overrightarrow{F_{i,\text{int}}} = \sum_{j,j\neq i} \overrightarrow{F_{ji}}$$

Le principe des actions mutuelles indique que la force exercées par M_i sur M_j est opposée à celle exercées par M_j sur M_i et que sa direction est colinéaire à $\overrightarrow{M_iM_j}$.

$$\overrightarrow{F_{ji}} = -\overrightarrow{F_{ij}}$$

La somme des actions intérieures exercées sur tout le système de points est alors nulle puisqu'elle contient à la fois les termes F_{ij} que F_{ji} qui s'annulent deux à deux.

$$\overrightarrow{F_{\text{int}}} = \sum_i \overrightarrow{F_{i,\text{int}}} = \sum_i \sum_{j,j\neq i} \overrightarrow{F_{ji}} = 0$$

De la même manière, le moment total intérieur à un système sera nul.

3.2 Résultante et moment des actions mécaniques extérieures

3.2.1 Résultante des actions mécaniques extérieures

Définition :

Pour un champ de forces appliqué à un solide (S), on appelle **résultante des actions mécaniques**, la somme des actions élémentaires appliquées au solide.

$$\vec{R} = \iiint_{\tau} \vec{f_v}.d\tau \quad (1)$$

Avec :	R	=	Résultante des actions mécaniques en N
	τ	=	Volume du solide en m^3
	f_v	=	Actions volumiques exercées sur le solide en $N.m^{-3}$

3.2.2 Moment des actions mécaniques extérieures

3.2.2.1 Moment en un point

Définition :

Pour un champ de forces appliqué à un solide (S), on appelle **moment des actions mécaniques** en un point A quelconque du solide, la somme des moments en A des actions élémentaires appliquées au solide.

$$\overrightarrow{M_A} = \iiint_{\tau} \overrightarrow{AM} \wedge \vec{f_v}.d\tau \quad (2)$$

Avec :	M_A	=	Moment en un point A du solide en N.m (ou $kg.m^2.s^{-2}$)
	τ	=	Volume du solide en m^3
	f_v	=	Actions volumiques exercées sur le solide en $N.m^{-3}$

Propriété :

On peut exprimer le **moment des actions mécaniques** en un point différent de A par la simple relation :

$$\overrightarrow{M_{A'}} = \overrightarrow{M_A} + \overrightarrow{A'A} \wedge \vec{R} \quad (3)$$

Avec :	$M_{A'}$	=	Moment en un point A' du solide en N.m
	M_A	=	Moment en un point A' du solide en N.m
	R	=	Résultante des actions mécaniques en N

3.2.2.2 Moment par rapport à un axe

Définition :

Soit un axe Δ passant par A et dirigé selon $\overrightarrow{u_\Delta}$. Le **moment des actions mécaniques par rapport à l'axe Δ** est défini comme la projection du moment des actions mécaniques en A sur Δ :

$$M_\Delta = \overrightarrow{M_A}.\overrightarrow{u_\Delta} \quad (4)$$

Avec :	M_Δ	=	Moment par rapport à l'axe Δ en N.m
	M_A	=	Moment en un point A' du solide en N.m
	$\overrightarrow{u_\Delta}$	=	Vecteur unitaire directeur de l'axe Δ

3.2.3 Torseur des actions

3.2.3.1 Définition

Définition :
Le **torseur des actions mécanique** est défini par :

$$\Gamma_S = \begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \overrightarrow{M_A} \end{Bmatrix}_{(R)}$$

3.2.3.2 Glisseur

Définition :
On appelle glisseur une action mécanique telle qu'il existe un point B où le moment des actions mécaniques est nul.

Remarque :

- On peut alors exprimer le moment en A selon :

$$\overrightarrow{M_A} = \overrightarrow{M_B} + \vec{R} \wedge \overrightarrow{BA} = \vec{R} \wedge \overrightarrow{BA}$$

Propriété :
Lorsque le torseur des actions mécaniques s'exerçant sur le solide est celui d'un glisseur, on peut utiliser le terme de force.

Exemple : le poids
On considère l'accélération de la pesanteur terrestre g uniforme sur tout le solide. En notant µ la masse volumique du solide, on peut exprimer l'action mécanique extérieure s'exerçant sur le solide sous la forme :

$$\overrightarrow{f_v} = \mu.\vec{g}$$

On obtient alors les résultantes et moments en G, centre de masse, des actions mécaniques suivants :

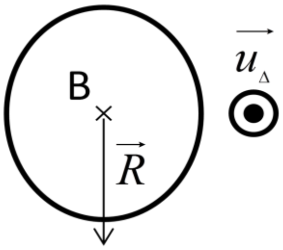
$$\vec{R} = \iiint_\tau \overrightarrow{f_v}.d\tau = \iiint_\tau \mu.\vec{g}.d\tau = m\vec{g}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M_G} &= \iiint_\tau \overrightarrow{GM} \wedge \overrightarrow{f_v}.d\tau \\ &= \iiint_\tau \mu\overrightarrow{GM}.d\tau \wedge \vec{g} \\ &= \underbrace{\iiint_\tau \overrightarrow{GM}.dm}_{=\vec{0}} \wedge \vec{g} \\ &= \vec{0} \end{aligned}$$

L'action mécanique du poids est équivalente à une force unique appliquée au centre d'inertie G du système.

3.2.3.3 *Bras de levier*

On considère un glisseur appliqué en un point B, et on cherche à calculer son moment par rapport à la droite (A ; Δ) perpendiculaire au plan de figure. Soit H la projection de B sur la droite et BH la distance entre B et la droite.



$$M_\Delta = \overrightarrow{M_A}.\overrightarrow{u_\Delta} = \left(\overrightarrow{R} \wedge \overrightarrow{BA}\right).\overrightarrow{u_\Delta} = \left(\overrightarrow{R} \wedge \left(\overrightarrow{BH} + \overrightarrow{HA}\right)\right).\overrightarrow{u_\Delta} = \left(\overrightarrow{R} \wedge \overrightarrow{BH}\right).\overrightarrow{u_\Delta}$$

$$\left|M_\Delta\right| = \left\|\overrightarrow{R}\right\|.BH$$

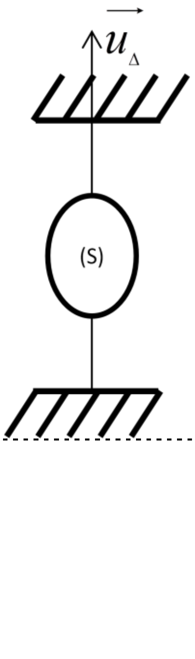
On appelle bras de levier du glisseur la distance BH entre son support et la droite Δ.

3.2.3.4 *Couple*

Définition :
On appelle couple une action mécanique dont la résultante est nulle.

Exemple : couple de rappel élastique
Soit un solide (S) attaché à un fil tendu. Le fil n'étant pas rigide, il est possible de faire tourner (S) autour de l'axe Δ du fil. Cette rotation entraine une déformation du fil et donc des contraintes mécaniques internes. A l'image du ressort en extension, on peut souvent modéliser l'effet de ces contraintes par un couple Γ exercé par le fil sur (S). L'angle qui repère la rotation de (S) autour de Δ est noté θ et θ_0 pour sa valeur au repos. On appelle C la constante de torsion.

$$\overrightarrow{\Gamma} = -C\left(\theta - \theta_0\right)\overrightarrow{u_\Delta}$$



3.3 Théorème de la résultante cinétique (ou dynamique) en référentiel galiléen

Soit un solide en mouvement par rapport à un référentiel galiléen (R). Alors la dérivée de la quantité de mouvement (ou résultante cinétique) est égale à la résultante des actions mécaniques extérieures agissant sur le solide :

$$\overrightarrow{D}_{(R)} = \left(\frac{d\overrightarrow{P}_{(R)}}{dt}\right)_{(R)} = m\vec{a}(G)_{(R)} = \overrightarrow{R}_{ext} \qquad (5)$$

Avec :

D	=	Résultante dynamique en N
P	=	Quantité de mouvement en $kg.m.s^{-1}$
m	=	Masse du solide en kg
$a(G)$	=	Accélération du centre de masse en $m.s^{-2}$
R_{ext}	=	Résultante des actions mécaniques extérieures en N

Remarques :

- Le mouvement du centre d'inertie d'un solide est identique à celui d'un point matériel fictif qui serait affecté de toute la masse du système et soumis à l'ensemble des forces exercées par l'extérieur sur le solide.
- Si le référentiel est non galiléen il faut rajouter les résultantes des forces d'entrainement et de Coriolis.

3.4 Théorème du moment cinétique (ou dynamique) en référentiel galiléen

3.4.1 En un point fixe

Soit un solide en mouvement par rapport à un référentiel galiléen (R). Alors la dérivée du moment cinétique est égale au moment des actions mécaniques extérieures agissant sur le solide :

$$\overrightarrow{\delta}_{A(R)} = \left(\frac{d\overrightarrow{L}_{A(R)}}{dt}\right)_{(R)} = \overrightarrow{M}_{A\,ext} \qquad (6)$$

Avec :

δ_A	=	Moment dynamique en A en N.m
L_A	=	Moment cinétique en A en $kg.m^2.s^{-1}$
M_A	=	Moment en un point A du solide en N.m

Remarques :

- Si le référentiel est non galiléen il faut rajouter les moments des forces d'entrainement et de Coriolis.
- Le théorème du moment cinétique est valable au centre d'inertie G bien que ce soit a priori un point mobile dans (R).
- Le théorème du moment cinétique est applicable dans le référentiel barycentrique bien que ce référentiel ne soit pas a priori galiléen, mais uniquement au centre d'inertie G du système.

3.4.2 Par rapport à un axe fixe

Soit un axe Δ fixe dans le référentiel galiléen (R) alors :

$$\left(\frac{dL_{\Delta(R)}}{dt}\right)_{(R)} = M_{\Delta,ext} \quad (7)$$

Avec : L_Δ = Moment cinétique par rapport à l'axe Δ en kg.m².s^{-1}

M_Δ = Moment par rapport à l'axe Δ en N.m

3.4.3 Mouvements possibles d'un solide

3.4.3.1 *Rotation autour d'un axe fixe*

Soit un solide (S) en rotation autour d'un axe fixe Δ à la vitesse angulaire Ω.

$$\left(\frac{dL_{\Delta(R)}}{dt}\right)_{(R)} = \left(\frac{dJ_\Delta \Omega}{dt}\right)_{(R)} = J_\Delta \left(\frac{d\Omega}{dt}\right)_{(R)} = M_{\Delta,ext}$$

3.4.3.2 *Rotation autour d'un axe de direction fixe*

Soit un solide (S) en rotation autour d'un axe Δ de direction fixe $\overrightarrow{u_\Delta}$ dans le référentiel galiléen (R) à la vitesse angulaire Ω. Dans le référentiel barycentrique, Δ est un axe fixe noté Δ'.

$$J_{\Delta'} \left(\frac{d\Omega}{dt}\right)_{(R)} = M_{\Delta',ext}$$

<u>A retenir et savoir faire :</u>

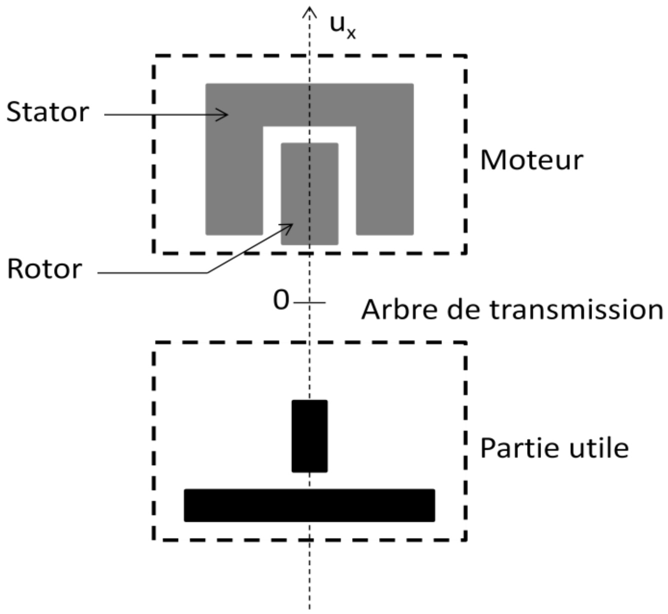
- Savoir exprimer la résultante, le moment des actions mécaniques
- Savoir utiliser les théorèmes de la résultante cinétique et du moment cinétique en fonction du mouvement du solide.

3.5 Exercices d'application

3.5.1 Etude dynamique d'un moteur

On s'intéresse au fonctionnement d'une machine comportant une pièce tournante (perceuse, machine à laver le linge, …). Le rotor, partie tournante du moteur, entraîne la partie tournante utile de la machine (par exemple le tambour dans le cas d'une machine à laver le linge) grâce à un arbre de transmission. L'axe de rotation est noté u_x. La vitesse angulaire de rotation du rotor autour de u_x est notée ω. La partie fixe du moteur (stator) entraîne le rotor en exerçant sur lui un couple dont la valeur en projection sur u_x est $M_s > 0$.

a) En déduire le signe du couple M_u exercé par la partie utile tournant sur le rotor.
b) Souvent, l'ensemble est plongé dans un fluide visqueux (huile) dont l'action sur le rotor se ramène à un couple $M_f = -\alpha\omega$. On suppose que les actions de contact des différentes pièces entre elles sont parfaites, de telle sorte que leur moment projeté sur u_x, M_c, est nul (liaison pivot parfaite). On note J le moment d'inertie du rotor autour de l'axe de rotation. En déduire l'équation différentielle satisfaite par ω(t).
c) En supposant que les couples Ms et Mu sont à peu près constants dès la mise en rotation du rotor, trouver l'évolution de ω(t) sachant qu'on met le moteur en marche à t=0.
d) En déduire la vitesse angulaire de fonctionnement en régime permanent. Dépend-elle des frottements du fluide ? Ces derniers ont-ils une autre influence ? Que dire des couples Ms et Mu ?



3.6 Exercices

3.6.1 Mouvement vertical d'un Yo-yo

Un Yo-yo est assimilé à un disque homogène, de masse m, de rayon R, autour duquel est enroulé un fil sans masse. L'autre extrémité du fil est maintenu fixe en O. A l'instant t = 0, on lâche le Yo-yo sans vitesse initiale, le fil étant vertical. On suppose que le fil ne glisse pas sur le disque.

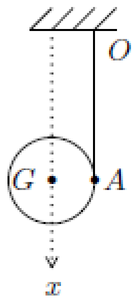
a) Soit α la position angulaire du yo-yo par rapport à l'horizontale et x la position verticale de son centre de gravité (voir schéma). Quelle relation géométrique existe-t-il entre α et x ?

b) Déterminer l'accélération de G.

c) Déterminer la tension du fil.

d) En déduire l'équation générale du mouvement.

Le moment d'inertie du disque par rapport à son axe est $J=1/2mR^2$.



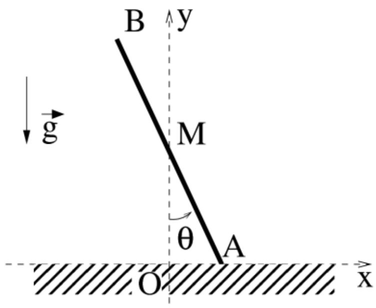
3.6.2 Chute d'une barre

Une barre rigide AB, homogène de masse m, de longueur 2l et de section négligeable, est posée verticalement sur le sol en A. Le contact de la barre avec le sol en A est suppose sans frottement. Soit θ l'angle que fait la barre par rapport à la verticale (voir figure). A l'instant initial, la barre est très légèrement déplacée (sans vitesse initiale) de son équilibre instable et tombe.

En utilisant le théorème de la résultante dynamique et le théorème du moment cinétique :

a) Montrer que le mouvement du milieu M de AB est vertical.

b) Déterminer l'équation différentielle du mouvement vérifiée par l'angle θ.



3.6.3 Oscillation d'une barre

Une barre, homogène de masse m, de longueur l est attachée en A à un axe (D) horizontal fixe (voir figure). Grâce à des roulements à billes (de masse négligeable) la liaison entre la barre et l'axe (D) a les caractéristiques suivantes :

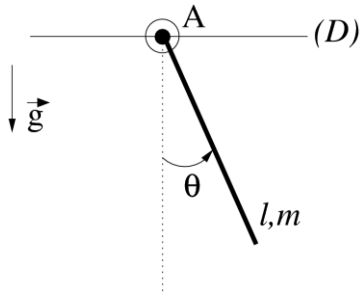
- La barre peut tourner librement (sans frottement) autour de A, dans le plan de la figure. Soit θ l'angle que fait la barre avec la verticale à l'instant t.
- Le point d'attache A peut se déplacer sans frottement le long de l'axe (D) ; ainsi la force $\vec{R}$ de l'axe (D) sur la barre est toujours verticale.

La barre est lâchée, sans vitesse initiale, d'un angle θ_0.

a) Montrer que le centre de gravité de la barre se déplace sur un axe vertical.

b) Trouver l'équation différentielle du mouvement de la barre (équation différentielle dont θ est solution).

Donnée : Le moment d'inertie J d'une barre homogène, de masse m, de longueur l, par rapport à son axe de symétrie (axe perpendiculaire à la barre passant par son centre) est J=1/12ml².



3.6.4 Oscillation d'un cylindre

Un cylindre plein homogène, de masse m, de centre C et de rayon b, est attaché en C à un ressort de longueur à vide l_0 et de raideur k (voir figure). La liaison entre le cylindre et le ressort est parfaite (sans frottement) et le cylindre peut tourner librement autour de son axe de symétrie.
Le cylindre peut se déplacer, sans glisser, sur le sol horizontal dans la direction x. Le contact entre le cylindre et le sol est caractérisé par un coefficient de frottement μ.

En utilisant le théorème de moment cinétique, déterminer la période d'oscillation du cylindre autour de sa position d'équilibre.
Rappel: Le moment d'inertie J d'un cylindre homogène, de masse m, de rayon b, par rapport à son axe de symétrie (axe du cylindre passant par son centre) est J =1/2mb².