Cours VI : Electromagnétisme

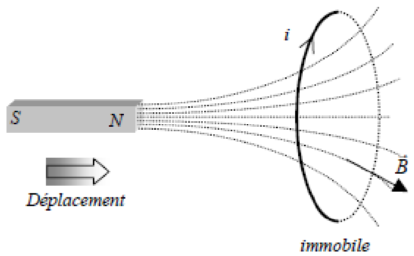
4 Induction électromagnétique

4.1 Le phénomène d'induction

4.1.1 Mise en évidence expérimentale

4.1.1.1 Bobine fixe dans un champ magnétique variable

Un aimant est déplacé à proximité d'un circuit fermé immobile dans le référentiel du laboratoire : il apparait dans le circuit pendant le déplacement de l'aimant et le sens de ce courant s'inverse avec le sens de déplacement de l'aimant.

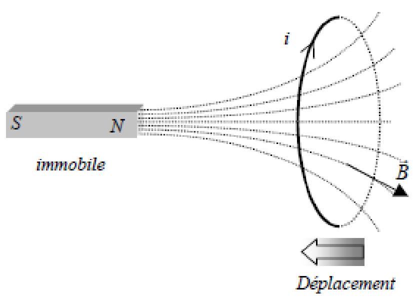


Le champ magnétique n'est plus uniforme mais un champ variable dans le temps : **B(t)**. Ce champ variable engendre un champ électrique variable : **E(t)** qui induit un courant dans les conducteurs de la bobine.

Lorsqu'un circuit fixe est soumis à un champ magnétique variable, il se comporte comme un générateur électrocinétique : il est le siège d'un phénomène d'induction, appelé **induction de Neumann**.

4.1.1.2 Bobine mobile dans un champ magnétique permanent

Un circuit fermé est déplacé à proximité d'un aimant immobile dans le référentiel du laboratoire : il apparait un courant dans le circuit pendant son déplacement et le sens de ce courant s'inverse avec le sens de déplacement du circuit.



Le courant induit est causé par le déplacement du circuit dans le champ permanent **B**.

Un circuit se déplaçant dans un champ magnétique permanent se comporte comme un générateur électrocinétique : il est le siège d'un phénomène d'induction, appelé **induction de Lorentz**.

4.1.1.3 Unicité des phénomènes

Même si l'origine de la force mettant les charges en mouvement semble à priori différente, il est clair que l'on passe de l'expérience 1 à l'expérience 2 par un simple changement de référentiel galiléen : le mouvement relatif de l'aimant et du circuit étant le même il paraît alors naturel que le même e-et (apparition du courant dans (C)) se retrouve dans les deux situations.

L'induction électromagnétique est un phénomène unique : l'induction de Lorentz et l'induction de Neumann en sont deux facettes, qui dépendent du point de vue de l'observateur.

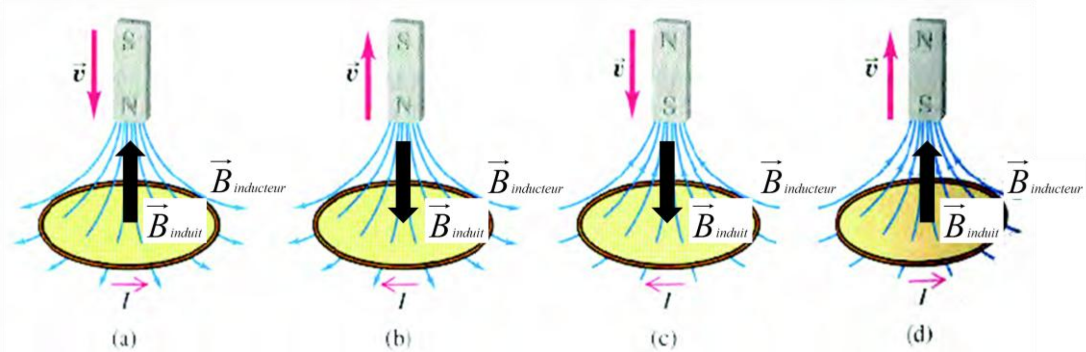
Le phénomène d'induction électromagnétique consiste en l'apparition, dans un circuit appelé **l'induit**, qu'on place dans une région où existe un champ magnétique B, créé par un circuit (ou un aimant) appelé **inducteur**, d'une différence de potentiel aux bornes de l'induit ouvert ou d'un courant si l'induit est fermé, lorsqu'il y a :

- soit mouvement relatif de l'induit par rapport à l'inducteur, avec B permanent (haut parleur électrodynamique, galvanomètre à cadre mobile,...) : cas dit de **Lorentz**
- soit variation dans le temps du champ inducteur B, l'induit restant fixe (chauffage par induction, auto-induction, …) : cas dit de **Neumann**.
- soit les deux phénomènes précédents conjugués (moteur asynchrone, moteur linéaire,...).

4.1.2 Loi de Lenz-Faraday

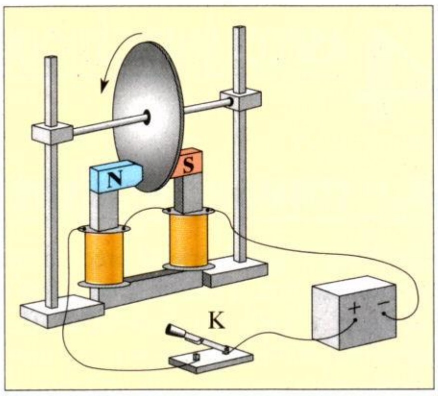
<u>Loi de modération de Lenz :</u>
Le courant induit est de sens tel qu'il tend, par ses effets à s'opposer à la cause qui lui a donné naissance.

<u>Exemple sur le cas de Neumann :</u>



Le champ induit crée par le courant induit s'oppose à la variation du champ inducteur : ce champ induit peut donc avoir même sens que le champ inducteur.

<u>Exemple</u> : les courants de Foucault
Le phénomène d'induction se produit non seulement dans les circuits filiformes mais également dans les masses métalliques des conducteurs. Les courants induits qui y prennent naissance sont appelés courants de Foucault. Leur étude générale est assez difficile et dépend beaucoup de la géométrie du conducteur : le sens des lignes de courant obéissent à la loi de Lenz.
En particulier, ils produisent des forces de freinage proportionnelles à la vitesse relative de l'induit par rapport à l'inducteur (application aux ralentisseurs électromagnétiques des camions).



Principe du freinage électromagnétique.

Loi expérimentale de Faraday :

La force électromotrice e engendrée dans un circuit est donnée par l'opposé de la dérivée du flux magnétique par rapport au temps :

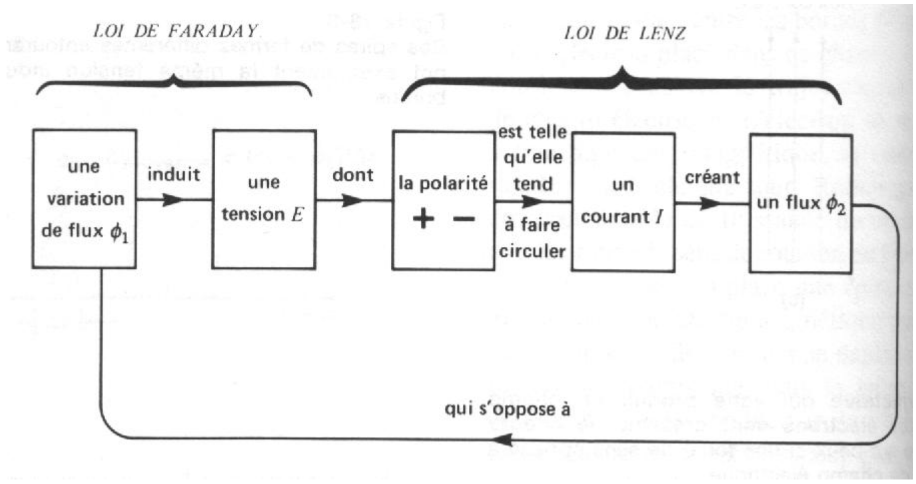
$$e = -\frac{d\phi}{dt} \quad (1)$$

Avec : e = Force électromotrice en V

ϕ = Flux magnétique en Wb

Remarque :

La loi de Lenz traduit le signe négatif de la loi de Faraday.



4.2 Cas d'un circuit fixe dans un champ magnétique dépendant du temps

4.2.1 Equation de Maxwell-Faraday

Soit un circuit fermé (C) fixe plongé dans un champ magnétique dépendant du temps.

De manière générale, la force électromotrice est donnée de manière intégrale par :

$$e(t) = \oint_C \vec{E} \cdot \vec{dl}$$

En électrostatique, on a vu que le champ était à circulation conservative. Mais lorsque le champ varie, cette affirmation n'est plus vraie.

De plus, on peut exprimer la variation du flux magnétique en fonction du temps à travers la surface ouverte portée par le contour C :

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{d}{dt}\iint_S \vec{B}\cdot\overrightarrow{dS} = \iint_S \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot\overrightarrow{dS}$$

D'après la loi de Faraday, on a finalement l'équation intégrale suivante :

$$\oint_C \vec{E}\cdot\overrightarrow{dl} = -\iint_S \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot\overrightarrow{dS} \qquad (2)$$

Avec : E = Champ électrique en $V.m^{-1}$
B = Champ magnétique en T

D'après le théorème de Stokes :

$$\oint_C \vec{E}\cdot\overrightarrow{dl} = \iint_S \overrightarrow{rot}\vec{E}\cdot\overrightarrow{dS}$$

On obtient alors la formulation locale de l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\overrightarrow{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \qquad (3)$$

Avec : E = Champ électrique en $V.m^{-1}$
B = Champ magnétique en T

Remarque :
Cette équation locale traduit le phénomène fondamental d'induction électromagnétique découvert par Faraday.

4.2.2 Circulation du champ électrique

Le champ magnétique étant à flux conservatif, on a définit le potentiel vecteur tel que :

$$\vec{B} = \overrightarrow{rot}\vec{A}$$

En utilisant (3), on a alors :

$$\overrightarrow{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\overrightarrow{rot}\vec{A}}{\partial t} = -\overrightarrow{rot}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$$

$$\overrightarrow{rot}\left(\vec{E}+\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) = \vec{0}$$

On a alors $\vec{E}+\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$ qui est à circulation conservative. Il existe alors un potentiel scalaire V tel que :

$$\vec{E}+\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = -\overrightarrow{grad}V$$

Définition :

On appelle **champ électromoteur** la composante non conservative du champ électrique, notée E_m. Dans le **cas de Neumann**, ce champ électromoteur se met sous la forme :

$$\overrightarrow{E_m} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \qquad (4)$$

Avec : E_m = Champ électromoteur en $V.m^{-1}$

A = Potentiel vecteur en $Wb.m^{-1}$

On peut alors calculer la f.e.m. par :

$$e = \oint_C \vec{E}\cdot\vec{dl} = \oint_C \left(-\overrightarrow{grad}V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right)\cdot\vec{dl} = \underbrace{\oint_C \left(-\overrightarrow{grad}V\right)\cdot\vec{dl}}_{=0} + \oint_C \left(-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right)\cdot\vec{dl} = \oint_C \overrightarrow{E_m}\cdot\vec{dl}$$

Or,

$$\oint_C \left(-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right)\cdot\vec{dl} = -\frac{d}{dt}\oint_C \vec{A}\cdot\vec{dl} = -\frac{d}{dt}\iint_S \overrightarrow{rot}\vec{A}\cdot\vec{dS} = -\frac{d}{dt}\iint_S \vec{B}\cdot\vec{dS} = -\frac{d\phi}{dt}$$

Propriété :

Pour un circuit fixe soumis à un champ magnétique variable B (t) la **f.e.m. de Neumann** est donnée soit par :

- la loi de Faraday :

$$e = -\frac{d\phi}{dt}$$

- la circulation du champ électromoteur de Neumann

$$e = \oint_C \overrightarrow{E_m}\cdot\vec{dl} \qquad (5)$$

Avec : e = Force électromotrice en V

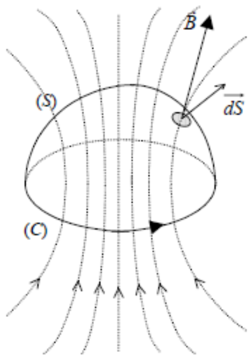
E_m = Champ électromoteur en $V.m^{-1}$

4.2.3 Auto-induction

4.2.3.1 Inductance propre

Soit un circuit filiforme (C) parcouru par un courant d'intensité i qui crée un champ magnétique B.

Définition :
Le **champ magnétique propre** d'un circuit est le champ dont ce circuit est la source.
Le **flux magnétique propre**, ϕ_P, d'un circuit filiforme est le flux de son champ propre, c'est-à-dire le flux « envoyé » par le circuit à travers lui-même.



Comme ϕ_P est proportionnel à B qui est lui même proportionnel à i (loi de Biot Savart), le rapport ϕ_P /i ne dépend plus du courant qui parcourt le circuit et constitue donc une caractéristique intrinsèque de celui-ci.

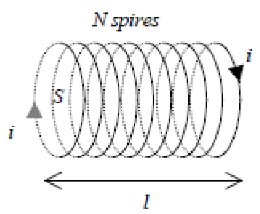
Définition :
On appelle **inductance propre** (ou coefficient d'auto-induction), L, la constante reliant le flux magnétique propre d'un circuit à l'intensité du courant le parcourant :

$$\phi_P = Li \qquad (6)$$

Avec : ϕ_P = Flux magnétique propre en Wb
L = Inductance propre en H (Henry)
i = Intensité du courant en A

Remarques :
- L'inductance propre L est une grandeur toujours positive.
- L'inductance propre L dépend de la géométrie du circuit et des propriétés magnétiques du milieu dans lequel il est plongé.

Exemple : Solénoïde infini



On considère un solénoïde de longueur l comportant N spires régulières, supposées jointives, de

section S, d'axe Oz.
Le champ magnétique B à l'intérieur du solénoïde (champ propre) est :

$$\vec{B} = \mu_0 n i \vec{e_z} = \mu_0 \frac{N}{l} i \vec{e_z}$$

Le flux propre est alors :

$$\phi_P = N \iint_S \vec{B} \cdot \vec{dS} = \mu_0 \frac{N^2 S}{l} i$$

L'inductance propre L du solénoïde est alors :

$$L = \mu_0 N^2 \frac{S}{l}$$

4.2.3.2 Auto-induction

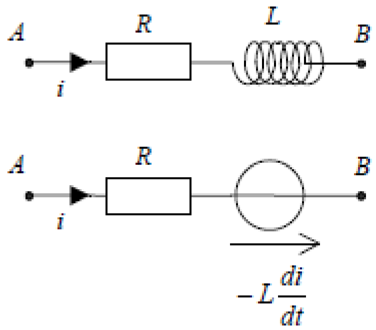
Comme tout circuit est plongé dans son propre champ, une variation de courant qui le parcourt entraîne une variation de son flux propre et donc, d'après la loi de Faraday, l'apparition d'une f.e.m. induite.

Si, par exemple, le courant i (t) augmente de di > 0 pendant une durée dt, le flux propre ϕ_p =L i augmente également (de $d\phi_p$ = L di) et la f.e.m. correspondante est :

$$e = -\frac{d\phi_P}{dt} = -L\frac{di}{dt}$$

Cette f.e.m. tend donc à faire circuler un courant dans le sens négatif et donc s'oppose à l'augmentation de i (t) : c'est la loi de Lenz.

Dans un circuit inductif, le courant ne peut donc pas varier brutalement. Ainsi, lorsqu'on ouvre un circuit parcouru par un courant intense, le phénomène d'auto-induction s'oppose à l'extinction brutale du courant.



$$u_{AB} = Ri - e_{propre} = Ri + L\frac{di}{dt}$$

4.2.3.3 Aspect énergétique

D'après le cours de première année, l'énergie magnétique emmagasinée dans un circuit supposé seul, parcouru par un courant i(t) s'écrit :

$$U_{mag} = \frac{1}{2} L i^2$$

D'après la définition du flux magnétique propre, on a aussi :

$$U_{mag} = \frac{1}{2}\phi_P i$$

<u>Définition :</u>

Le courant i qui parcourt un circuit, d'inductance propre L, crée un champ magnétique propre B_{propre} auquel est associé une énergie magnétique propre U_{mag} donnée par :

$$U_{mag} = \frac{1}{2}Li^2 = \frac{1}{2}\phi_P i = \frac{1}{2}\iiint_V \frac{B^2_{propre}}{\mu_0} d\tau \qquad (7)$$

Avec :	U_{mag}	=	Energie magnétique en J
	L	=	Inductance propre en H
	i	=	Intensité du courant en A
	ϕ_P	=	Flux magnétique propre en Wb
	B_{propre}	=	Champ magnétique propre en T
	μ_0	=	Perméabilité du vide ($4\pi 10^{-7}$ H.m^{-1})

<u>Démonstration sur un exemple :</u>

On considère un solénoïde de longueur l comportant N spires régulières, supposées jointives, de section S, d'axe Oz. Alors :

$$U_{mag} = \frac{1}{2}Li^2 = \frac{1}{2}\phi_P i = \frac{1}{2}\mu_0 N^2 \frac{S}{l} i^2 = \frac{1}{2}\frac{B^2_{propre}}{\mu_0} Sl \quad avec \quad B_{propre} = \mu_0 \frac{N}{l} i$$

Ou a donc une densité volumique d'énergie égale à :

$$u_{mag} = \frac{dU_{mag}}{d\tau} = \frac{B^2_{propre}}{2\mu_0}$$

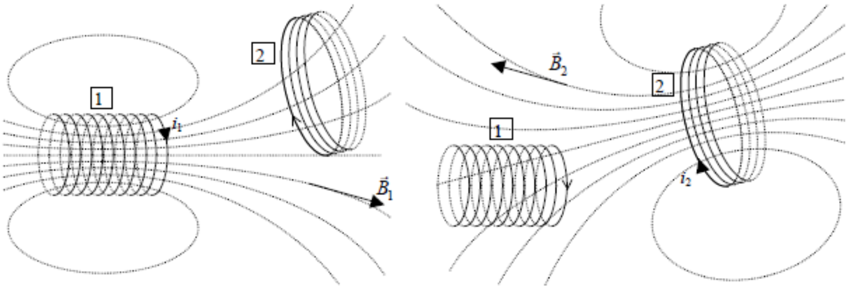
4.2.4 Induction mutuelle entre deux circuits filiformes fermés rigides

4.2.4.1 Inductance mutuelle

Soient deux circuits orientés repérés par (1) et (2) tels que :

- quand le circuit (1) est parcouru par une intensité de courant i_1, le circuit (2) embrasse une partie (ou la totalité) du champ magnétique B_1 crée par (1),

- quand le circuit (2) est parcouru par une intensité de courant i_2, le circuit (1) embrasse une partie (ou la totalité) du champ magnétique B_2 crée par (2).



Un couplage par induction mutuelle existe entre deux circuits électriques, lorsque la variation du champ magnétique crée par l'un est sensible dans l'autre.

Définition :

On appelle **flux de mutuelle inductance**, les deux flux :

- ϕ_{12} le flux du champ magnétique B_1 à travers le circuit (2)

$$\phi_{12} = \iint_{(2)} \overrightarrow{B_1} \cdot \overrightarrow{dS}$$

- ϕ_{21} le flux du champ magnétique B_2 à travers le circuit (1)

$$\phi_{21} = \iint_{(1)} \overrightarrow{B_2} \cdot \overrightarrow{dS}$$

Les champs B_1 et B_2 étant respectivement proportionnels aux courants i_1 et i_2, on définit une constante qui relie le flux de mutuelle inductance aux courants.

Définition :

On appelle **inductance mutuelle** (ou coefficient d'induction mutuelle), M_{12} (respectivement M_{21}), la constante reliant le flux de mutuelle inductance à travers le circuit (2) (respectivement (1)) à l'intensité du courant parcourant le circuit (1) (respectivement (2)) :

$$\phi_{12} = M_{12} i_1 \quad et \quad \phi_{21} = M_{21} i_2$$

Théorème de Neumann :

Les deux coefficients M_{12} et M_{21} sont égaux et on appelle **inductance mutuelle** leur valeur commune :

$$M = \frac{\phi_{12}}{i_1} = \frac{\phi_{21}}{i_2} \tag{8}$$

Avec : M = Inductance mutuelle en H
ϕ_{12} = Flux de mutuelle inductance de B_1 à travers (2) en Wb
i_1 = Intensité du courant dans (1) en A
ϕ_{21} = Flux de mutuelle inductance de B_2 à travers (1) en Wb
i_2 = Intensité du courant dans (2) en A

Remarques :

- Comme l'inductance propre L, l'inductance mutuelle M dépend de la géométrie des deux circuits et des propriétés magnétiques du milieu dans lequel ils sont plongés.

- Contrairement à l'inductance propre L toujours positive, l'inductance mutuelle M est une grandeur algébrique dont le signe dépend de l'orientation des deux circuits. Si l'on inverse l'orientation d'un des deux circuits l'inductance mutuelle M est changée en son opposé.

4.2.4.2 *Induction mutuelle*

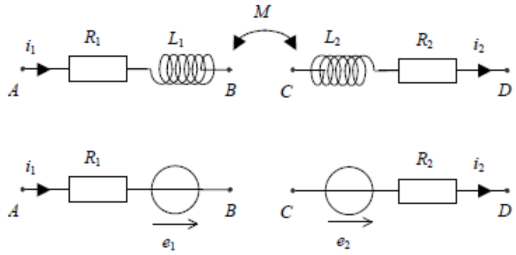
Soit deux circuits en inductance mutuelle. On suppose qu'il n'y a pas d'autre source de champ magnétique, les flux totaux à travers chacune des deux bobines s'écrivent :

$$\phi_1 = \phi_{11} + \phi_{21} = L_1 i_1 + M i_2$$

$$\phi_2 = \phi_{22} + \phi_{12} = L_2 i_2 + M i_1$$

On en déduit les f.e.m. :

$$e_1 = -\frac{d\phi_1}{dt} = -L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt}$$
$$e_2 = -\frac{d\phi_2}{dt} = -L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt}$$



On en déduit les différences de potentiel aux bornes de chacun des deux circuits :

$$u_{AB} = R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}$$
$$u_{CD} = R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}$$

Les équations électriques de chacune des deux branches sont couplées par inductance mutuelle.

Remarque :
Le régime stationnaire ne permet pas ce couplage, car les termes dérivés par rapport au temps s'annulent.

Lorsque chaque circuit enlace la totalité des lignes de champ de l'autre, la mutuelle inductance de deux circuits donnés prend alors sa valeur maximale qui est :

$$M_{\max} = \sqrt{L_1 L_2}$$

Quand une partie des lignes de champ correspondant à un circuit n'est pas enlacée par l'autre, alors :

$$M < \sqrt{L_1 L_2}$$

Définition :
On définit le coefficient de couplage (magnétique) de deux circuits par la quantité sans dimension :

$$0 \le k = \frac{|M|}{\sqrt{L_1 L_2}} \le 1 \qquad (9)$$

Avec :	k	=	Coefficient de couplage sans dimension
	M	=	Mutuelle inductance en H
	L_1	=	Inductance propre du circuit (1) en H
	L_2	=	Inductance propre du circuit (2) en H

4.2.4.3 Aspect énergétique

En reprenant les deux circuits précédents, on peut exprimer la puissance totale à un instant t considéré :

$$\begin{aligned} p(t) &= u_{AB} i_1 + u_{CD} i_2 \\ &= R_1 i_1^2 + L_1 i_1 \frac{di_1}{dt} + M i_1 \frac{di_2}{dt} + R_2 i_2^2 + L_2 i_2 \frac{di_2}{dt} + M i_2 \frac{di_1}{dt} \\ &= R_1 i_1^2 + R_2 i_2^2 + L_1 i_1 \frac{di_1}{dt} + L_2 i_2 \frac{di_2}{dt} + M i_1 \frac{di_2}{dt} + M i_2 \frac{di_1}{dt} \end{aligned}$$

Les deux premiers termes correspondent à une puissance perdue par effet Joule.

Les deux termes suivants sont les dérivées temporelles des énergies emmagasinées dans chacune des bobines si elles étaient seules :

$$U_{mag1} = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 \quad et \quad U_{mag2} = \frac{1}{2} L_2 i_2^2$$

Les deux derniers termes pris ensemble forment la dérivée temporelle d'un terme qualifié d'énergie mutuelle :

$$U_{mutuelle} = M i_1 i_2$$

Propriété :

L'énergie magnétique totale emmagasinée à chaque instant dans le dispositif est donnée par :

$$U_{tot} = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M i_1 i_2 \qquad (10)$$

Avec :	U_{tot}	=	Energie total emmagasinée en J
	L_1	=	Inductance propre du circuit (1) en H
	i_1	=	Intensité du courant dans (1) en A
	L_2	=	Inductance propre du circuit (2) en H
	i_2	=	Intensité du courant dans (2) en A
	M	=	Mutuelle inductance en H

Remarques :

- En fonction de flux totaux, on trouve aussi :

$$U_{tot} = \frac{1}{2} \phi_1 i_1 + \frac{1}{2} \phi_2 i_2$$

- On pose :

$$X = \frac{i_1}{i_2} \quad \Rightarrow \quad U_{tot} = \frac{1}{2} i_2^2 \left(L_1 X^2 + 2MX + L_2 \right)$$

Alors, l'énergie étant positive :

$$L_1 X^2 + 2MX + L_2 > 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta = 4M^2 - 4L_1 L_2 < 0$$

$$|M| < \sqrt{L_1 L_2}$$

4.3 Cas d'un circuit mobile dans un champ magnétique stationnaire

Lors de l'expérience en 4.1.1.2, le courant induit donne avec le champ magnétique permanent des forces de Laplace. Ces forces de Laplace et la force électromotrice de Lorentz proviennent de la force de Lorentz.

L'action d'un champ magnétique extérieur permanent sur un circuit en mouvement est équivalente à celle d'un générateur de tension de f.e.m. e_L imposant un courant induit i_L (conversion électromécanique) tel que :

$$P_{Laplace} + e_L i = 0 \tag{11}$$

Avec : $P_{Laplace}$ = Puissance des forces de Laplace en W
e_L = Force électromotrice de Lorentz en V
i = Intensité du courant induit en A

4.3.1 Champ électromoteur

Soit un circuit filiforme C placé dans un champ magnétique B permanent (champ magnétostatique).

Une charge mobile q animée d'une vitesse v par rapport à un référentiel galiléen est soumise à la force de Lorentz :

$$\vec{F} = q\vec{v_a} \wedge \vec{B}$$

où v_a est la vitesse absolue de la charge mobile dans le référentiel lié au laboratoire.

Or, le circuit étant en mouvement, cette vitesse absolue est la somme de la vitesse d'entraînement v_e de déplacement du circuit et de sa vitesse relative v_r de déplacement par rapport au circuit. On a alors :

$$\vec{F} = q\left(\vec{v_e} + \vec{v_r}\right) \wedge \vec{B} = q\vec{v_e} \wedge \vec{B} + q\vec{v_r} \wedge \vec{B}$$

Le terme en $q\vec{v_e} \wedge \vec{B}$ est une force qui ne s'applique aux charges mobiles que si le conducteur se déplace.

<u>Définition :</u>

On appelle **champ électromoteur** la composante non conservative du champ électrique, notée E_m. Dans le **cas de Lorentz**, ce champ électromoteur se met sous la forme :

$$\vec{E_m} = \vec{v_e} \wedge \vec{B} \tag{12}$$

Avec : E_m = Champ électromoteur en $V.m^{-1}$
v_e = Vitesse d'entrainement en $m.s^{-1}$
B = Champ magnétique en T

4.3.2 Circulation du champ électromoteur

On peut alors calculer la f.e.m. par :

$$e = \oint_C \vec{E} \cdot \vec{dl} = \oint_C \left(-\overrightarrow{grad}V + \vec{v_e} \wedge \vec{B}\right) \cdot \vec{dl} = \underbrace{\oint_C \left(-\overrightarrow{grad}V\right) \cdot \vec{dl}}_{=0} + \oint_C \left(\vec{v_e} \wedge \vec{B}\right) \cdot \vec{dl} = \oint_C \vec{E_m} \cdot \vec{dl}$$

La force de Laplace exercée sur un élément de circuit filiforme de longueur dl, parcouru par le courant i et soumis au champ magnétique B, est :

$$\overrightarrow{dF}_{Laplace} = i\overrightarrow{dl} \wedge \vec{B}$$

Lorsque le tronçon (AB) de circuit se déplace, la puissance des forces de Laplace est :

$$P_{Laplace} = \int_A^B \left(i\overrightarrow{dl} \wedge \vec{B}\right) \cdot \overrightarrow{v_e} = -i\int_A^B \left(\overrightarrow{v_e} \wedge \vec{B}\right) \cdot \overrightarrow{dl} = -i\int_A^B \overrightarrow{E_m} \cdot \overrightarrow{dl}$$

D'après le bilan de puissance en (11) :

$$-i\int_A^B \overrightarrow{E_m} \cdot \overrightarrow{dl} + e_L i = 0 \quad \Rightarrow \quad e_L = \int_A^B \overrightarrow{E_m} \cdot \overrightarrow{dl}$$

Propriété :

Pour un circuit mobile soumis à un champ magnétique permanent B la **f.e.m. de Lorentz** est donnée soit par :

- la loi de Faraday :

$$e = -\frac{d\phi}{dt}$$

- la circulation du champ électromoteur de Lorentz

$$e = \oint_C \overrightarrow{E_m} \cdot \overrightarrow{dl} \qquad (13)$$

Avec : e = Force électromotrice en V

E_m = Champ électromoteur en $V.m^{-1}$

Démonstration de la loi de Faraday :

Soit un circuit fermé (C) mobile dans un champ magnétique permanent B.

La puissance des forces de Laplace est :

$$P_{Laplace} = \oint_C \left(i\overrightarrow{dl} \wedge \vec{B}\right) . \overrightarrow{v_e}$$

Entre t et t + dt chaque point du circuit se déplace de :

$$\overrightarrow{dM} = \overrightarrow{v_e} dt$$

D'où une nouvelle expression des forces de Laplace :

$$P_{Laplace} = \oint_C \left(i\overrightarrow{dl} \wedge \vec{B}\right) \cdot \frac{\overrightarrow{dM}}{dt} = \frac{i}{dt}\oint_C \left(\overrightarrow{dl} \wedge \vec{B}\right) \cdot \overrightarrow{dM} = \frac{i}{dt}\oint_C \left(\overrightarrow{dM} \wedge \overrightarrow{dl}\right) \cdot \vec{B}$$

On remarque alors que $\overrightarrow{dM} \wedge \overrightarrow{dl}$ représente la surface dS balayée par l'élément de longueur dl :

$$\oint_C \left(\overrightarrow{dM} \wedge \overrightarrow{dl}\right) \cdot \vec{B} = \iint_S \vec{B} \cdot \overrightarrow{dS}$$

C'est le flux du champ magnétique à travers la surface balayée par le circuit lors de son déplacement entre t et t + dt.

On construit alors la surface fermée S constituée par la réunion de :

- la surface S_1 délimitée par le circuit à l'instant t,
- la surface latérale S précédente,
- la surface S_2 délimitée par le circuit à l'instant t + dt.

Le champ magnétique est à flux conservatif.

$$\iint_{S_1} \vec{B}\cdot\vec{dS} + \iint_{S_2} \vec{B}\cdot\vec{dS} + \iint_{S} \vec{B}\cdot\vec{dS} = \phi(t) - \phi(t+dt) + \iint_{S} \vec{B}\cdot\vec{dS} = 0$$

$$\iint_{S} \vec{B}\cdot\vec{dS} = \phi(t+dt) - \phi(t)$$

$$P_{Laplace} = \frac{i}{dt}\big(\phi(t+dt) - \phi(t)\big) = i\frac{d\phi}{dt}$$

Et finalement :

$$e_L = -\frac{d\phi}{dt}$$

4.4 Cas général

On admet que si les deux causes d'induction existent simultanément, il faut additionner leurs effets.

Loi de Faraday généralisée :

Pour une maille fermée, mobile dans un champ magnétique variable B, la f.e.m. d'induction est donnée par la loi de Faraday :

$$e = -\frac{d\phi}{dt} \qquad (14)$$

Avec : e = Force électromotrice en V

ϕ = Flux magnétique en Wb

Remarque :

e est la somme des f.e.m. de Neumann et de Lorentz.

Loi d'Ohm généralisée :

Une portion de circuit filiforme d'un conducteur ohmique vérifie la loi d'Ohm généralisée :

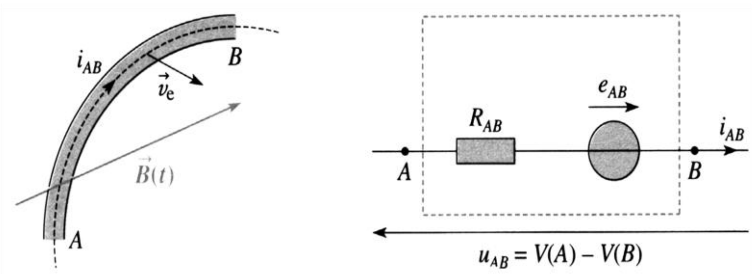
$$u_{AB} = Ri_{AB} - e_{AB} \qquad (1$$

Avec : u_{AB} = Tension aux bornes du circuit en V

R = Résistance du circuit en Ω

i_{AB} = Intensité du courant traversant le circuit en A

e_{AB} = Force électromotrice dû au phénomène d'induction en V



4.5 Transducteurs électromécaniques

4.5.1 Méthode d'étude

Le phénomène d'induction électromagnétique met en évidence la conversion possible d'énergie mécanique en énergie électrique (ou le contraire) dans le cas du déplacement du circuit « induit » dans le champ magnétique créé par le circuit « inducteur ».
On appelle « **transducteur électromécanique** » tout machine ou dispositif assurant cette conversion d'énergie mécanique en énergie électrique ou inversement (alternateurs, dynamos, moteurs, haut-parleur, compte-tours, galvanomètre, etc..).
L'étude d'un transducteur conduit à un **système d'équations électriques et mécaniques couplées**.

<u>Pour établir le système d'équations différentielles :</u>

- Exprimer la fem induite en fonction du paramètre décrivant le mouvement du système. Identifiez le cas: Neumann, ou Lorentz et appliquez la formule adaptée pour e (par la relation de Faraday ou à partir du champ électromoteur).
- Établir l'équation électrique du circuit (à partir d'une loi de mailles sur le circuit en tenant compte de toutes les résistances et éventuellement des inductances si le phénomène d'auto-induction n'est pas négligeable).
- Exprimer la résultante des forces de Laplace ou le couple résultant du courant induit i prenant naissance dans le circuit (on doit obtenir une force de freinage proportionnelle à la vitesse conformément à la loi de Lenz !).
- Établir l'équation mécanique du circuit: le paramètre mécanique sera selon le cas une vitesse v pour une translation ou angulaire ω pour une rotation.

4.5.2 Bilans de puissances

On peut distinguer deux types de fonctionnement :

- Fonctionnement en « moteur électrique »

Un moteur électrique reçoit de l'énergie électrique et fournit de l'énergie mécanique. On a :

$$\begin{cases} P_{Laplace} > 0 \\ P_{elec} < 0 \end{cases}$$

- Fonctionnement en « générateur électrique »

Une génératrice fournit de l'énergie électrique en recevant de l'énergie mécanique. On a :

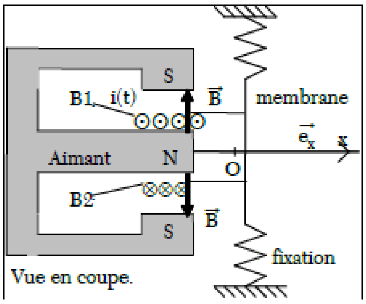
$$\begin{cases} P_{Laplace} < 0 \\ P_{elec} > 0 \end{cases}$$

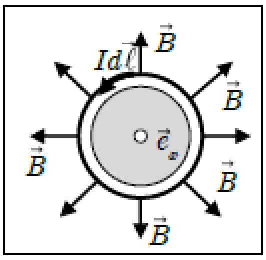
4.5.3 Un exemple de transducteur : le haut parleur électrodynamique

Un haut-parleur électrodynamique est composé :

- d'un aimant permanent créant un champ magnétique radial dans son entrefer de forme annulaire, B
- d'une membrane pouvant osciller autour d'une position moyenne prise comme origine de l'axe des x;
- d'une bobine, solidaire de la membrane, comportant N spires de rayon a et de faible épaisseur. Elle est caractérisée par sa résistance R et son inductance propre L.

B_1 et B_2 sont les bornes d'entrée et de sortie du courant i(t). Soit m la masse totale du système bobine - membrane.
L'action du système de fixation sur la membrane est modélisée suivant l'axe Ox par une force de rappel $-k x \vec{e_x}$ et celle de l'air par une force de frottement de type visqueux : $-\lambda \dot{x} \vec{e_x}$
La bobine, parcourue par le courant d'intensité i(t), est alimentée par un générateur de tension de résistance interne R_0 et de force électromotrice E(t).





4.5.3.1 *Questions*

1) Établir les équations différentielles en i(t) et en x(t) de ce dispositif.
2) La tension E(t) est sinusoïdale :

$$E(t) = E_0 \cos(\omega t)$$

On suppose que le régime forcé est établi.
Exprimer l'impédance "motionnelle" $\underline{Z_M}$ définie par: $\underline{E} = \underline{Z_M}\ \underline{I}$, où E et I représentent les grandeurs complexes associées à E(t) et i(t).

4.5.3.2 *Les étapes clés de la résolution*

1) Equation différentielles

Expression de la f.e.m. induite :

On détermine la f.e.m. d'induction e à partir du champ électromoteur :

$$\overrightarrow{E_m} = \dot{x}\overrightarrow{e_x} \wedge B\overrightarrow{e_r}$$

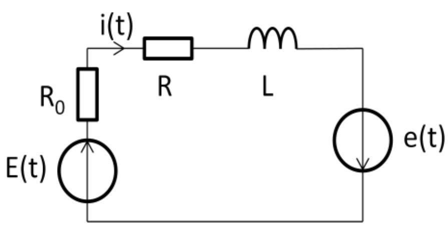
$$e = \oint_{bobinage} \overrightarrow{E_m} \cdot \overrightarrow{dl} = N \int_{1spire} B\dot{x}dl = 2\pi aNB\dot{x}$$

La relation de Faraday n'est pas applicable ici car on ne connaît pas en tout point de la surface limitée par le circuit B.

Equation électrique du circuit :

L'équation électrique s'écrit en tenant compte de l'auto-induction :

$$\underline{L\frac{di}{dt} + (R + R_0)i = E(t) + 2\pi aNB\dot{x}}$$



Expression la résultante des forces de Laplace :
La force exercée sur chaque élément de courant Idl s'écrit :

$$\overrightarrow{dF} = Idl\overrightarrow{e_\theta} \wedge B\overrightarrow{e_r} = -Bidl\overrightarrow{e_x}$$
$$\vec{F} = -Bil\overrightarrow{e_x} = -2\pi aNBI\overrightarrow{e_x}$$

Equation mécanique du circuit :
Le principe fondamental de la dynamique appliqué au système {bobine + membrane}, en tenant compte des forces de Laplace exercées sur la bobine, conduit, après projection sur l'axe Ox à :

$$\underline{m\ddot{x} + \lambda\dot{x} + kx = -2\pi aNBI}$$

2) Impédance "motionnelle"
On cherche la réponse du système au régime forcé harmonique, en utilisant la méthode complexe, qui conduit à :

$$\begin{cases} jL\omega\underline{I} + (R+R_0)\underline{I} = \underline{E} + 2\pi aNBj\omega\underline{X} \\ -m\omega^2\underline{X} + j\omega\lambda\underline{X} + k\underline{X} = -2\pi aNB\underline{I} \end{cases}$$

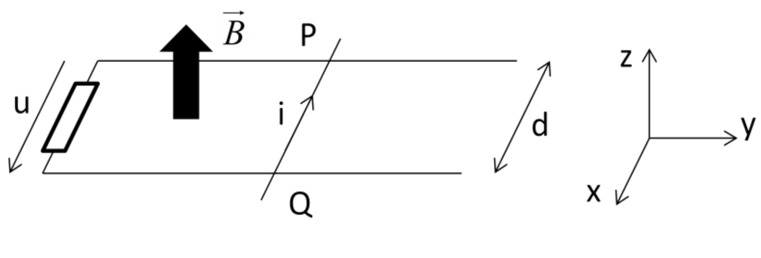
On obtient :

$$\underline{Z_M} = (R+R_0)\underline{I} + jL\omega + \frac{(2\pi aNB)^2}{\lambda + jm\omega + \dfrac{k}{j\omega}}$$

On reconnaît dans $\underline{Z_M}$ la partie purement électrique de l'impédance et le dernier terme qui prend en compte le couplage électromécanique.

4.5.4 Les rails de Laplace

On s'intéresse au dispositif constitué de deux rails parallèles distants de d, dans un plan horizontal, sur lesquels peut se mouvoir une tige perpendiculaire aux rails. Un champ magnétique vertical uniforme et permanent est crée et maintenu constant par un dispositif annexe.
A l'extrémité des rails, un dipôle électrique est présent. Il peut être un générateur, une résistance, …
On note V la vitesse de translation de la tige, B le champ magnétique supposé uniforme et stationnaire dans le référentiel du laboratoire.



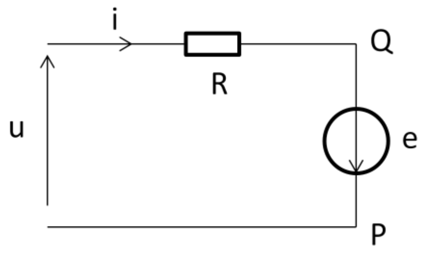
Expression de la f.e.m. induite :
On détermine la f.e.m. d'induction e à partir du champ électromoteur :

$$\overrightarrow{E_m} = V\overrightarrow{e_y} \wedge B\overrightarrow{e_z} = VB\overrightarrow{e_x}$$
$$e = \oint_{QP} \overrightarrow{E_m} \cdot \overrightarrow{dl} = -VBd$$

Equation électrique du circuit :

On note R la résistance électrique de l'ensemble des rails et tige :

$$\underline{u = Ri - e = Ri + VdB}$$



Expression la résultante des forces de Laplace :

La force exercée sur chaque élément de courant Idl s'écrit :

$$\overrightarrow{dF} = -idl\overrightarrow{e_x} \wedge B\overrightarrow{e_z} = Bidl\overrightarrow{e_y}$$

$$\overrightarrow{F} = Bid\overrightarrow{e_y}$$

Equation mécanique du circuit :

Le principe fondamental de la dynamique appliqué au système {barre}, en tenant compte des forces de Laplace exercées sur la barre, conduit, après projection sur l'axe Oy à :

$$\underline{m\dot{V} = idB}$$

Bilan de puissance :

La puissance électrique reçue par PQ se met sous la forme :

$$P_e = ei = -VidB$$

La puissance mécanique de la force de Laplace s'écrit :

$$P_m = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{V} = VidB$$

On retrouve bien le bilan de puissance en (11).

A retenir et savoir faire :

- Connaître la loi de Lenz et la loi de Faraday.
- Savoir calculer le flux magnétique et sa dérivée par rapport au temps.
- Savoir calculer la f.e.m. induite dans le cas d'un circuit fixe dans un champ magnétique variable ou d'un circuit mobile dans un champ magnétique permanent.
-Savoir orienter un circuit et déterminer les courants induits, les forces de Laplace mises en jeu.
-Savoir effectuer un bilan énergétique.
-Connaître quelques applications de l'induction électromagnétique
- Connaître le théorème de Neumann
- Savoir calculer une inductance propre et une inductance mutuelle dans le cas du solénoïde infini (les autres cas sont théoriquement hors programme).
- Comprendre le phénomène d'auto-induction.

4.6 Exercices d'application

4.6.1 Couplage entre un dipôle magnétique et une spire

Un dipôle magnétique de moment M selon Oz est placé à l'origine O du repère. Sur l'axe Oz, à distance D, une spire de rayon R a sa normale dirigée selon Oz. Le potentiel vecteur crée par un dipôle est donnée par la relation :

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\overrightarrow{M} \wedge \vec{r}}{r^3}$$

a) Donner l'expression du potentiel vecteur en fonction des données de l'énoncé.

b) En déduire l'expression du flux à travers la spire du champ crée par le dipôle.

c) On modélise ce dipôle par une spire s de très petit rayon a, parcourue par un courant I. Que vaut le coefficient de mutuelle induction ?

d) La spire S est parcourue par I'. Soit ϕ' le flux de son champ à travers la spire s, déterminer ϕ'/I'. Conclure.

e) Vérifier qu'inverser une des orientations de s ou S suffit à modifier le signe du coefficient de mutuelle induction.

4.6.2 Le transformateur

On considère un système de deux circuits couplés en ajoutant les deux conditions suivantes :

- le couplage est parfait
- les chutes de tensions dues aux résistances R_1 et R_2 sont négligeables.

a) Quelle forme prend le système d'équations couplées ?

b) Faire apparaître un coefficient de proportionnalité entre les deux tensions d'entrée et sortie.

c) Un dipôle d'impédance complexe $\underline{Z}$ est placé au secondaire d'un transformateur parfait. Quelle est l'impédance équivalente à l'association vue au primaire ?

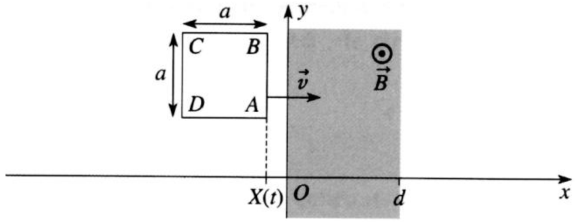
4.6.3 Déplacement d'un cadre conducteur

On suppose que le champ magnétique B est uniforme et constant entre les plans (x = 0) et (x = d), et nul ailleurs. Un cadre conducteur carré, de côté a (a < d), de résistance totale R et de côtés parallèles aux axes (Ox) et (Oy), circule avec une vitesse constante v. On désigne par X(t) l'abscisse du côté avant du cadre. Déterminer en fonction de X le courant i et la force électromagnétique F résultante qui s'exerce sur le cadre :

a) en calculant le champ électromoteur ;

b) en utilisant la loi de Faraday ;

c) par un bilan énergétique.



4.7 Exercices

4.7.1 Bobinage sur un noyau torique

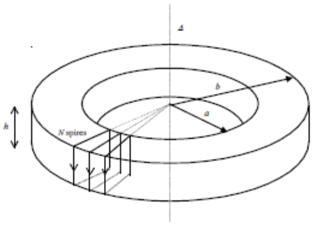
Une bobine est constituée de N spires pratiquement jointives enroulées en une seule couche sur un tore de section carrée. On note a la longueur du côté et R le rayon intérieur du tore.

a) Lorsqu'un courant d'intensité I parcourt le circuit, déterminer le flux du champ magnétique propre à travers l'un des pires. En déduire une expression du coefficient d'auto-induction du bobinage.

b) Retrouver cette expression par un raisonnement énergétique.

c) Un second circuit est bobiné sur le tore, le nombre de spires est N'. Déterminer le coefficient d'induction mutuelle.

d) Application numérique : R = 3 cm, a = 8 mm. Les bobinages ont respectivement 200 et 50 spires. Quelle approximation peut-on faire si a << R ? Quel modèle de solénoïde obtient-on alors ?



4.7.2 Alternateur rudimentaire

Une bobine plate de N = 200 spires, d'aire S = 20cm^2, tourne avec une vitesse angulaire constante ω = 10 rad. s^{-1} entre les pôles d'un aimant en «U», qui produit un champ B = 0,2T supposé uniforme et normal à l'axe de rotation.

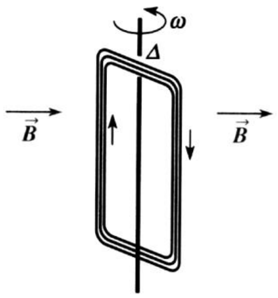
La bobine dont les bornes sont reliées, possède une résistance R = 1 Ω. Le champ qu'elle crée est négligeable devant celui de l'aimant.

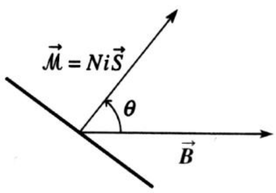
a) Calculer la f.e.m. d'induction induite par le mouvement de la bobine.

b) Déterminer le moment Γ par rapport à l'axe qu'il faut exercer pour entretenir la rotation.

c) Effectuer un bilan d'énergie

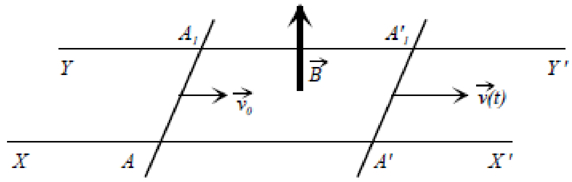
d) Ce dispositif peut être utilisé comme génératrice tachymétrique. Expliquer.





4.7.3 Barres mobiles sur deux rails

Sur deux rails rectilignes parallèles horizontaux XX' et YY', de résistance négligeable, sont placées deux barres mobiles horizontales AA_1 et $A'A'_1$ perpendiculaires aux rails. La distance entre les rails est l = 10cm ; la résistance de la partie de chaque barre comprise entre les deux rails est R = 1 Ω ; chaque barre a une masse m = 10 g. L'ensemble étant soumis à l'action d'un champ magnétique vertical B uniforme d'intensité B = 1 T, on déplace la barre AA_1 en l'approchant de $A'A'_1$, avec une vitesse constante v_0 = 20 cm. s^{-1} normale à AA_1. Etudier la loi des vitesses v(t) de la barre $A'A'_1$. Tracer le graphe de v(t).



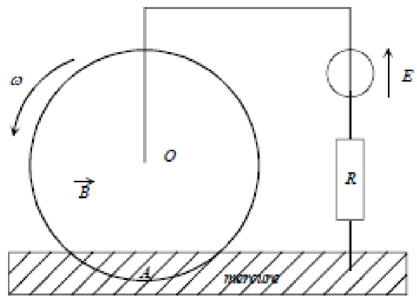
4.7.4 Roue de Barlow

A l'instant t = 0, on ferme le circuit d'une roue de Barlow. On désignera r le rayon de la roue, B le module du champ magnétique uniforme normal à la roue, E la f.é.m. du générateur, R la résistance totale du circuit, et J le moment d'inertie de la roue par rapport à son axe Oz. Le mercure exerce sur la roue un système de forces de frottement visqueux dont le moment par rapport à l'axe de rotation de la roue est -kω, ω étant la vitesse angulaire instantanée de la roue de Barlow.

a) Exprimer la f.é.m. induite dans le circuit, en fonction de B, r et ω.

b) Exprimer le moment Γ des forces électromagnétiques par rapport à l'axe Oz, en fonction de B, r et de l'intensité i(t) dans le circuit.

c) Donner la loi ω (t) et l'intensité i_0 du courant en régime permanent.



4.7.5 Bobine autour d'un solénoïde

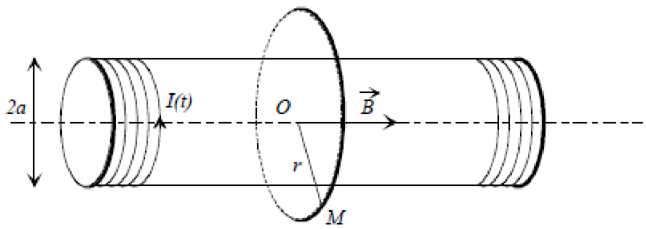
Un très long solénoïde, de rayon a, est constitué de n spires par unité de longueur. Le solénoïde est entouré d'une bobine plate de résistance R, formé de N spires circulaire de rayon r et de même axe que le solénoïde. Le solénoïde est parcouru par un courant variable I(t) au cours du temps.

a) Déterminer le champ électromoteur E_m induit au point M de la bobine plate, en fonction de n, a, r et dI/dt,

b) Exprimer la f.é.m. induite aux bornes de la bobine plate, par deux méthodes différentes.

c) Que devient cette f.é.m. si la bobine est extérieure au solénoïde sans l'entourer ?

d) Calculer l'inductance mutuelle M de ces deux circuits



4.7.6 Energie magnétique et inductance mutuelle de deux solénoïdes coaxiaux

Le solénoïde S_1 de longueur l_1 pénètre dans le solénoïde S_2 coaxial de longueur l_2 d'une quantité variable x (x < l_1). Les solénoïdes, ayant N_1 spires et N_2 spires régulièrement réparties sur une couche, sont parcourus par les courants I_1 et I_2 continus. Les rayons de S_1 et S_2 sont $R_1 << l_1$ et $R_2 << l_2$. Déterminer, pour ce système de deux solénoïdes :

a) l'énergie magnétique W(x) ;

b) l'inductance mutuelle M(x) et vérifier l'inéquation $M(x) < \sqrt{L_1 L_2}$

4.7.7 Moteur synchrone

Un ventilateur électrique est constitué:

- d'un système fixe de bobines, alimenté en alternatif, produisant un champ magnétique B d'intensité constante mais dont la direction tourne à la vitesse angulaire constante ω_0 ; ce champ tournant demeure orthogonal à un axe z'z fixe ;
- d'un petit aimant permanent, de moment magnétique M orthogonal à z'z, solidaire des aubes du ventilateur qui tourne à la vitesse angulaire ω autour de l'axe z'z.

a) Exprimer le couple instantané Γ des forces exercées sur l'aimant; on désignera α_0 l'angle (B, M) à l'instant t = 0.

b) Quelles conditions doivent remplir ω et ω_0 pour que ce dispositif fonctionne en moteur ?

c) Le ventilateur est à l'arrêt ; on branche les courants qui produisent le champ tournant B; le ventilateur peut-il démarrer ? Lorsque le ventilateur a démarré, à quelle vitesse tourne-t-il ?

4.7.8 Moteur asynchrone

Dans le dispositif précédent, on remplace l'aimant par une petite bobine plate de N spires de surface S, de résistance R et d'inductance L, fermée sur elle-même; le champ tournant est maintenu. La petite bobine, dont l'axe demeure orthogonal à z'z, tourne à la vitesse angulaire ω autour de l'axe z'z.

a) Calculer la valeur instantanée i(t) de l'intensité du courant induit dans la petite bobine plate, en régime permanent.

b) Calculer le couple instantané Γ du système de forces qui s'exercent sur la bobine plate, ainsi que sa valeur moyenne dans le temps < Γ>.

c) Quelles conditions doivent remplir ω et ω_0 pour que ce dispositif fonctionne en moteur ?

4.7.9 Moteur asynchrone

Le rotor (R) d'un moteur électrique peut être décrit :

- d'un point de vue mécanique, comme un solide mobile autour d'un axe vertical Oz par rapport auquel son moment d'inertie est J, et freiné dans sa rotation de vitesse angulaire ω par rapport à Oz par des forces de frottement fluide dont le moment par rapport à Oz est de la forme -h ω.
- d'un point de vue électromagnétique, comme un ensemble de N spires planes superposées de même aire S dont le vecteur normal n appartient au plan horizontal xOy dans lequel sa rotation est repérée par l'angle : $\theta = (u_x, n)$ avec $\omega = d\theta/dt$.

On note respectivement R et L la résistance et l'inductance du circuit ainsi constitué, i (t) l'intensité qui le parcourt à l'instant t.

Initialement immobile et siège d'aucun courant, (R) est soumis à l'action d'un champ magnétique extérieur uniforme et de module B, dont la direction, contenue dans le plan xOy, est repérée par l'angle : $\omega_0 t = (u_x, B)$.

a) En introduisant les paramètres ϕ_0 = NBS et y = $\omega_0 t - \theta$, calculer le moment Γ par rapport à Oz des forces de Laplace qui s'exercent sur (R).
b) Ecrire une équation (M) qui exprime le comportement mécanique de (R).
c) Ecrire une équation (E) qui exprime son comportement électrocinétique.
d) En négligeant le champ magnétique propre du circuit devant le champ magnétique extérieur et en supposant que les variations de ω sont lentes devant celles de y, donner une expression en fonction de ω, ω_0, ϕ_0 et R de la moyenne temporelle <Γ> du couple Γ qui s'exerce sur (R).
Commenter qualitativement les effets de ce couple moyen en ce qui concerne les qualités du moteur réalisé.
e) On revient à l'étude générale (sans l'approximation précédente). Multipliant (M) par ω et (E) par i, faire apparaître un bilan énergétique dont on commentera la signification (on pourra à cet effet imaginer que le champ tournant est créé par un aimant maintenu en rotation par un opérateur).
f) Proposer une réalisation matérielle simple du « champ tournant » qui fasse appel au courant alternatif fourni par le secteur sans intervention d'aucune pièce mobile.