Cours VI : Electromagnétisme

5 Equations de Maxwell dans le vide

5.1 Principe de conservation de la charge

5.1.1 Densités de charges et courants

5.1.1.1 Distributions de charges

A l'échelle microscopique, les charges électriques peuvent être représentées par une distribution discrète (q), mais quand la distance entre les charges électriques devient très petite par rapport aux autres longueurs considérées, on préfère utiliser des densités de charges :

- la charge élémentaire dq contenue dans un volume élémentaire dτ centré en M devient la **densité volumique de charge** ρ(M,t) en $C.m^{-3}$:

$$\rho(M,t)=\frac{dq}{d\tau}$$

- la charge élémentaire dq contenue dans une surface élémentaire dS centrée en M devient la **densité surfacique de charge** σ(M,t) en $C.m^{-2}$:

$$\sigma(M,t)=\frac{dq}{dS}$$

- la charge élémentaire dq contenue dans une longueur élémentaire dl centrée en M devient la **densité linéique de charge** λ(M,t) en $C.m^{-1}$:

$$\lambda(M,t)=\frac{dq}{dl}$$

5.1.1.2 Distributions de courants

Les courants circulant dans un matériau sont dus à un mouvement d'ensemble de porteurs de charges :

- le **vecteur densité volumique de courant** $\vec{j}$ (en $A.m^{-2}$) associé à un mouvement d'ensemble d'une densité volumique de charges mobiles ρ_m à la vitesse $\vec{v}$ est :

$$\vec{j}=\rho_m\vec{v}$$

- le **vecteur densité surfacique de courant** $\vec{j_s}$ (en $A.m^{-1}$) associé à un mouvement d'ensemble d'une densité surfacique de charges mobiles σ_m à la vitesse $\vec{v}$ est :

$$\vec{j_s}=\sigma_m\vec{v}$$

L'intensité I du courant électrique à travers une surface S est liée à la charge δQ_m qui traverse S entre les instants t et t + δt :

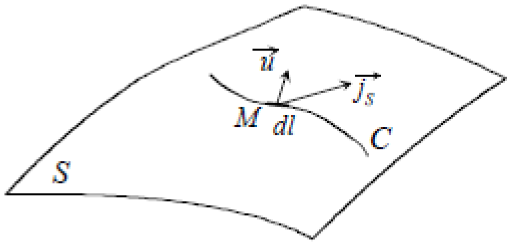
$$\delta Q_m = I\delta t$$

- l'intensité du courant électrique traversant une surface S est égale au flux du vecteur densité volumique de courant $\vec{j}(M,t)$ à travers cette surface :

$$I = \iint \vec{j}(M,t) \cdot \overrightarrow{dS}$$

- l'intensité du courant électrique traversant une ligne L reliant deux points de la surface est égale à la circulation du vecteur densité surfacique de courant $\vec{j_s}(M,t)$ le long de cette ligne :

$$I_{AB} = \int_A^B \vec{j}_s(M,t) \cdot dl\vec{u}$$



Pour toute distribution de courants, on définit un **élément de courant élémentaire** (en A.m), jouant pour le magnétisme un rôle analogue à celui de l'élément de charge élémentaire dq pour les champs électriques. Sur un tube de courant :

- l'élément de courant correspondant au **vecteur densité volumique de courant** dans un volume élémentaire dτ :

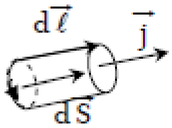
$$\overrightarrow{dC} = \vec{j} d\tau$$

- l'élément de courant correspondant au **vecteur densité surfacique de courant** dans une surface élémentaire dS :

$$\overrightarrow{dC} = \vec{j}_s dS$$

- l'élément de courant correspondant à l'intensité du courant parcourant une longueur élémentaire dl :

$$\overrightarrow{dC} = I\overrightarrow{dl}$$



Tube de courant

Remarque :

- Il n'existe pas de densité linéique de courant.
- La densité volumique de charges ρ ne s'identifie pas nécessairement à celle des charges mobiles ρ_m. Un métal globalement neutre (ρ = 0) peut être le siège de courants créés par les déplacements des électrons de conduction.

5.1.2 Principe de conservation de la charge

Soit un volume fini V de l'espace délimité par une surface fermée S, à un instant t la charge contenue dans ce volume est :

$$Q(t) = \iiint_V \rho(M,t) d\tau$$

Sa variation par unité de temps est donc :

$$\frac{dQ}{dt}(t)=\frac{d}{dt}\left(\iiint_V \rho(M,t)\,d\tau\right)=\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t}(M,t)\,d\tau$$

En utilisant la définition du courant :

$$\frac{dQ}{dt}(t)=I=-\oiint_S \vec{j}\cdot\overrightarrow{dS}$$

La conservation de la charge électrique se traduit donc par l'équation intégrale :

$$\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t}(M,t)\,d\tau=-\oiint_S \vec{j}\cdot\overrightarrow{dS}$$

En utilisant le théorème de Green-Ostrogradsky :

$$\oiint_S \vec{j}\cdot\overrightarrow{dS}=\iiint_V \left(div\,\vec{j}\right)d\tau \quad\Rightarrow\quad \iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t}(M,t)\,d\tau=-\iiint_V \left(div\,\vec{j}\right)d\tau$$

On obtient l'équation locale :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}(M,t)=-div\,\vec{j}$$

Principe de conservation de la charge électrique :

La charge électrique est une grandeur conservative. Ce principe se traduit par l'équation locale :

$$div\,\vec{j}+\frac{\partial \rho}{\partial t}=0 \qquad (1)$$

Avec :	j	=	Densité volumique de courants en $A.m^{-2}$
	ρ	=	Densité volumique de charges en $C.m^{-3}$

5.2 Equations de Maxwell dans le vide

L'objet de l'électromagnétisme est de décrire les interactions qui s'exercent à l'intérieur d'un système de particules chargées. Le premier postulat est :

La force agissant sur une charge ponctuelle q située à l'instant au point M et animée d'une vitesse v où règne un champ électromagnétique $\{\vec{E},\vec{B}\}$ est donnée par la force de Lorentz :

$$\vec{F}=q\left(\vec{E}(M,t)+\vec{v}\wedge\vec{B}(M,t)\right) \qquad (2)$$

Avec :	F	=	Force de Lorentz en N
	q	=	Charge portée par la particule en C
	E	=	Champ électrique en $V.m^{-1}$
	v	=	Vitesse de la particule en $m.s^{-1}$
	B	=	Champ magnétique en T

5.2.1 Formes locales

Le **champ électromagnétique** est caractérisé par un couple de vecteurs noté $\{\vec{E},\vec{B}\}$ où :

- $\vec{E}$ est le vecteur champ électrique (V.m^{-1})
- $\vec{B}$ est le vecteur champ magnétique (T)

Ce champ électromagnétique est crée au point M à l'instant t par la distribution $\{\rho,\vec{j}\}$. Il est régi par les quatre équations de Maxwell dans le vide :

- **Equation de Maxwell-Gauss** (MG):

$$div\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (3)$$

Avec : E = Champ électrique en V.m^{-1}
ρ = Densité volumique de charges en C.m^{-3}
ε_0 = Permittivité du vide (8,854.10^{-12} F.m^{-1})

- **Equation de Maxwell-Ampère** (MA):

$$\overrightarrow{rot}\vec{B}=\mu_0\vec{j}+\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \quad (4)$$

Avec : B = Champ magnétique en T
μ_0 = Perméabilité du vide (4π10^{-7} H.m^{-1})
j = Densité volumique de courants en A.m^{-2}
ε_0 = Permittivité du vide (8,854.10^{-12} F.m^{-1})
E = Champ électrique en V.m^{-1}

- **Equation de Maxwell-Thomson** (ou flux) (MT):

$$div\vec{B}=0 \quad (5)$$

Avec : B = Champ magnétique en T

- **Equation de Maxwell-Faraday** (MF):

$$\overrightarrow{rot}\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \quad (6)$$

Avec : E = Champ électrique en V.m^{-1}
B = Champ magnétique en T

<u>Remarques :</u>

- Les équations MG et MA expriment le lien entre le champ $\{\vec{E},\vec{B}\}$ et sa source $\{\rho,\vec{j}\}$.

- Les équations de Maxwell forment un système d'équations couplées vis-à-vis des champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$.

- Les équations de Maxwell sont linéaires par rapport aux sources $\{\rho,\vec{j}\}$. Le champ $\{\vec{E},\vec{B}\}$ obéit donc au théorème de superposition.

- On retrouve l'équation locale de conservation de la charge :

$$
\begin{aligned}
div\left(\overrightarrow{rot}\vec{B}\right) &= \mu_0 div\vec{j} + \mu_0\varepsilon_0 div\left(\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right) \quad (d'après\ MA)\\
&= \mu_0 div\vec{j} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial div\vec{E}}{\partial t}\\
&= \mu_0 div\vec{j} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\frac{\rho}{\varepsilon_0}}{\partial t} \quad (d'après\ MG)\\
&= \mu_0 div\vec{j} + \mu_0\frac{\partial\rho}{\partial t}\\
&= 0
\end{aligned}
$$

5.2.2 Formes intégrales et interprétation

5.2.2.1 Equation de Maxwell-Gauss

L'équation de Maxwell-Gauss exprime la validité générale du théorème de Gauss :

$$div\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad\Leftrightarrow\quad \oiint_{\Sigma}\vec{E}\cdot\overrightarrow{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_V \rho d\tau$$

5.2.2.2 Equation de Maxwell-Ampère

En régime permanent, on a introduit le théorème d'Ampère, ainsi que sa formulation locale :

$$\oint_{\Gamma}\vec{B}\cdot\overrightarrow{dl} = \mu_0 I_{int} \quad\Leftrightarrow\quad \overrightarrow{rot}\vec{B} = \mu_0\vec{j}$$

Or, si l'on reprend la démonstration de la conservation de la charge à partir de cette équation locale, on aboutit à :

$$div\vec{j} = 0$$

Il y a donc contradiction.

On introduit donc un courant fictif nommé densité de courant de déplacement $\overrightarrow{j_D}$ tel que :

$$\overrightarrow{rot}\vec{B} = \mu_0\left(\vec{j} + \overrightarrow{j_D}\right) \quad avec \quad \overrightarrow{j_D} = \varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

Sa signification physique est la suivante : un champ électrique dépendant du temps est, au même titre qu'un courant, une source de champ magnétique. On retrouve bien le théorème d'Ampère en régime permanent.

L'équation de Maxwell-Ampère exprime la forme généralisée du théorème d'Ampère :

$$\overrightarrow{rot}\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \quad\Leftrightarrow\quad \oint_{\Gamma}\vec{B}\cdot\overrightarrow{dl} = \mu_0\iint_S\left(\vec{j} + \overrightarrow{j_D}\right).\overrightarrow{dS} \quad avec \quad \overrightarrow{j_D} = \varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

5.2.2.3 Equation de Maxwell-Thomson

L'équation de Maxwell-Thomson exprime le caractère conservatif du flux magnétique en régime variable :

$$div\vec{B}=0 \quad \Leftrightarrow \quad \oiint_S \vec{B}\cdot\vec{dS}=0$$

5.2.2.4 Equation de Maxwell-Faraday

L'équation de Maxwell-Faraday exprime qu'un champ magnétique dépendant du temps donne naissance à un champ électrique à circulation non conservative. Cette équation rend compte du phénomène d'induction électromagnétique :

$$\overrightarrow{rot}\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \quad \Leftrightarrow \quad \oint_C \vec{E}\cdot\vec{dl}=-\frac{d}{dt}\iint_S \vec{B}\cdot\vec{dS}$$

En régime permanent, on retrouve bien le fait que le champ électrique est à circulation conservative.

5.3 Existence des potentiels $\left(\vec{A},V\right)$

5.3.1 Liens entre potentiels et champs

L'équation de Maxwell-Thomson assure l'existence d'un potentiel vecteur pour $\vec{B}$:

$$div\vec{B}=0 \quad \Rightarrow \quad \vec{B}=\overrightarrow{rot}\left(\vec{A}\right)$$

L'équation de Maxwell-Faraday donne :

$$\overrightarrow{rot}\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=-\frac{\partial\overrightarrow{rot}\vec{A}}{\partial t}=-\overrightarrow{rot}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$$

$$\overrightarrow{rot}\left(\vec{E}+\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)=\vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{E}+\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}=-\overrightarrow{grad}V$$

Les équations de Maxwell-Thomson et de Maxwell-Faraday assurent l'existence d'un potentiel scalaire V et d'un potentiel vecteur $\vec{A}$ tel que :

$$\vec{B}=\overrightarrow{rot}\left(\vec{A}\right) \quad et \quad \vec{E}=-\overrightarrow{grad}V-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \tag{7}$$

Avec :	B	=	Champ magnétique en T
	A	=	Potentiel vecteur en en Wb.m^{-1}
	E	=	Champ électrique en V.m^{-1}
	V	=	Potentiel scalaire en V

5.3.2 Non unicité des potentiels

Les potentiels ne sont pas uniques :

- un champ de rotationnel est défini à un gradient près
- un champ de gradient est défini à une constante près.

Soit $\left(\vec{A_0},V_0\right)$un couple de potentiel pour le champ électromagnétique $\left\{\vec{E},\vec{B}\right\}$; pour toute fonction scalaire φ des coordonnées d'espace et du temps, le couple $\left(\vec{A_0}+\overrightarrow{grad}\varphi,V_0-\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)$ convient également.

5.4 Approximation des régimes quasi-stationnaires (ARQS)

5.4.1 Conditions de validité

Définition :
On appelle **approximation des régimes quasi-stationnaires** (ARQS) l'étude de l'électromagnétisme dans le cas où les temps de propagation sont négligeables devant la période des signaux.
Si l'on note τ le temps de propagation du signal et T la période, alors l'ARQS est applicable si :

$$\tau \ll T$$

Exemples :
Lors de TP d'électrocinétique, la fréquence de signaux est en général inférieure à 1 MHz et les dimensions des circuits inférieures à 50 cm. La période est signaux est alors très supérieure aux temps de propagation :

$$T \gg \frac{d}{c} \quad \Leftrightarrow \quad 1\mu s \gg 1{,}5 ns$$

5.4.2 Equations de Maxwell dans le cadre de l'ARQS

Dans un **conducteur** et dans le cadre de **l'ARQS**, les équations de Maxwell s'écrivent :

$$\begin{aligned}
&(MG) \quad div\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\
&(MA) \quad \overrightarrow{rot}\vec{B} = \mu_0 \vec{j} \\
&(MT) \quad div\vec{B} = 0 \\
&(MF) \quad \overrightarrow{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}
\end{aligned} \tag{8}$$

Dans les conducteurs, le courant de déplacement est négligeable devant le courant de conduction :

$$\left\|\vec{j}_D\right\| \ll \left\|\vec{j}\right\| \tag{9}$$

Remarques :
- (MA) et (MT) sont les mêmes qu'en régime permanent, cela confirme que le champ magnétique est bien le même en régime permanent et dans le cas de l'ARQS.
- Les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont toujours couplés (MF).
- L'équation de conservation de la charge se simplifie en :

$$div\,\vec{j} = 0$$

On retrouve la loi des nœuds que l'on utilise en électrocinétique.

5.4.3 Cas particulier des régimes stationnaires (ou permanents)

Dans le cadre des régimes stationnaires (ou permanents), les dérivées temporelles s'annulent. Les équations de Maxwell s'écrivent :

$$\begin{aligned}
&(MG) \quad div\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\
&(MA) \quad \overrightarrow{rot}\vec{B} = \mu_0 \vec{j} \\
&(MT) \quad div\vec{B} = 0 \\
&(MF) \quad \overrightarrow{rot}\vec{E} = \vec{0}
\end{aligned} \tag{10}$$

Remarque :

Les équations précédentes sont découplées, il est possible d'étudier séparément le champ électrostatique $\vec{E}$ et le champ magnétostatique $\vec{B}$. On retrouve toutes les expressions étudiées en chapitres 1 et 2.

5.5 Relations de passage

Les relations de passage suivantes se substituent aux équations de Maxwell dans le cas d'une modélisation surfacique des sources.

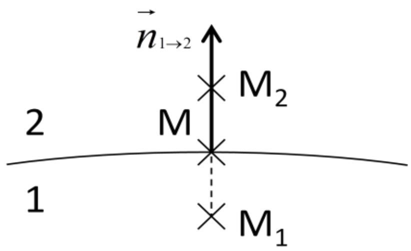
A la traversée d'une nappe, séparant deux milieux 1 et 2, portant les charges σ et les courants surfaciques $\vec{j_s}$ le champ électromagnétique présente une discontinuité finie :

$$\begin{aligned}
&\vec{E}(M_2) - \vec{E}(M_1) = \frac{\sigma(M)}{\varepsilon_0}\vec{n}_{1\to 2} \\
&\vec{B}(M_2) - \vec{B}(M_1) = \mu_0 \vec{j_s}(M) \wedge \vec{n}_{1\to 2}
\end{aligned} \tag{11}$$

Avec :

σ	=	Densité surfacique de charge en C.m^{-2}
ε_0	=	Permittivité du vide (8,854.10^{-12} F.m^{-1})
$\vec{n}_{1\to 2}$	=	Normale à la surface orientée du milieu 1 vers le milieu 2
μ_0	=	Perméabilité du vide (4π10^{-7} H.m^{-1})
j_s	=	Densité surfacique de courant en A.m^{-1}

Il y a toujours continuité de la composante tangentielle pour $\vec{E}$ et continuité de la composante normale pour $\vec{B}$. La composante normale de $\vec{E}$ et la composante tangentielle de $\vec{B}$ peuvent présenter une discontinuité en présence de charges ou de courants superficiels.



A retenir et savoir faire :

- Connaître les distributions de charges et de courants.
- Connaître la loi de la conservation de la charge
- Connaître les équations de Maxwell (formes locales et intégrales) en général, dans l'ARQS et en régime permanent.
- Connaître les conditions de validité de l'ARQS.
- Connaître les potentiels scalaires et vecteurs dérivés des champs.
- Connaître les relations de passage à une interface.

5.6 Exercices d'application

5.6.1 Champ électromagnétique

On considère une situation dans laquelle le champ électrique s'écrit :

$$\vec{E}(x,t) = E_0 \cos(\omega t - kx)\vec{u_x}$$

En déduire l'expression du champ magnétique. Puis calculer séparément les densités de charge et de courant et vérifier la relation qui les lie.

5.6.2 Câble coaxial

Un câble coaxial cylindrique d'axe (Oz), de rayon intérieur a et de rayon extérieur b est le siège d'un champ électromagnétique dont les champs électrique et magnétique sont, en coordonnées cylindriques d'axe (Oz) :

$$\vec{E}(M,t) = E(r)\cos(\omega t - kz)\vec{u_r} \quad et \quad \vec{B}(M,t) = \vec{B_0}(r)\cos(\omega t - kz)$$

avec ω = ck, où c est la vitesse de la lumière dans le vide.

Les cylindres de rayon a et b sont des conducteurs parfaits : les champs électrique et magnétique sont nuls pour r > b et pour r < a. L'espace situé entre les cylindres de rayon a et b est vide.

1. Calculer E(r) en fonction de r, a et $E_a = \lim_{r \to a+} E(r)$.

2. Calculer $\vec{B_0}(r)$. On donne :

$$\overrightarrow{rot}(\lambda\vec{a}) = \lambda\overrightarrow{rot}\vec{a} + \overrightarrow{grad}\lambda \wedge \vec{a}$$

3. Déterminer les densités surfaciques de charges σ_a et σ_b, et de courant $\overrightarrow{j_{s,a}}$ et $\overrightarrow{j_{s,b}}$, sur les armatures cylindriques (en r = a et r = b). Vérifier la compatibilité de ces expressions avec l'équation de conservation de la charge.

4. Déterminer le potentiel scalaire V (r, z, t) et le potentiel vecteur $\vec{A}(r,z,t)$ dont dérive le champ électromagnétique entre les conducteurs.

On supposera que $\vec{A} = A(r,z,t)\vec{u_z}$ et on montrera que $A(r,z,t) = \frac{a}{c}\ln\frac{r}{b}E_a\cos(\omega t - kz)$ convient.

On prendra V = 0 en tout point du conducteur extérieur.

5. Soit U(z, t) = V (a, z, t) le potentiel du conducteur intérieur à l'abscisse z à l'instant t et I(z, t) l'intensité du courant électrique porté par ce même conducteur.

Montrer que Z_c =U(z, t)/I(z, t) est indépendant de z et de t. Donner son expression.

5.6.3 Courants électriques et courants de déplacement

On se place dans un milieu ohmique de conductivité ϒ$\left(\vec{j} = \gamma\vec{E}\right)$, en régime sinusoïdal forcé de fréquence ν.

1) Montrer que $\left|\vec{j}\right| > \left|\overrightarrow{j_D}\right|$ pour peu que $\nu < \nu_{max}$. Exprimer ν_{max} en fonction de ε_0 et ϒ.

2) Application numérique :

- dans le cas du cuivre (ϒ = $5{,}8.10^7 S.m^{-1}$) ;
- dans le cas de l'eau (ϒ = $1{,}\ 0.10^{-9} S.m^{-1}$).

Déplacement d'un cadre conducteur (chap III)
http://www.f-vandenbrouck.org/induction3.html

5.7 Exercices

5.7.1 Rôle du courant de déplacement

Une sphère conductrice de centre O et rayon R, initialement non chargée, est bombardée de toute part par des particules α4 avec un débit N ; on suppose qu'elle les absorbe.

On propose une description simplifiée en considérant un modèle continu de densité de courant j radiale et fonction de la seule distance à O notée r. La vitesse des particules est supposée sensiblement constante $\vec{v} = -v_0 \overrightarrow{u_r}$. Les expressions des différentes grandeurs sont recherchées dans l'espace extérieur à la sphère : r>R.

a) Proposer une expression pour j(M). En déduire la densité volumique de charges ρ(M).

b) Après avoir soigneusement examiné les symétries et invariances du problème, déterminer les champs électrique et magnétique en tout point.

c) Examiner l'équation de Maxwell-Ampère et discuter l'intérêt du terme de courant de déplacement.