Cours VI : Electromagnétisme

6 Energie électromagnétique

6.1 Densité volumique d'énergie électromagnétique

6.1.1 Cas particulier du condensateur plan

On rappelle l'expression de la densité volumique d'énergie stockée dans un condensateur, déjà démontrée en 1.4.4. En électrocinétique, l'énergie stockée dans un condensateur est donnée par :

$$U_E = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} = \frac{1}{2}Cu^2$$

Nous avons démontré en 1.4.3 que la capacité d'un condensateur plan se mettait sous la forme :

$$C = \varepsilon_0 \frac{S}{d} \quad \Rightarrow \quad U_E = \frac{\varepsilon_0}{2}\frac{S}{d}u^2$$

Enfin, la tension aux bornes du condensateur, u, est directement liée à la différence de potentiel entre ses deux armatures et donc au champ électrique :

$$u = V_1 - V_2 = E_0 d \quad \Rightarrow \quad U_E = \frac{\varepsilon_0}{2} SdE_0^2$$

On en déduit que dans le cas d'un condensateur plan, la densité volumique d'énergie électrique est donnée par :

$$u_E = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2}$$

6.1.2 Cas particulier du solénoïde infini

On rappelle l'expression de la densité volumique d'énergie emmagasinée dans une bobine, déjà démontrée en 4.2.3. En électrocinétique, l'énergie emmagasinée dans une bobine est donnée par :

$$U_M = \frac{1}{2}Li^2$$

Nous avons démontré en 4.2.3 que l'inductance d'un solénoïde infini se mettait sous la forme :

$$L = \mu_0 N^2 \frac{S}{l} \quad \Rightarrow \quad U_M = \frac{1}{2}\mu_0 N^2 \frac{S}{l} i^2$$

Or, le courant traversant le solénoïde est directement lié au champ magnétique propre donné par :

$$B_0 = \mu_0 \frac{N}{l} i \quad \Rightarrow \quad U_M = \frac{1}{2}\frac{B_0^2}{\mu_0} Sl$$

On en déduit que dans le cas d'un solénoïde infini, la densité volumique d'énergie magnétique est donnée par :

$$u_M = \frac{B_0^2}{2\mu_0}$$

6.1.3 Densité volumique d'énergie électromagnétique

Définition :
Les champs électrique et magnétique régnant dans une portion de l'espace vide entraînent la localisation d'une énergie dont la densité volumique s'écrit :

$$u = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0} \qquad (1)$$

Avec :	u	=	Densité volumique d'énergie électromagnétique en $J.m^{-3}$
	ε_0	=	Permittivité du vide ($8{,}854.10^{-12}$ $F.m^{-1}$)
	E	=	Champ électrique en $V.m^{-1}$
	B	=	Champ magnétique en T
	μ_0	=	Perméabilité du vide ($4\pi 10^{-7}$ $H.m^{-1}$)

6.2 Puissance volumique cédée par le champ aux porteurs de charge

6.2.1 Expression générale

Une charge q plongée dans le champ électromagnétique $\{\vec{E},\vec{B}\}$ est soumise à la force de Lorentz :

$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v}\wedge\vec{B}\right)$$

Si la modélisation de la charge est volumique, de densité volumique de charges ρ, la force élémentaire exercée sur un volume dτ s'écrit :

$$\overrightarrow{dF} = \rho d\tau\left(\vec{E} + \vec{v}\wedge\vec{B}\right)$$

La puissance dP reçue par la charge dans le volume dτ est donc :

$$dP = \vec{v}\cdot\overrightarrow{dF} = \vec{v}\cdot\rho d\tau\vec{E} = \rho\vec{v}\cdot\vec{E}d\tau = \vec{j}\cdot\vec{E}d\tau$$

Définition :
La densité volumique de puissance cédée par le champ électromagnétique aux porteurs de charge est donnée par :

$$p = \frac{dP}{d\tau} = \vec{j}\cdot\vec{E} \qquad (2)$$

Avec :	p	=	Densité volumique de puissance en $W.m^{-3}$
	P	=	Puissance reçue en W
	j	=	Vecteur densité volumique de courant en $A.m^{-2}$
	E	=	Champ électrique en $V.m^{-1}$

6.2.2 Cas particulier d'un conducteur ohmique

6.2.2.1 Loi d'Ohm locale

Un conducteur est un milieu qui contient des charges libres: les porteurs de charges.

Loi d'Ohm locale :
Dans de nombreux cas, si le champ appliqué est suffisamment faible alors le vecteur densité de courant et le vecteur champ électrique sont liés par une relation empirique :

$$\vec{j} = \gamma \vec{E} \qquad (3)$$

Avec :	j	=	Vecteur densité volumique de courant en $A.m^{-2}$
	E	=	Champ électrique en $V.m^{-1}$
	ϒ	=	Conductivité du milieu en $S.m^{-1}$

Remarque :
La conductivité est une grandeur toujours positive.

6.2.2.2 Densité volumique de puissance cédée par effet Joule

On considère un conducteur cylindrique parcouru par une intensité I uniformément répartie et de conductivité ϒ uniforme. Il est de section S et longueur L. On peut alors exprimer le vecteur densité volumique de courant en fonction de l'intensité I :

$$j = \frac{I}{S}$$

D'après la loi d'Ohm locale, la puissance volumique cédée aux porteurs de charge se met sous la forme :

$$p = \vec{j} \cdot \vec{E} = \gamma \vec{E} \cdot \vec{E} = \gamma E^2$$

Ou encore :

$$p = \vec{j} \cdot \vec{E} = \vec{j} \cdot \frac{\vec{j}}{\gamma} = \frac{1}{\gamma} j^2 = \frac{1}{\gamma}\left(\frac{I}{S}\right)^2$$

En intégrant sur le volume :

$$P = pSL = \frac{1}{\gamma}\left(\frac{I}{S}\right)^2 SL = \frac{L}{\gamma S} I^2 = RI^2$$

Propriété :
La puissance dissipée par effet Joule s'identifie donc à la puissance cédée par le champ aux porteurs de charge du conducteur. Sa densité volumique de puissance se met sous la forme :

$$p = \gamma E^2 \qquad (4)$$

Avec :	p	=	Densité volumique de puissance en $W.m^{-3}$
	ϒ	=	Conductivité du milieu en $S.m^{-1}$
	E	=	Champ électrique en $V.m^{-1}$

Remarque :
- La puissance apportée aux porteurs de charge est donc toujours positive, ce qui signifie qu'elle est réellement apportée : le champ cède toujours de la puissance à la matière.
- En régime permanent, cette puissance ne peut pas être emmagasinée par les porteurs de charge, ils la cèdent au réseau au cours des chocs inélastiques, et le réseau la cède à son tour à l'atmosphère par conduction thermique ou rayonnement : c'est l'effet Joule.

6.3 Bilan d'énergie électromagnétique

6.3.1 Equation de conservation de l'énergie électromagnétique

On utilise un raisonnement similaire à celui utilisé pour la conservation de la charge électrique (5.1.2). Soit un volume fini V de l'espace délimité par une surface fermée S, à un instant t l'énergie électromagnétique 6.1.3) contenue dans ce volume est :

$$U = \iiint_V u\,d\tau = \iiint_V \left(\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0} \right) d\tau$$

La diminution de cette énergie se retrouve sous deux formes :

- puissance cédée à la matière, P, (ou aux porteurs de charges, voir 6.2.1)
- puissance évacuée à travers S sous forme de rayonnement, $P_{rayonnée}$.

Ainsi :

$$-\frac{dU}{dt} = P + P_{rayonnée} = \iiint_V \left(\vec{j} \cdot \vec{E} \right) d\tau + P_{rayonnée}$$

L'équation intégrale de conservation de la charge se met sous la forme :

$$\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t}(M,t)\,d\tau = -\oiint_S \vec{j} \cdot \overrightarrow{dS}$$

Par analogie, on écrira l'équation de conservation de l'énergie sous la forme :

$$-\frac{dU}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(\iiint_V u\,d\tau \right) = -\iiint_V \frac{\partial u}{\partial t} d\tau = \iiint_V \left(\vec{j} \cdot \vec{E} \right) d\tau + \oiint_S \vec{\Pi} \cdot \overrightarrow{dS}$$

Où $\vec{\Pi}$ est le vecteur densité de courant d'énergie.

On a donc l'équation intégrale de conservation de l'énergie électromagnétique suivante :

$$\iiint_V \frac{\partial u}{\partial t} d\tau = -\iiint_V \left(\vec{j} \cdot \vec{E} \right) d\tau - \oiint_S \vec{\Pi} \cdot \overrightarrow{dS}$$

En utilisant le théorème de Green-Ostrogradsky :

$$\oiint_S \vec{\Pi} \cdot \overrightarrow{dS} = \iiint_V \left(div\vec{\Pi} \right) d\tau \quad \Rightarrow \quad \iiint_V \frac{\partial u}{\partial t} d\tau = -\iiint_V \left(\vec{j} \cdot \vec{E} \right) d\tau - \iiint_V \left(div\vec{\Pi} \right) d\tau$$

On obtient l'équation locale :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\vec{j} \cdot \vec{E} - div\vec{\Pi}$$

<u>Principe de conservation de l'énergie électromagnétique</u>

L'énergie électromagnétique est une grandeur conservative. Ce principe se traduit par l'équation locale :

$$div\vec{\Pi} + \frac{\partial u}{\partial t} + \vec{j} \cdot \vec{E} = 0 \qquad (5)$$

Avec :	Π	=	Vecteur densité de courant d'énergie appelé **vecteur de Poynting** en $W.m^{-2}$
	u	=	Densité volumique d'énergie électromagnétique en $J.m^{-3}$
	j	=	Vecteur densité volumique de courant en $A.m^{-2}$
	E	=	Champ électrique en $V.m^{-1}$

6.3.2 Vecteur de Poynting

Définition :

Le vecteur densité de courant d'énergie ou **vecteur de Poynting** représente la densité surfacique de puissance rayonnée et s'écrit :

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \qquad (6)$$

Avec :	Π	=	Vecteur de Poynting en $W.m^{-2}$
	E	=	Champ électrique en $V.m^{-1}$
	B	=	Champ magnétique en T
	μ_0	=	Perméabilité du vide ($4\pi 10^{-7}$ $H.m^{-1}$)

Démonstration :

On multiplie l'équation de Maxwell-Ampère par le champ électrique :

$$\overrightarrow{rot}\vec{B} \cdot \vec{E} = \mu_0 \vec{j} \cdot \vec{E} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \vec{E}$$

On a l'identité suivante :

$$div\left(\vec{E} \wedge \vec{B}\right) = \vec{B} \cdot \overrightarrow{rot}\vec{E} - \vec{E} \cdot \overrightarrow{rot}\vec{B}$$

Alors :

$$\vec{B} \cdot \overrightarrow{rot}\vec{E} - div\left(\vec{E} \wedge \vec{B}\right) = \mu_0 \vec{j} \cdot \vec{E} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \vec{E}$$

D'après l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\vec{B} \cdot \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) - div\left(\vec{E} \wedge \vec{B}\right) = \mu_0 \vec{j} \cdot \vec{E} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \vec{E}$$

$$\vec{B} \cdot \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \vec{E} = \mu_0 \vec{j} \cdot \vec{E} + div\left(\vec{E} \wedge \vec{B}\right)$$

$$\frac{1}{\mu_0} \vec{B} \cdot \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) - \varepsilon_0 \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{j} \cdot \vec{E} + \frac{1}{\mu_0} div\left(\vec{E} \wedge \vec{B}\right)$$

$$-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0} + \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2\right) = \vec{j} \cdot \vec{E} + div\left(\frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}\right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \vec{j} \cdot \vec{E} + div\left(\frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}\right) = 0$$

On retrouve l'équation locale de conservation de l'énergie électromagnétique. Le vecteur de Poynting a donc pour expression :

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$$

Définition :
La puissance rayonnée par le champ électromagnétique à travers une surface S est donc donnée par :

$$P_{rayonnée} = \oiint_S \vec{\Pi} \cdot \vec{dS} \qquad (7)$$

Avec : $P_{rayonnée}$ = Puissance rayonnée en W
Π = Vecteur de Poynting en W.m^{-2}

6.3.3 Interprétation physique

L'équation de conservation de l'énergie électromagnétique est donnée par :

$$div\vec{\Pi} + \frac{\partial u}{\partial t} + \vec{j} \cdot \vec{E} = 0$$

Elle est composée de trois termes :

- Le premier terme correspond à la puissance rayonnée à travers la surface (S)
- Le second terme fait intervenir l'énergie électromagnétique contenue dans le volume (V)
- Le troisième terme correspond à la puissance cédée par le champ aux porteurs de charge.

On peut faire l'analogie avec un bilan de population :

- Le premier terme est analogue du flux migratoire par unité de temps (en comptant positivement l'émigration)
- Le second terme est analogue à la variation de population
- Le troisième terme est analogue au bilan naissances/décès par unité de temps (à condition de compter positivement les décès).

On a ainsi :

$$\Delta_{population} = -(décès - naissance) - émigration$$

Exemple : Cas d'un conducteur ohmique
On considère un conducteur cylindrique parcouru par une intensité I uniformément répartie et de conductivité ϒ uniforme. Il est de section S, de longueur L et dirigé selon Oz. On a vu en 6.2.2.2 que la puissance cédée aux porteurs de charge était due à l'effet Joule et égale à :

$$P = RI^2$$

On cherche maintenant à calculer la puissance rayonnée. On a montré en 2.6.4 que le champ magnétique crée par un cylindre parcouru par une densité de courant uniforme j était :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\vec{e_\theta}$$

Et on a d'après la loi d'Ohm locale :

$$\vec{E} = \frac{\vec{j}}{\gamma} = \frac{I}{\gamma S}\vec{e_z}$$

Alors le vecteur de Poynting se met sous la forme :

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{1}{\mu_0}\left(\frac{I}{\gamma S}\vec{e_z}\right) \wedge \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\vec{e_\theta} = -\frac{I^2}{2\pi\gamma S r}\vec{e_r}$$

On constate que le vecteur de Poynting est radial et dirigé vers l'intérieur du cylindre. L'apport énergétique se fait latéralement. Or, la surface latérale du cylindre est donnée par 2πrL d'où :

$$P_{rayonnée} = \oiint_S \overrightarrow{\Pi} \cdot \overrightarrow{dS} = -\frac{I^2}{2\pi\gamma Sr} 2\pi rL = -\frac{L}{\gamma S} I^2 = -RI^2$$

Donc la puissance entrant par rayonnement dans le cylindre est entièrement convertie en puissance transférée aux porteurs (ou effet Joule). Aucune énergie n'est stockée dans un conducteur ohmique. Ce résultat est bien celui attendu.

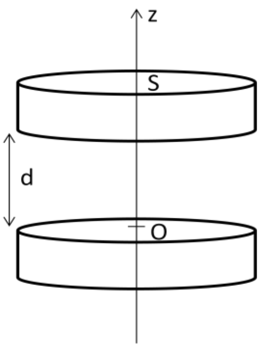
A retenir et savoir faire :

- Connaître l'expression de l'énergie électromagnétique et savoir la calculer.
- Connaître l'expression du vecteur de Poynting, savoir le calculer ainsi que son flux et connaître la signification physique de ce flux.
- Savoir faire un bilan d'énergie.

6.4 Exercices d'application

6.4.1 Charge d'un condensateur

On effectue le bilan énergétique d'un condensateur lors de sa charge très lente (grandeurs stationnaires). On raisonne sur un modèle de condensateur plan, de section circulaire S, d'axe Oz et de distance inter-armatures d.



On note q(t) le charge de l'armature du condensateur située en z = d.

a) Quelle est l'expression du champ électrique entre les deux armatures ? La variation du champ électrique est à l'origine de l'existence d'un courant de déplacement. Quelle est son expression ?

b) Quelle est l'expression du champ magnétique entre les deux armatures ? (Utiliser le théorème d'Ampère)

c) Quelle est l'expression du vecteur de Poynting ? Exprimer alors la puissance rayonnée.

d) Faire un bilan d'énergie. Conclure.

6.5 Exercices

6.5.1 Câble coaxial

Une ligne coaxiale est constituée de deux cylindres C_1 et C_2 infinis d'épaisseur très faible, de rayon a et b, parcourus par des intensités I et -I. On note V_1 et V_2 les potentiels des deux cylindres et on néglige toute chute de tension le long de la ligne.

a) Calculer le vecteur de Poynting en tout point situé entre les conducteurs.

b) En déduire l'expression du flux de ce vecteur à travers un plan de section droite. Exprimer en fonction de V_1, V_2 et I. Conclure.