Cours VI : Electromagnétisme

7 Propagation d'ondes électromagnétiques dans le vide

7.1 Equations de propagation des champs électrique et magnétique dans une région sans charges ni courants

Dans le vide, en absence de charges et courants, on peut simplifier les équations de Maxwell sous la forme :

$$\begin{aligned} &(MG) \quad div\vec{E} = 0 \\ &(MA) \quad \overrightarrow{rot}\vec{B} = \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ &(MT) \quad div\vec{B} = 0 \\ &(MF) \quad \overrightarrow{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{aligned} \tag{1}$$

Alors, pour le champ électrique, en utilisant l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\left.\begin{aligned} &\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}\vec{E}\right) = \overrightarrow{rot}\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) \\ &\underbrace{\overrightarrow{grad}\left(div\vec{E}\right)}_{=\vec{0}} - \vec{\Delta}\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\overrightarrow{rot}\vec{B}\right) \\ &\vec{\Delta}\vec{E} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) \quad d'après\left(MA\right)+\left(MG\right) \end{aligned}\right\} \vec{\Delta}\vec{E} - \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

Et pour le champ magnétique, en utilisant l'équation de Maxwell-Ampère :

$$\left.\begin{aligned} &\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}\vec{B}\right) = \overrightarrow{rot}\left(\mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) \\ &\underbrace{\overrightarrow{grad}\left(div\vec{B}\right)}_{=\vec{0}} - \vec{\Delta}\vec{B} = \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(\overrightarrow{rot}\vec{E}\right) \\ &\vec{\Delta}\vec{B} = \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) \quad d'après\left(MF\right)+\left(MT\right) \end{aligned}\right\} \vec{\Delta}\vec{B} - \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

Propriété :
Dans le vide, dans une région sans charges ni courants, les champs électrique et magnétique satisfont la même équation de propagation ou équation d'onde, appelée **équation de d'Alembert** :

$$\vec{\Delta}\vec{E} - \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \quad et \quad \vec{\Delta}\vec{B} - \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0} \qquad (2)$$

Avec : E = Champ électrique en $V.m^{-1}$
μ_0 = Perméabilité du vide ($4\pi 10^{-7}$ $H.m^{-1}$)
ε_0 = Permittivité du vide ($8{,}854.10^{-12}$ $F.m^{-1}$)
B = Champ magnétique en T

Remarque :
Dans l'équation d'onde, la grandeur $\mu_0\varepsilon_0$ est homogène à l'inverse d'une vitesse au carré. On appelle cette vitesse la célérité de l'onde ou la vitesse de propagation de l'onde. Dans le vide, est elle égale à :

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} = 3.10^8 m.s^{-1}$$

L'onde électromagnétique se propage donc dans le vide à la vitesse de la lumière. On retiendra :

$$\mu_0\varepsilon_0 c^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \vec{\Delta}\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \quad et \quad \vec{\Delta}\vec{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0} \qquad (3)$$

Avec : μ_0 = Perméabilité du vide ($4\pi 10^{-7}$ $H.m^{-1}$)
ε_0 = Permittivité du vide ($8{,}854.10^{-12}$ $F.m^{-1}$)
c = Vitesse de propagation dans le vide (3.10^8 $m.s^{-1}$)
E = Champ électrique en $V.m^{-1}$
B = Champ magnétique en T

Cette équation intervient souvent en physique : en électromagnétisme, en mécanique (cordes vibrantes), en acoustique (ondes sonores), en mécanique des fluides (phénomènes de houle), en électricité (lignes électriques), en thermodynamique (transferts de chaleurs), …

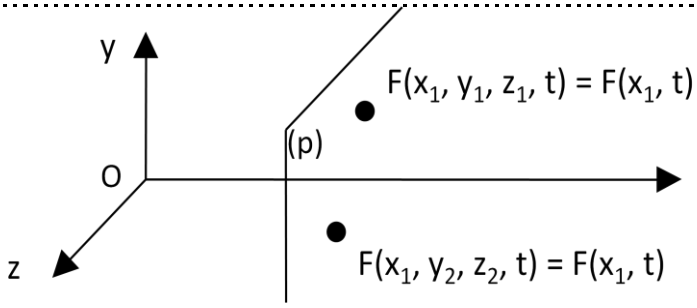
7.2 Structure de l'onde plane progressive transversale

7.2.1 Onde plane progressive (OPP)

Soit la fonction F décrivant la propagation d'une onde, elle est solution de l'équation d'onde (2).

Définition :
On dit qu'une onde est **plane** si, à chaque instant, la fonction F a la même valeur en tout point d'un plan perpendiculaire à une direction fixe définie par un vecteur unitaire $\vec{n}$ et appelée **direction de propagation**.

Exemple :
En coordonnées cartésiennes, la fonction F décrit une onde plane si, par exemple, se propage selon x et est indépendante de y et z. Elle ne dépend donc que d'une coordonnée, x et du temps, t.



Si F est une fonction scalaire, on peut alors simplifier l'équation d'onde sous la forme :

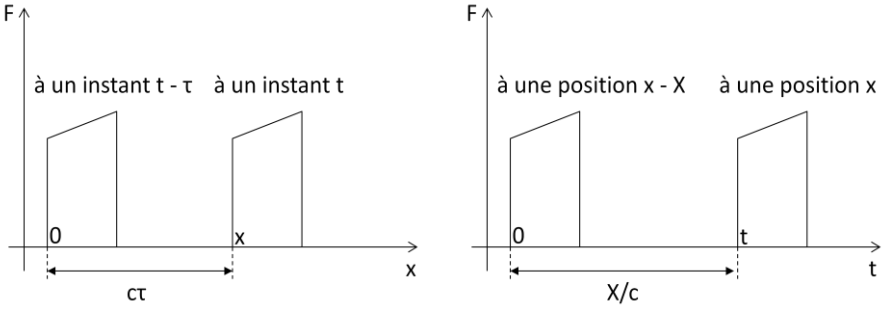
$$\Delta F - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = 0$$

Si F est une fonction vectorielle, on peut simplifier l'équation d'onde sous la forme :

$$\vec{\Delta}\vec{F} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{F}}{\partial t^2} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 F_x}{\partial x^2} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 F_x}{\partial t^2} = 0 \\ \dfrac{\partial^2 F_y}{\partial x^2} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 F_y}{\partial t^2} = 0 \\ \dfrac{\partial^2 F_z}{\partial x^2} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 F_z}{\partial t^2} = 0 \end{cases}$$

Définition :
L'onde plane est de plus **progressive** quand le signal se propage dans un sens déterminé.

Exemple :
En coordonnées cartésiennes, l'onde plane précédente est progressive si elle se propage selon les x croissants. Supposons qu'elle se propage à la vitesse constante, c.



La durée de propagation entre 0 et x est de τ.

$$F(x,t) = F(0,t-\tau) = F\left(0,t-\frac{x}{c}\right)$$

Ou bien entre 0 et t, l'onde se propage de x-X à x.

$$F(x,t) = F(x-X,0) = F(x-ct,0)$$

Ce signal est donc déterminé par une fonction d'une seule variable : t-x/c ou x-ct.

Si le signal se propage suivant les x décroissants à la vitesse constante c, alors la variable devient x+ct.

7.2.2 Solution de l'équation de propagation

En reprenant l'exemple précédent, on vérifie ici qu'une solution de l'équation d'onde est du type :

$$F(x,t) = f(x+ct) + g(x-ct)$$

Posons u = x+ct et v = x-ct, alors :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 \quad \frac{\partial u}{\partial t} = c \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 1 \quad \frac{\partial v}{\partial t} = -c$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \quad et \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right).\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial v} \quad et \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial g}{\partial v}\right) = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial g}{\partial v}\right).\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial t} = c\frac{\partial f}{\partial u} \quad et \quad \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(c\frac{\partial f}{\partial u}\right) = c\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right).\frac{\partial u}{\partial t} = c^2\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}$$

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \frac{\partial g}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial t} = -c\frac{\partial g}{\partial v} \quad et \quad \frac{\partial^2 g}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(-c\frac{\partial g}{\partial v}\right) = -c\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial g}{\partial v}\right).\frac{\partial v}{\partial t} = c^2\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}$$

Alors :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} \quad et \quad \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + c^2\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}\right)$$

Or, la fonction F doit vérifier l'équation d'onde :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}\right) - \frac{1}{c^2}c^2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}\right) = 0$$

On retiendra :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = c\frac{\partial f}{\partial x} \quad et \quad \frac{\partial g}{\partial t} = -c\frac{\partial g}{\partial x}$$

Propriété :

Les solutions de l'équation de propagation unidimensionnelle peuvent s'écrire comme la superposition de deux ondes planes progressives :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad F(x,t) = f(x+ct) + g(x-ct)$$

Avec : - f(x+ct) : propagation à la vitesse c suivant les x décroissants
- g(x-ct) : propagation à la vitesse c suivant les x croissants

On supposera dans la suite que les champs électrique et magnétique ne dépendent que de x et t et se propagent suivant x croissant, on a donc :

$$\vec{E} = \vec{E}(x-ct) = \begin{cases} E_x(x-ct) \\ E_y(x-ct) \\ E_z(x-ct) \end{cases} \quad et \quad \vec{B} = \vec{B}(x-ct) = \begin{cases} B_x(x-ct) \\ B_y(x-ct) \\ B_z(x-ct) \end{cases}$$

7.2.3 Transversalité des champs

Dans une région sans charges, le champ électrique est à flux conservatif :

$$(MG) \quad div\vec{E} = 0$$

Alors, en coordonnées cartésiennes :

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial E_x}{\partial x} = 0 \quad or \quad \frac{\partial E_x}{\partial x} = -\frac{1}{c}\frac{\partial E_x}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad E_x = cte$$

On suppose qu'il n'y a pas de champ statique, alors $E_x = 0$. Le champ électrique n'a pas de composantes suivant la direction de propagation, on dit que le champ est transverse.

De même, on a d'après l'équation de Maxwell-Thomson :

$$(MT) \quad div\vec{B} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial B_x}{\partial x} = -\frac{1}{c}\frac{\partial B_x}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad B_x = cte = 0$$

Propriété :
Les champs électrique et magnétique n'ont pas de composantes suivant la direction de propagation. Les vecteurs sont perpendiculaires à la direction de propagation, on les qualifie de **transverses**.

D'après l'équation de Maxwell-Faraday, on a :

$$\overrightarrow{rot}\vec{E} = \begin{pmatrix} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{\partial E_z}{\partial x} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = \frac{\partial E_y}{\partial x} \end{pmatrix} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial B_x}{\partial t} = 0 \\ -\frac{\partial B_y}{\partial t} \\ -\frac{\partial B_z}{\partial t} \end{pmatrix}$$

$$-\frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{\partial B_y}{\partial t} = c\frac{\partial B_y}{\partial x} \quad et \quad \frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t} = c\frac{\partial B_z}{\partial x}$$

Alors, en intégrant :

$$E_z = -cB_y + cte = -cB_y \quad et \quad E_y = cB_z + cte = cB_z$$

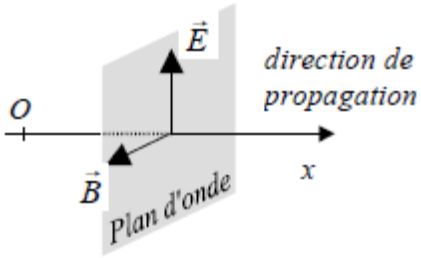
On peut traduire ces deux expressions par une seule expression vectorielle :

$$\vec{B} = \frac{1}{c}\left(-E_z\overrightarrow{u_y} + E_y\overrightarrow{u_z}\right)$$

Propriété :
Pour une onde plane progressive (suivant Ox) les champs électrique et magnétique sont **transverses**. Ils forment avec la direction de propagation un trièdre direct.

$$\vec{B}(x-ct) = \frac{1}{c}\overrightarrow{u_x} \wedge \vec{E}(x-ct) \qquad (4)$$

Avec : B = Champ magnétique en T
c = Vitesse de propagation dans le vide (3.10^8 m.s^{-1})
E = Champ électrique en V.m^{-1}



7.3 Cas particulier de l'onde plane progressive monochromatique (ou harmonique)

7.3.1 Définition et notation

Définition :

Une onde plane progressive est dite **monochromatique** si c'est une fonction sinusoïdale de fréquence f (ou pulsation ω). Dans le cas où la propagation se fait selon les x croissants, elle s'écrit alors sous la forme :

$$F(x,t) = F(x-ct) = F_0 \cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{c}\right) + \varphi_0\right) \quad (5)$$

Avec : ω = Pulsation de l'onde en rad.s^{-1}

c = Vitesse de propagation dans le vide (3.10^8 m.s^{-1})

Remarques :

- Les termes F_0 et φ_0 sont des constantes.
- La **phase** de l'onde plane progressive monochromatique (OPPM) est alors définie par le terme en :

$$\phi = \omega\left(t - \frac{x}{c}\right) + \varphi_0 = \omega t - \frac{\omega}{c}x + \varphi_0$$

- Le **vecteur d'onde** donne la direction de propagation et est défini par :

$$\vec{k} = \frac{\omega}{c}\vec{u_x}$$

On peut donc réécrire la phase à l'aide du module du vecteur d'onde sous la forme :

$$\phi = \omega t - kx + \varphi_0$$

On voit alors apparaître une **double-périodicité** de la phase :

- en fonction du temps :

Pour un x donné, la fonction F est une fonction sinusoïdale du temps de période T = 2π/ω

- en fonction de l'espace :

Pour un t donné, la fonction F est une fonction sinusoïdale de la coordonnée x de période spatiale, λ, appelée la **longueur d'onde** telle que :

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{c}{f}$$

De manière plus générale, en utilisant le vecteur position $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$, on peut mettre la phase de l'onde sous la forme :

$$\phi = \omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} + \varphi_0$$

Exemple :
Ainsi, le champ électrique s'écrit :

$$\vec{E} = \begin{cases} 0 \\ E_y = E_{0y}\cos\left(\omega t - kx + \varphi_y\right) \\ E_z = E_{0z}\cos\left(\omega t - kx + \varphi_z\right) \end{cases}$$

Définition :
Une OPPH se propageant à la célérité c selon la direction donnée par un vecteur unitaire $\vec{n}$ est caractérisée par :

- sa **fréquence**, f, ou **pulsation**, ω :

$$\omega = 2\pi f \quad (6)$$

Avec : ω = Pulsation en $rad.s^{-1}$
f = Fréquence en Hz

- sa **longueur d'onde**, λ, ou **nombre d'onde**, σ :

$$\lambda = \frac{c}{f} \quad et \quad \sigma = \frac{1}{\lambda} \quad (7)$$

Avec : λ = Longueur d'onde en m
c = Vitesse de propagation dans le vide (3.10^8 $m.s^{-1}$)
f = Fréquence en Hz
σ = Nombre d'onde en m^{-1}

- son **vecteur d'onde**, k

$$\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda}\vec{n} = \frac{\omega}{c}\vec{n} \quad (8)$$

Avec : k = Vecteur d'onde en $rad.m^{-1}$
λ = Longueur d'onde en m
ω = Pulsation en $rad.s^{-1}$
c = Vitesse de propagation dans le vide (3.10^8 $m.s^{-1}$)

La phase de l'OPPH est donnée par :

$$\phi = \omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} + \varphi_0 \quad (9)$$

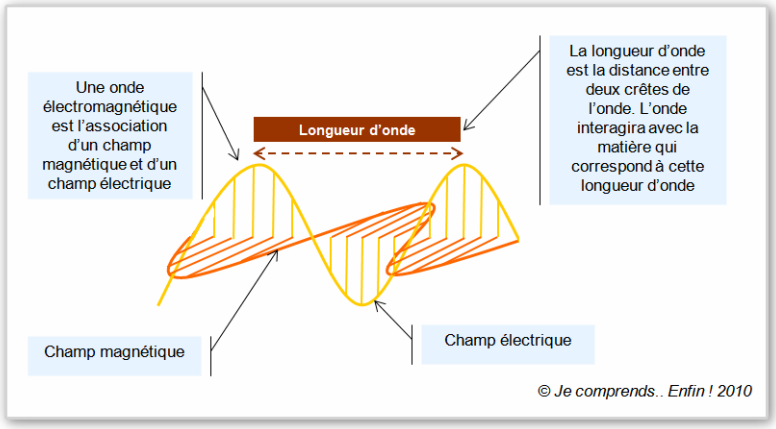
Elle présente une double-périodicité temporelle de période T et spatiale de période λ.

Remarque :
- L'OPPH est un modèle. Il est très intéressant car toute onde plane peut être exprimée comme la somme d'OPPH. Une onde plane progressive harmonique représente donc la composante élémentaire d'un paquet d'ondes.

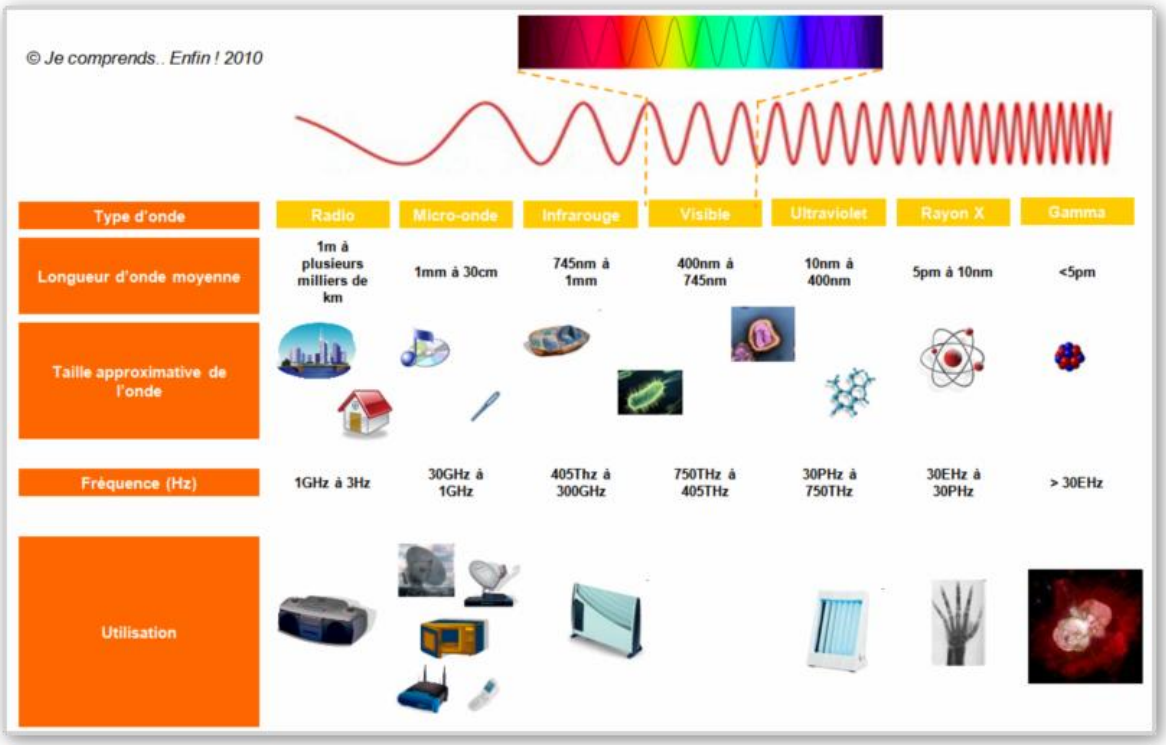
- Les relations établies pour les OPP sont toujours valables pour les OPPH, en particulier :
  - les champs électrique et magnétique sont transverses
  - le trièdre $\left(\vec{k},\vec{E},\vec{B}\right)$ est direct et on peut écrire :

$$\vec{B}=\frac{1}{\omega}\vec{k}\wedge\vec{E} \qquad (10)$$

Avec : B = Champ magnétique en T
ω = Pulsation en rad.s^{-1}
k = Vecteur d'onde en rad.m^{-1}
E = Champ électrique en V.m^{-1}



- Quelques valeurs de fréquence et de longueur d'onde pour les ondes électromagnétiques :



7.3.2 Vitesse de phase

7.3.2.1 Dans le vide

A un instant t donné, la phase de l'OPPH est constante dans tout plan perpendiculaire au vecteur d'onde (et donc à la direction de propagation). Ces plans sont appelés **plans d'onde** ou **équiphases**. On recherche la vitesse à laquelle se déplacent ces plans dans le cas d'une propagation selon les x croissants :

$$\phi = cte \quad \Rightarrow \quad d\phi = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega dt - k dx = 0 \quad \Rightarrow \quad v_\varphi = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega}{\frac{\omega}{c}} = c$$

Définition :
La vitesse de phase donne la vitesse de déplacement des plans équiphases selon :

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k} \qquad (11)$$

Avec : v_φ = Vitesse de phase en $m.s^{-1}$
ω = Pulsation de l'onde en $rad.s^{-1}$
k = Nombre d'onde en $rad.m^{-1}$

Pour une OPPH se propageant dans le vide, elle s'identifie à la vitesse c de propagation de l'onde :

$$v_\varphi = c$$

7.3.2.2 Dans un milieu diélectrique linéaire, homogène, isotrope (LHI), transparent

Définition :
On appelle **milieu diélectrique**, un milieu isolant où il n'y a pas de charges libres mais où des charges liées peuvent tout de même se déplacer légèrement. Ce milieu est de plus :

- **linéaire** : si ses propriétés obéissent à des équations linéaires
- **homogène** : si ses propriétés sont les mêmes en tout point
- **isotrope** : si ses propriétés sont les mêmes dans toutes les directions
- **transparent** : si aucune longueur d'onde n'est absorbée

Exemple :
Le verre est un milieu LHI transparent pour la lumière visible mais opaque pour les rayons infrarouges.

Dans un tel milieu, il faut remplacer la permittivité du vide ε_0 par la **permittivité du milieu** qui s'exprime en fonction de la permittivité relative ε_r :

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$$

On a ainsi les **équations de Maxwell** suivantes :

$$(MG) \quad div\vec{E} = 0 \quad (MA) \quad \overrightarrow{rot}\vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$(MT) \quad div\vec{B} = 0 \quad (MF) \quad \overrightarrow{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Et les **équations de propagation** suivantes :

$$\vec{\Delta}\vec{E} - \mu_0\varepsilon_0\varepsilon_r \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \quad ou \quad \vec{\Delta}\vec{E} - \frac{\varepsilon_r}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

$$\vec{\Delta}\vec{B} - \mu_0\varepsilon_0\varepsilon_r \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0} \quad ou \quad \vec{\Delta}\vec{B} - \frac{\varepsilon_r}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

La **vitesse de propagation** de l'onde électromagnétique dans un tel milieu est alors définie par :

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}} \quad tel\ que \quad \vec{\Delta}\vec{E} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

Le **vecteur d'onde** est alors défini en fonction de cette vitesse de propagation :

$$k = \frac{\omega}{v} = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_r}$$

Définition :

L'indice d'un milieu est défini comme la racine carrée de la permittivité relative du milieu :

$$n^2 = \varepsilon_r \quad \Rightarrow \quad k = n\frac{\omega}{c} \qquad (12)$$

Avec : n = Indice du milieu (sans dimension)
ε_r = Permittivité relative du milieu (sans dimension)
k = Vecteur d'onde en rad.m^{-1}
ω = Pulsation de l'onde en rad.s^{-1}
c = Vitesse de propagation dans le vide (3.10^8 m.s^{-1})

Remarque :

- On se place ici dans un milieu transparent, la permittivité du milieu ainsi que son indice sont donc réels. Dans un milieu LHI non transparent, ils possèdent une partie imaginaire qui caractérise l'absorption du milieu.
- La partie réelle de l'indice du milieu est appelé **indice de réfraction** et est utilisé en optique. On peut alors définir la **vitesse de phase** comme :

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}} = \frac{c}{n} \qquad (13)$$

Avec : v_φ = Vitesse de phase en m.s^{-1}
ω = Pulsation de l'onde en rad.s^{-1}
k = Nombre d'onde en rad.m^{-1}
c = Vitesse de propagation dans le vide (3.10^8 m.s^{-1})
ε_r = Permittivité relative du milieu (sans dimension)
n = Indice de réfraction (sans dimension)

L'indice de réfraction d'un milieu est supérieur à 1 alors la vitesse de phase égale à la vitesse de propagation de l'onde électromagnétique est toujours inférieur à la vitesse de propagation dans le vide, c.

7.3.3 Notation complexe

Nous avons montré que l'on pouvait mettre la fonction F représentant une OPPM sous la forme :

$$F = F_0 \cos\left(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} + \varphi_0\right)$$

Cette fonction peut être mise sous forme complexe telle que F=Re(F) :

$$\underline{F} = F_0 e^{j\omega t} e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}} e^{j\varphi_0}$$

Ainsi, lorsque le champ électrique se propage suivant les x croissants, il peut se mettre sous la forme d'un champ complexe :

$$\underline{\vec{E}} = \begin{cases} 0 \\ \underline{E_y} = E_{0y} e^{j\omega t} e^{-jkx} e^{j\varphi_y} \\ \underline{E_z} = E_{0z} e^{j\omega t} e^{-jkx} e^{j\varphi_z} \end{cases}$$

Ou encore :

$$\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E_0}} e^{j(\omega t - kx)} \quad avec \quad \underline{\vec{E_0}} = E_{0y} e^{j\varphi_y} \vec{u_y} + E_{0z} e^{j\varphi_z} \vec{u_z}$$

On peut alors simplifier les équations de Maxwell en utilisant les propriétés suivantes :

$$\frac{\partial \underline{\vec{E}}}{\partial t} = j\omega \underline{\vec{E}} \quad \frac{\partial^2 \underline{\vec{E}}}{\partial t^2} = -\omega^2 \underline{\vec{E}} \quad \frac{\partial \underline{\vec{E}}}{\partial x} = -jk_x \underline{\vec{E}} \quad \frac{\partial^2 \underline{\vec{E}}}{\partial x^2} = -k_x^2 \underline{\vec{E}}$$

Ce qui donne pour les opérateurs différentiels sans faire aucune hypothèse sur le champ électrique :

$$div\underline{\vec{E}} = \frac{\partial \underline{E_x}}{\partial x} + \frac{\partial \underline{E_y}}{\partial y} + \frac{\partial \underline{E_z}}{\partial z} = -jk_x \underline{E_x} - jk_y \underline{E_y} - jk_z \underline{E_y} = -j\vec{k}\cdot\underline{\vec{E}}$$

$$\overrightarrow{rot}\underline{\vec{E}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \underline{E_z}}{\partial y} - \frac{\partial \underline{E_y}}{\partial z} \\ \frac{\partial \underline{E_x}}{\partial z} - \frac{\partial \underline{E_z}}{\partial x} \\ \frac{\partial \underline{E_y}}{\partial x} - \frac{\partial \underline{E_x}}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -jk_y \underline{E_z} + jk_z \underline{E_y} \\ -jk_z \underline{E_x} + jk_x \underline{E_z} \\ -jk_x \underline{E_y} + jk_y \underline{E_x} \end{pmatrix} = -j \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \underline{E_x} \\ \underline{E_y} \\ \underline{E_z} \end{pmatrix} = -j\vec{k} \wedge \underline{\vec{E}}$$

$$\vec{\Delta}\underline{\vec{E}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \underline{E_x}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \underline{E_x}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \underline{E_x}}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 \underline{E_y}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \underline{E_y}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \underline{E_y}}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 \underline{E_z}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \underline{E_z}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \underline{E_z}}{\partial z^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k_x^2 \underline{E_x} - k_y^2 \underline{E_x} - k_z^2 \underline{E_x} \\ -k_x^2 \underline{E_y} - k_y^2 \underline{E_y} - k_z^2 \underline{E_y} \\ -k_x^2 \underline{E_z} - k_y^2 \underline{E_z} - k_z^2 \underline{E_z} \end{pmatrix} = -\left(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2\right) \begin{pmatrix} \underline{E_x} \\ \underline{E_y} \\ \underline{E_z} \end{pmatrix} = -k^2 \underline{\vec{E}}$$

Alors les équations de Maxwell se simplifient en :

$$\begin{bmatrix} (MG) & div\vec{E} = 0 \\ (MA) & \overrightarrow{rot}\vec{B} = \mu_0\varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ (MT) & div\vec{B} = 0 \\ (MF) & \overrightarrow{rot}\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} (MG) & -j\vec{k}\cdot\underline{\vec{E}} = 0 \\ (MA) & -j\vec{k}\wedge\underline{\vec{B}} = j\omega\mu_0\varepsilon_0\underline{\vec{E}} \\ (MT) & -j\vec{k}\cdot\underline{\vec{B}} = 0 \\ (MF) & -j\vec{k}\wedge\underline{\vec{E}} = -j\omega\underline{\vec{B}} \end{bmatrix}$$

$$(MG)\quad \vec{k}\cdot\underline{\vec{E}} = 0 \quad (MA)\quad \vec{k}\wedge\underline{\vec{B}} = -\frac{\omega}{c^2}\underline{\vec{E}}$$
$$(MT)\quad \vec{k}\cdot\underline{\vec{B}} = 0 \quad (MF)\quad \vec{k}\wedge\underline{\vec{E}} = \omega\underline{\vec{B}} \qquad (14)$$

La structure d'une OPPM s'en déduit immédiatement :

$$\vec{k}\cdot\underline{\vec{E}} = 0 \Rightarrow \vec{k}\ est\ perpendiculaire\ à\ \underline{\vec{E}}$$
$$\vec{k}\cdot\underline{\vec{B}} = 0 \Rightarrow \vec{k}\ est\ perpendiculaire\ à\ \underline{\vec{B}}$$
$$\vec{k}\wedge\underline{\vec{E}} = \omega\underline{\vec{B}} \Rightarrow \vec{B} = \frac{\vec{k}}{\omega}\wedge\vec{E}$$

L'équation de propagation se met sous la forme :

$$\vec{k}\wedge\left(\vec{k}\wedge\underline{\vec{E}}\right) = \vec{k}\wedge\left(\omega\underline{\vec{B}}\right)$$
$$\underbrace{\left(\vec{k}\cdot\underline{\vec{E}}\right)}_{=0}\vec{k} - \left(\vec{k}\cdot\vec{k}\right)\underline{\vec{E}} = \omega\left(\vec{k}\wedge\underline{\vec{B}}\right)$$
$$-k^2\underline{\vec{E}} = \omega\left(-\frac{\omega}{c^2}\underline{\vec{E}}\right)$$
$$\left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right)\underline{\vec{E}} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{\Delta}\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

Propriété :
Dans le vide, dans une région sans charges ni courants, le modèle de l'OPPH conduit à la **relation de dispersion** :

$$k = \frac{\omega}{c} \qquad (15)$$

Avec : k = Vecteur d'onde en rad.m^{-1}
ω = Pulsation en rad.s^{-1}
c = Vitesse de propagation dans le vide (3.10^8 m.s^{-1})

7.4 Aspect énergétique

7.4.1 Densité volumique d'énergie électromagnétique

D'après 6.1.3, le champ électromagnétique transporte une densité volumique d'énergie égale à :

$$u = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0}$$

Or, d'après (4) :

$$B = \frac{E}{c} \quad \Rightarrow \quad u = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0}\left(\frac{E}{c}\right)^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 = \varepsilon_0 E^2$$

La densité volumique d'énergie électromagnétique est équirépartie entre terme électrique et terme magnétique.

7.4.2 Puissance volumique cédée par le champ aux porteurs de charge

D'après 6.2.1, la puissance volumique cédée par le champ aux porteurs de charge est nulle car on se trouve dans une région sans charges ni courants.

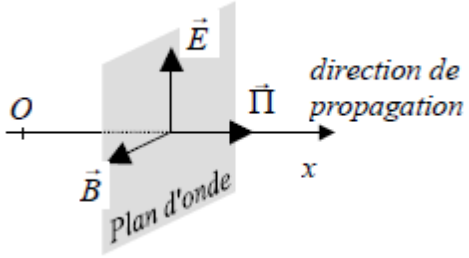
7.4.3 Vecteur de Poynting

D'après 6.3.2, le vecteur de Poynting s'écrit alors pour une OPP se propageant selon les x croissants:

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0} = \frac{\vec{E}\wedge\left(\frac{1}{c}\vec{u_x}\wedge\vec{E}\right)}{\mu_0} = \frac{1}{\mu_0 c}\vec{E}\wedge\left(\vec{u_x}\wedge\vec{E}\right) = \frac{1}{\mu_0 c}\left(\left(\vec{E}\cdot\vec{E}\right)\vec{u_x} - \underbrace{\left(\vec{E}\cdot\vec{u_x}\right)}_{=0}\vec{E}\right)$$

$$\vec{\Pi} = c\varepsilon_0 E^2\vec{u_x} = cu\vec{u_x}$$

Le vecteur de Poynting est dirigé dans la direction de propagation de l'onde plane.



Le flux du vecteur de Poynting à travers une surface perpendiculaire à la direction de propagation est la puissance traversant cette surface :

$$P_{rayonnée} = \iint_S \vec{\Pi}\cdot\vec{dS} = \iint_S cu\vec{u_x}\cdot\vec{dS} = (cu)S = u(cS)$$

L'énergie δU traversant cette surface S pendant la durée dt vaut donc :

$$\delta U = P_{rayonnée}\,dt = u(cSdt)$$

δU représente donc l'énergie contenue dans un cylindre de base S et de hauteur dh = cdt, ce qui montre que l'énergie s'est propagée à la vitesse c.

Propriété :
Le vecteur de Poynting, représentant la densité surfacique de puissance rayonnée, est dirigé dans la direction de propagation de l'onde plane donnée par $\vec{n}$. Ainsi, l'énergie d'une OPP dans le vide se propage à la célérité, c.

$$\overrightarrow{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = c\varepsilon_0 E^2 \vec{n} = cu\vec{n} \quad (16)$$

Avec : Π = Vecteur de Poynting en $W.m^{-2}$
E = Champ électrique en $V.m^{-1}$
B = Champ magnétique en T
μ_0 = Perméabilité du vide ($4\pi 10^{-7}$ $H.m^{-1}$)
c = Vitesse de propagation dans le vide (3.10^8 $m.s^{-1}$)
ε_0 = Permittivité du vide ($8{,}854.10^{-12}$ $F.m^{-1}$)
u = Densité volumique d'énergie électromagnétique en $J.m^{-3}$

7.5 Etats de polarisation d'une onde plane progressive monochromatique

7.5.1 Polarisation elliptique

Définition :
La **polarisation** d'une OPPH est définie à partir de son vecteur $\vec{E}$, comme la nature de la courbe décrite par l'extrémité de $\vec{E}$ dans un plan d'onde. Par convention, l'observateur est supposé faire face au champ électromagnétique qui progresse donc vers lui.

Pour une propagation selon les x croissants, il est commode de se placer dans le plan x = 0 et de décrire l'évolution du vecteur $\vec{E}$ dans ce plan. Les composantes du champ électrique sont alors :

$$\vec{E} = \begin{cases} 0 \\ E_y = E_{0y}\cos\left(\omega t + \varphi_y\right) \\ E_z = E_{0z}\cos\left(\omega t + \varphi_z\right) \end{cases}$$

En choisissant convenablement, une origine des temps, on peut se ramener aux expressions suivantes :

$$\vec{E} = \begin{cases} 0 \\ E_y = E_{0y}\cos\left(\omega t\right) \\ E_z = E_{0z}\cos\left(\omega t - \varphi\right) \end{cases}$$

On reconnait la représentation paramétrique d'une ellipse qui donc l'état de polarisation le plus général d'une OPPM.
En éliminant le temps entre E_y et E_z, on obtient :

$$E_y = E_{0y}\cos\left(\omega t\right) \quad \Rightarrow \quad \cos\left(\omega t\right) = \frac{E_y}{E_{0y}}$$

$$E_z = E_{0z}\cos\left(\omega t - \varphi\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{E_z}{E_{0z}} = \cos\left(\omega t - \varphi\right)$$

$$\frac{E_z}{E_{0z}} = \cos(\omega t)\cos(\varphi) + \sin(\omega t)\sin(\varphi) = \frac{E_y}{E_{0y}}\cos(\varphi) + \sin(\omega t)\sin(\varphi)$$

Alors, on a les deux égalités suivantes :

$$\begin{cases} \cos(\omega t)\sin(\varphi) = \dfrac{E_y}{E_{0y}}\sin(\varphi) \\ \sin(\omega t)\sin(\varphi) = \dfrac{E_z}{E_{0z}} - \dfrac{E_y}{E_{0y}}\cos(\varphi) \end{cases}$$

$$\left(\cos(\omega t)\sin(\varphi)\right)^2 + \left(\sin(\omega t)\sin(\varphi)\right)^2 = \left(\frac{E_y}{E_{0y}}\right)^2 \sin^2(\varphi) + \left(\frac{E_z}{E_{0z}} - \frac{E_y}{E_{0y}}\cos(\varphi)\right)^2$$

$$= \left(\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t)\right)\sin^2(\varphi)$$

$$\sin^2(\varphi) = \left(\frac{E_y}{E_{0y}}\right)^2 \sin^2(\varphi) + \left(\frac{E_y}{E_{0y}}\right)^2 \cos^2(\varphi) + \left(\frac{E_z}{E_{0z}}\right)^2 - 2\frac{E_z}{E_{0z}}\frac{E_y}{E_{0y}}\cos(\varphi)$$

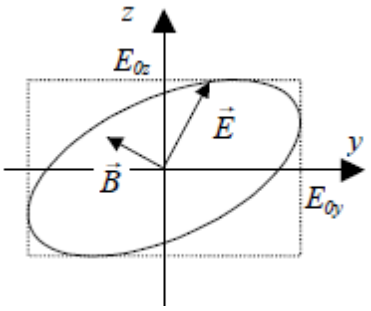
$$\sin^2(\varphi) = \left(\frac{E_z}{E_{0z}}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{E_{0y}}\right)^2 - 2\frac{E_z}{E_{0z}}\frac{E_y}{E_{0y}}\cos(\varphi)$$

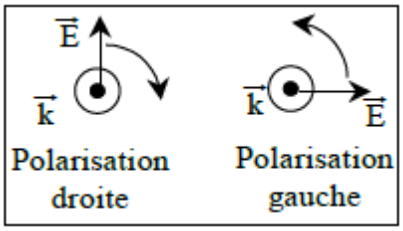
On reconnaît l'équation cartésienne d'une ellipse. On peut alors chercher le sens de rotation sur l'ellipse. Il dépend de sinφ. En effet :

$$E_y = E_{0y}\cos(\omega t) \; est\ maximal \;\; pour\ t = 0\left[\frac{2\pi}{\omega}\right]$$

Alors, à cet instant :

$$\left(\frac{\partial E_z}{\partial t}\right)_{t=0} = \omega E_{0z}\sin(\varphi)$$

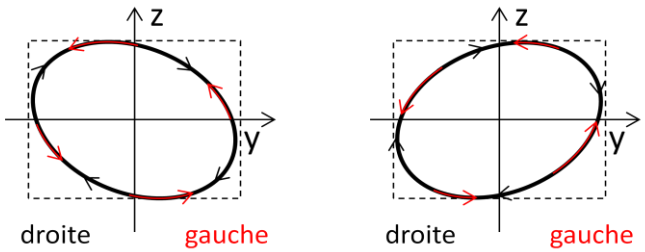




L'observateur voit l'extrémité du vecteur champ électrique parcourir l'ellipse dans le sens trigonométrique si sinφ est positif : la polarisation est dite elliptique gauche. A l'inverse, dans le sens horaire, la polarisation est dite elliptique droite.

Polarisation elliptique

$-\pi < \varphi < -\pi/2$ ou $\pi/2 < \varphi < \pi$ $-\pi/2 < \varphi < 0$ ou $0 < \varphi < \pi/2$



7.5.2 Polarisation circulaire

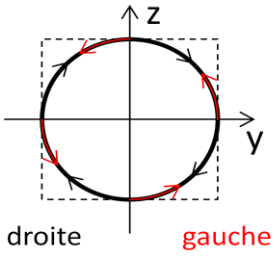
L'ellipse précédente devient un cercle si les vibrations sur les deux axes ont la même amplitude et sont en quadrature l'une par rapport à l'autre : $\varphi = \pm \pi/2$ et $E_{0y} = E_{0z}$

On a alors l'équation cartésienne :

$$\left(\frac{E_z}{E_{0z}}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{E_{0y}}\right)^2 = 1$$

Polarisation circulaire

$\varphi = -\pi/2$ ou $+\pi/2$



7.5.3 Polarisation rectiligne

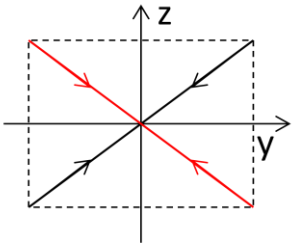
L'ellipse précédente devient une droite si les vibrations sur les deux axes sont en phase ou en opposition de phase l'un par rapport à l'autre : $\varphi = 0$ ou π.

On a alors l'équation cartésienne :

$$\left(\frac{E_z}{E_{0z}}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{E_{0y}}\right)^2 \pm 2\frac{E_z}{E_{0z}}\frac{E_y}{E_{0y}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{E_z}{E_{0z}} \pm \frac{E_y}{E_{0y}}\right)^2 = 0$$

Polarisation rectiligne

$\varphi = 0$ ou $\pm \pi$



Une OPPH de polarisation elliptique quelconque peut toujours s'écrire comme la superposition de deux OPPH polarisées rectilignement suivant deux directions orthogonales. C'est la brique de base.

7.6 Réflexion sous incidence normale d'une OPPM sur un plan conducteur parfait

7.6.1 Modèle du conducteur parfait

Un milieu est dit conducteur si sous l'action d'un champ électrique, un courant de conduction se met en place. Le conducteur satisfait la loi d'Ohm locale (6.2.2) dans une large gamme de fréquence ($f < 10^{14}$ Hz). Soit ϒ sa conductivité :

$$\vec{j} = \gamma \vec{E}$$

Exemple :
Un bon conducteur comme le cuivre possède une conductivité de l'ordre de :

$$\gamma = 10^7 S.m^{-1}$$

Définition :
Dans un conducteur parfait, la conductivité est très grande et on la considère infinie :

$$\gamma \to +\infty \quad \Rightarrow \quad \vec{E} \to \vec{0}, \quad \rho \to 0, \quad \vec{B} \to \vec{0}, \quad \vec{j} = \vec{0}$$

D'après l'équation de Maxwell-Gauss :

$$div\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \rho = 0$$

Mais rien n'empêche que des charges soient localisées en surface. A la surface du conducteur, on satisfait les relations de passages (5.5) d'où :

$$\vec{E}_{surf} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{n}_{1\to 2}$$

D'après l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\overrightarrow{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \vec{B} \text{ stationnaire}$$

Donc, pour un régime variable dans le temps :

$$\vec{B} \to \vec{0}$$

Enfin, d'après l'équation de Maxwell-Ampère :

$$\overrightarrow{rot}\vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \vec{j} = \vec{0}$$

Mais rien n'empêche que des courants soient localisés en surface. A la surface du conducteur, on satisfait les relations de passages (5.5) d'où :

$$\vec{B}_{surf} = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n}_{1\to 2}$$

Enfin, concernant la puissance volumique cédée aux porteurs de charge, on a :

$$p = \vec{j} \cdot \vec{E} = 0$$

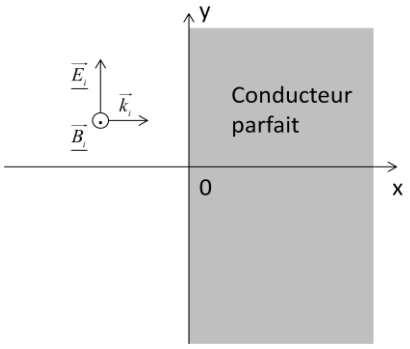
Il n'y a pas de pertes par effet Joule.

7.6.2 Onde incidente

Soit une onde électromagnétique incidente se propageant dans le vide dans une région sans charges ni courants selon l'axe Ox croissant dans le demi-espace x<0. En x=0, dans le plan Oyz, se trouve un conducteur parfait. Pour simplifier l'étude, on suppose l'onde polarisée rectilignement. Le champ électromagnétique au voisinage du conducteur est la somme de l'onde incidente et de l'onde réfléchie.

En utilisant la notation complexe, l'onde incidente se met sous la forme :

$$\underline{\overrightarrow{E_i}} = \underline{E_{0i}} e^{j(\omega t - k_i x)} \overrightarrow{u_y} \quad et \quad \underline{\overrightarrow{B_i}} = \underline{B_{0i}} e^{j(\omega t - k_i x)} \overrightarrow{u_z} = \frac{\overrightarrow{k_i}}{\omega} \wedge \underline{E_{0i}} e^{j(\omega t - k_i x)} \overrightarrow{u_y} = \frac{\underline{E_{0i}}}{c} e^{j(\omega t - k_i x)} \overrightarrow{u_z}$$



7.6.3 Onde réfléchie

L'onde réfléchie s'écrit sous la forme :

$$\underline{\overrightarrow{E_r}} = \underline{E_{0r}} e^{j(\omega t - k_r x)} \overrightarrow{u_y} \quad et \quad \underline{\overrightarrow{B_r}} = \underline{B_{0r}} e^{j(\omega t - k_r x)} \overrightarrow{u_z} = \frac{\overrightarrow{k_r}}{\omega} \wedge \underline{E_{0r}} e^{j(\omega t - k_r x)} \overrightarrow{u_y}$$

Que ce soit l'onde incidente ou l'onde réfléchie, les champs se propagent à la même vitesse dans le vide avec la même pulsation et possèdent donc le même module du vecteur d'onde. L'onde réfléchie se propage selon les x décroissants, on a donc :

$$\overrightarrow{k_r} = -\overrightarrow{k_i} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \underline{\overrightarrow{E_r}} = \underline{E_{0r}} e^{j(\omega t + k_i x)} \overrightarrow{u_y} \\ \underline{\overrightarrow{B_r}} = -\frac{\overrightarrow{k_i}}{\omega} \wedge \underline{E_{0r}} e^{j(\omega t + k_i x)} \overrightarrow{u_y} = -\frac{\underline{E_{0r}}}{c} e^{j(\omega t + k_i x)} \overrightarrow{u_z} \end{cases}$$

Pour trouver les relations entre les amplitudes des champs incidents et réfléchis, il faut utiliser les relations de passage définies en 5.5 en x=0. Le champ électrique étant nul dans le conducteur parfait, on a :

$$\left(\underline{\overrightarrow{E_r}}(x=0) + \underline{\overrightarrow{E_i}}(x=0) \right) - \vec{0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \left(-\overrightarrow{u_x} \right)$$

On retrouve donc la continuité de la composante tangentielle des champs électrique. De plus, ces champs sont transverses, ils n'ont donc pas de composante suivant la direction de propagation et donc :

$$\frac{\sigma}{\varepsilon_0} \left(-\overrightarrow{u_x} \right) = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \underline{\overrightarrow{E_r}}(x=0) = -\underline{\overrightarrow{E_i}}(x=0)$$

Le champ électrique est donc entièrement réfléchi avec un déphasage de π :

$$\underline{E_{0r}}e^{j(\omega t)}\overrightarrow{u_y} = -\underline{E_{0i}}e^{j(\omega t)}\overrightarrow{u_y} \quad \Rightarrow \quad \underline{E_{0r}} = -\underline{E_{0i}} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{\underline{E_r}} = -\underline{E_{0i}}e^{j(\omega t + k_i x)}\overrightarrow{u_y}$$

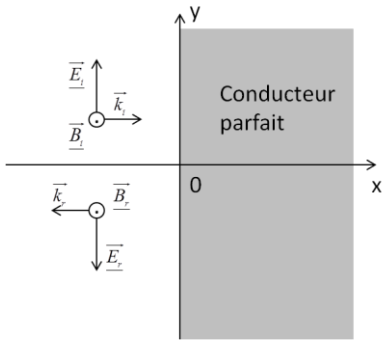
Alors, on a pour le champ magnétique :

$$\overrightarrow{\underline{B_r}} = -\frac{\underline{E_{0r}}}{c}e^{j(\omega t + k_i x)}\overrightarrow{u_z} = \frac{\underline{E_{0i}}}{c}e^{j(\omega t + k_i x)}\overrightarrow{u_z} = \underline{B_{0i}}e^{j(\omega t + k_i x)}\overrightarrow{u_z}$$

Soit pour une onde dont on ne connait pas la polarisation :

$$\overrightarrow{\underline{E_i}} = \overrightarrow{\underline{E_{0i}}}e^{j(\omega t - k_i x)} \quad et \quad \overrightarrow{\underline{B_i}} = \frac{\overrightarrow{k_i}}{\omega} \wedge \overrightarrow{\underline{E_{0i}}}e^{j(\omega t - k_i x)}$$

$$\overrightarrow{\underline{E_r}} = -\overrightarrow{\underline{E_{0i}}}e^{j(\omega t + k_i x)} \quad et \quad \overrightarrow{\underline{B_r}} = \frac{\overrightarrow{k_i}}{\omega} \wedge \overrightarrow{\underline{E_{0i}}}e^{j(\omega t + k_i x)}$$



Propriété :
La réflexion d'une onde électromagnétique sous incidence normale sur un conducteur parfait est une réflexion totale avec un déphasage de π du champ électrique et un déphasage nul pour le champ magnétique. Il n'y a pas de charges surfaciques.

7.6.4 Superposition des ondes incidente et réfléchie

La superposition des deux ondes incidentes et réfléchies donne :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\underline{E}} &= \overrightarrow{\underline{E_i}} + \overrightarrow{\underline{E_r}} \\ &= \overrightarrow{\underline{E_{0i}}}e^{j(\omega t - k_i x)} - \overrightarrow{\underline{E_{0i}}}e^{j(\omega t + k_i x)} \\ &= \overrightarrow{\underline{E_{0i}}}e^{j(\omega t)}\left(e^{-j(k_i x)} - e^{j(k_i x)}\right) \\ &= -2j\overrightarrow{\underline{E_{0i}}}e^{j(\omega t)}\sin\left(k_i x\right)\end{aligned}$$

Et pour une onde polarisée rectilignement :

$$\overrightarrow{\underline{E}} = -2j\underline{E_{0i}}e^{j(\omega t)}\sin\left(k_i x\right)\overrightarrow{u_y}$$

D'où en notation réelle :

$$\overrightarrow{E} = 2E_{0i}\sin\left(\omega t\right)\sin\left(k_i x\right)\overrightarrow{u_y}$$

Et pour le champ magnétique :

$$\begin{aligned}\underline{\vec{B}} &= \underline{\vec{B_i}} + \underline{\vec{B_r}} \\ &= \frac{\vec{k_i}}{\omega} \wedge \underline{\vec{E_{0i}}} e^{j(\omega t - k_i x)} + \frac{\vec{k_i}}{\omega} \wedge \underline{\vec{E_{0i}}} e^{j(\omega t + k_i x)} \\ &= \frac{\vec{k_i}}{\omega} \wedge \left(\underline{\vec{E_{0i}}} e^{j(\omega t)} \left(e^{-j(k_i x)} + e^{j(k_i x)} \right) \right) \\ &= 2\frac{\vec{k_i}}{\omega} \wedge \left(\underline{\vec{E_{0i}}} e^{j(\omega t)} \cos(k_i x) \right)\end{aligned}$$

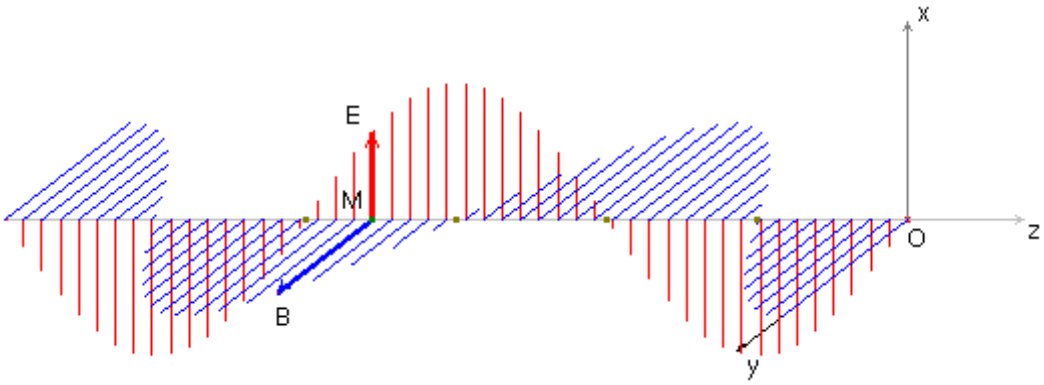
Pour une onde polarisée rectilignement :

$$\begin{aligned}\underline{\vec{B}} &= 2\frac{\vec{u_x}}{c} \wedge \left(\underline{E_{0i}} e^{j(\omega t)} \cos(k_i x) \vec{u_y} \right) \\ &= 2\frac{\underline{E_{0i}}}{c} e^{j(\omega t)} \cos(k_i x) \vec{u_z}\end{aligned}$$

D'où en notation réelle :

$$\underline{\vec{B}} = 2\frac{E_{0i}}{c} \cos(\omega t) \cos(k_i x) \vec{u_z}$$

Les dépendances spatiale et temporelle sont séparées : l'onde résultante est une onde stationnaire.
Les champs électrique et magnétiques restent orthogonaux mais sont en quadrature spatiale et temporelle (déphasage de π/2).



En certains points (appelés nœuds de vibrations), le champ est toujours nul. Ainsi, pour le champ électrique :

$$\left\| \vec{E} \right\| = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin(k_i x) = 0 \quad \Rightarrow \quad k_i x_n = n\pi \quad n \in \mathbb{Z}$$

Or, d'après la relation entre le nombre d'onde et la longueur d'onde :

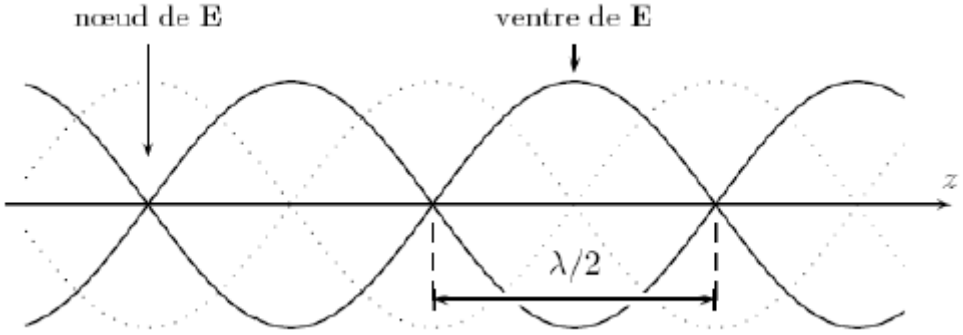
$$k_i = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad \frac{2\pi}{\lambda} x_n = n\pi \quad \Rightarrow \quad x_n = n\frac{\lambda}{2}$$

La distance entre deux nœuds successifs est λ/2.
En d'autres points (appelés ventres de vibrations), l'amplitude de vibration est maximale. Ainsi, pour le champ électrique :

$$\left\| \vec{E} \right\| = \max \quad \Rightarrow \quad \sin(k_i x) = \pm 1 \quad \Rightarrow \quad k_i x_v = (2n+1)\frac{\pi}{2} \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{2\pi}{\lambda}x_v = (2n+1)\frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad x_v = (2n+1)\frac{\lambda}{4}$$

La distance entre deux ventres successifs est λ/2 et la distance entre un nœud et un ventre successif est λ/4. Les nœuds du champ électrique sont les ventres du champ magnétique et vice-versa.



7.6.5 Courant surfacique

En utilisant les relations de passage définies en 5.5 en x=0 pour le champ magnétique, on trouve :

$$\left(\underline{\vec{B}_r}(x=0) + \underline{\vec{B}_i}(x=0)\right) - \vec{0} = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \left(-\vec{u}_x\right)$$

$$\left(\frac{\vec{k}_i}{\omega} \wedge \underline{\vec{E}_{0i}} e^{j(\omega t)} + \frac{\vec{k}_i}{\omega} \wedge \underline{\vec{E}_{0i}} e^{j(\omega t)}\right) = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \left(-\vec{u}_x\right)$$

$$2\frac{\vec{u}_x}{c} \wedge \underline{\vec{E}_{0i}} e^{j(\omega t)} = \mu_0 \vec{u}_x \wedge \vec{j}_s$$

$$\vec{j}_s = \frac{2\underline{\vec{E}_{0i}}}{\mu_0 c} e^{j(\omega t)}$$

La réflexion d'une onde plane progressive monochromatique sous incidence normale sur un plan conducteur parfait induit ainsi un courant surfacique non nul de même direction que le champ incident. On rappelle que la charge surfacique est nulle.

7.6.6 Aspect énergétique

Le vecteur de Poynting associé à l'onde incidente est :

$$\vec{\Pi}_i = c\varepsilon_0 E_i^2 \vec{u}_x$$

Le vecteur de Poynting associé à l'onde réfléchie est :

$$\vec{\Pi}_r = -c\varepsilon_0 E_r^2 \vec{u}_x = -c\varepsilon_0 E_i^2 \vec{u}_x$$

Toute l'énergie véhiculée par l'onde incidente se retrouve dans l'onde réfléchie. Le métal parfait ne dissipe pas d'énergie et la réfléchit totalement : c'est un miroir idéal.

En particulier, l'onde stationnaire résultante ne transporte pas d'énergie :

$$\vec{\Pi} = c\varepsilon_0 \left(2E_{0i}\sin(\omega t)\sin(k_i x)\right)^2 \vec{u}_x \quad \Rightarrow \quad \left\langle \vec{\Pi} \right\rangle = \vec{0}$$

7.7 Effet de peau

On s'intéresse maintenant au champ électromagnétique au sein d'un bon conducteur ohmique mais qui n'est plus parfait dans le cadre de l'ARQS. On peut alors négliger le courant de déplacement par rapport au courant de conduction. Comme précédemment, le conducteur occupe l'espace x > 0. Le courant surfacique précédent devient un courant volumique tel que :

$$\vec{j} = j_y(x,t)\overrightarrow{u_y}$$

La densité volumique de charge dans le conducteur est toujours nul, on a donc les équations de Maxwell suivantes :

$$div\vec{E} = 0 \quad et \quad \overrightarrow{rot}\vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

$$div\vec{B} = 0 \quad et \quad \overrightarrow{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

On a de plus la loi d'Ohm locale :

$$\vec{j} = \gamma \vec{E}$$

Ainsi, en utilisant l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}\vec{E}\right) = \overrightarrow{rot}\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\overrightarrow{grad}\left(div\vec{E}\right)}_{=\vec{0}} - \vec{\Delta}\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\overrightarrow{rot}\vec{B}\right)$$

$$\vec{\Delta}\vec{E} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\mu_0 \vec{j}\right) \quad \Rightarrow \quad \vec{\Delta}\vec{E} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\mu_0 \gamma \vec{E}\right) \quad \Rightarrow \quad \vec{\Delta}\vec{E} - \mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{0}$$

On trouve de la même manière les deux équations suivantes :

$$\vec{\Delta}\vec{B} - \mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0} \quad et \quad \vec{\Delta}\vec{j} - \mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = \vec{0}$$

On recherche alors des solutions à ces **équations de diffusion** sous la forme :

$$\vec{E}(x,t) = E(x)\cos\left(\omega t - \phi(x)\right)\overrightarrow{u_y}$$

$$\vec{B}(x,t) = B(x)\cos\left(\omega t - \phi(x)\right)\overrightarrow{u_z}$$

$$\vec{j}(x,t) = j(x)\cos\left(\omega t - \phi(x)\right)\overrightarrow{u_y}$$

En utilisant la notation complexe, avec $J^2=-1$, on a :

$$\underline{\vec{E}}(x,t) = \underline{E}(x)e^{-J\omega t}\overrightarrow{u_y} \quad \underline{\vec{B}}(x,t) = \underline{B}(x)e^{-J\omega t}\overrightarrow{u_z} \quad \underline{\vec{j}}(x,t) = \underline{j}(x)e^{-J\omega t}\overrightarrow{u_y}$$

Pour le champ électrique, l'équation de diffusion devient :

$$\vec{\Delta}\vec{E} - \mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 E(x,t)}{\partial x^2} - \mu_0 \gamma \frac{\partial E(x,t)}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 \underline{E}(x)}{\partial x^2} + J\omega\mu_0\gamma \underline{E}(x) = 0$$

La solution à cette équation est alors :

$$\underline{E}(x) = \alpha \exp\left(\sqrt{-J\omega\mu_0\gamma}\,x\right) + \beta \exp\left(-\sqrt{-J\omega\mu_0\gamma}\,x\right)$$

$$= \alpha \exp\left(\sqrt{e^{-J\frac{\pi}{2}}\omega\mu_0\gamma}\,x\right) + \beta \exp\left(-\sqrt{e^{-J\frac{\pi}{2}}\omega\mu_0\gamma}\,x\right)$$

$$= \alpha \exp\left(e^{-J\frac{\pi}{4}}\sqrt{\omega\mu_0\gamma}\,x\right) + \beta \exp\left(-e^{-J\frac{\pi}{4}}\sqrt{\omega\mu_0\gamma}\,x\right)$$

$$= \alpha \exp\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(1-J)\sqrt{\omega\mu_0\gamma}\,x\right) + \beta \exp\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}(1-J)\sqrt{\omega\mu_0\gamma}\,x\right)$$

$$= \alpha \exp\left((1-J)\sqrt{\frac{\omega\mu_0\gamma}{2}}x\right) + \beta \exp\left(-(1-J)\sqrt{\frac{\omega\mu_0\gamma}{2}}x\right)$$

On pose :

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu_0\gamma}}$$

On a alors :

$$\underline{E}(x,t) = \underline{E}(x)e^{-J\omega t}\overrightarrow{u_y} = \underbrace{\alpha e^{\frac{x}{\delta}} \exp\left(-J\left(\frac{x}{\delta}+\omega t\right)\right)}_{\text{non physique}} + \beta e^{-\frac{x}{\delta}} \exp\left(J\left(\frac{x}{\delta}-\omega t\right)\right)$$

$$= \beta e^{-\frac{x}{\delta}} \exp\left(J\left(\frac{x}{\delta}-\omega t\right)\right)$$

En revenant à la grandeur réelle, on a :

$$\vec{E}(x,t) = E_0 e^{-\frac{x}{\delta}} \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right)\overrightarrow{u_y}$$

De la même manière, on trouve :

$$\vec{j}(x,t) = j_0 e^{-\frac{x}{\delta}} \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right)\overrightarrow{u_y} \quad et \quad \vec{B}(x,t) = B_0 e^{-\frac{x}{\delta}} \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta} - \frac{\pi}{4}\right)\overrightarrow{u_z}$$

Le terme en $\cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right)$ nous indique que l'onde se propage à la pulsation ω et la vitesse V = ωδ. La vitesse dépendant de la fréquence, on dit qu'il y a dispersion. Toutes les fréquences ne se propagent pas à la même vitesse.

La grandeur δ est homogène à une longueur et s'appelle l'épaisseur de peau. Cette épaisseur diminue avec la fréquence.

Le terme en $\exp\left(-\frac{x}{\delta}\right)$ nous indique que la propagation de l'onde s'accompagne d'une atténuation. Elle augmente avec la fréquence. A haute fréquence, l'onde ne propage qu'en surface du conducteur. On pourra alors adopter un modèle surfacique pour le courant.

Exemple : Cuivre

Fréquence υ	Longueur d'onde λ	Epaisseur de peau δ
50 Hz	6000 km	$9,3$ mm
1 kHz	300 km	$6,5$ mm
1 MHz	300 m	$0,21$ mm
1 GHz	30 cm	$6,5\,\mu$m
1 THz	300 μm	$0,21\,\mu$m

A retenir et savoir faire :

- Connaître les équations de Maxwell.
- Savoir démontrer les équations de propagation.
- Connaître le cas de l'onde plane progressive monochromatique (ou harmonique).
- Savoir les relations entre k, ω, λ, f, T, c, …
- Savoir calculer la vitesse de phase d'une onde et l'exprimer dans un milieu LHI.
- Savoir utiliser la notation complexe.
- Savoir faire un bilan énergétique d'une OPPM.
- Savoir déterminer l'état de polarisation d'une OPPM.
- Savoir déterminer le sens de parcours d'une ellipse.
- Savoir retrouver la structure de l'onde réfléchie dans le cas d'une réflexion sur un métal parfait.
- Savoir retrouver la structure de l'onde stationnaire dans le cas d'une réflexion sur un métal parfait.

7.8 Exercices d'application

7.8.1 Champ rayonné par une plaque de courants

Dans le plan z = 0, des courants surfaciques :

$$\overrightarrow{j_s} = j_s^0 \exp\left(i\left(\omega t - \alpha x\right)\right)\overrightarrow{u_y}$$

avec α < ω/c, engendrent un champ électromagnétique dans tout l'espace. Partout ailleurs, l'espace est vide.

a) Trouver la densité surfacique de charges σ portée par le plan z = 0 à l'aide d'une équation de conservation de la charge surfacique.

b) Expliquer pourquoi on cherche le champ électrique sous la forme (variables et direction) :

$$\overrightarrow{E} = f\left(z\right)\exp\left(i\left(\omega t - \alpha x\right)\right)\overrightarrow{u_y}$$

c) Trouver une équation satisfaite par f et la résoudre. On pose :

$$\beta = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \alpha^2}$$

d) Quelle est la forme du champ électrique pour z > 0 et pour z < 0 (on écrira le champ sous la forme de la superposition de deux ondes planes progressives monochromatiques) ? Vu le problème, éliminer une des deux ondes dans chaque demi-espace.

e) Conclure en utilisant les relations de passage pour les champs.

f) Commenter, sur les expressions de E et B, le fait que z = 0 soit un plan de symétrie des sources du champ électromagnétique.

g) Quelle est la relation entre le module du vecteur d'onde et la pulsation ? Est-ce surprenant ?

7.8.2 Propagation dans un milieu chiral

a) Rappeler l'équation de propagation du champ électrique dans le vide.

b) On suppose que dans un milieu transparent, le champ électromagnétique se propage exactement de la même manière que dans le vide, à condition de remplacer c par c/n, où n est l'indice du milieu transparent. Quelle est alors l'équation de propagation de E ? Quelle est la relation entre k et ω pour une onde plane progressive harmonique ?

c) Un milieu chiral est un milieu transparent dans lequel les ondes circulaires droites et gauches ne se propagent pas à la même vitesse. Pour les ondes circulaires gauches (droites), l'indice est n_g (n_d). On envoie dans un tel milieu une onde initialement polarisée rectilignement selon u_x et se propageant dans la direction u_z. On supposera qu'à l'interface vide-milieu chiral la pulsation de l'onde ne varie pas. Quelle est l'expression de l'onde dans le milieu chiral ?

d) Quelle est, après la traversée d'une cuve de longueur e, la polarisation de l'onde ? Caractériser le changement observé.

7.8.3 Cavité résonante

On s'intéresse à une cavité contenue entre deux plans parallèles infinis, taillée dans un conducteur parfait entre z = 0 et z = a. On s'intéresse à un champ électromagnétique, qui est la superposition de deux ondes planes progressives monochromatiques polarisées rectilignement de sens de propagation opposés ± u_z.

a) Donner la forme exacte du champ électrique dans la cavité.

b) Montrer que seules certaines longueurs d'onde discrètes λ_n peuvent exister dans la cavité. Quelles sont les fréquences f_n associées ?

c) Comment appeler ce phénomène ? Donner une analogie en électrocinétique. Que se passe-t-il si on essaie de créer un champ électromagnétique de fréquence différente de f_n ?
d) Tracer sur un même graphe l'allure, à un instant donné, du champ électrique pour les trois plus basses fréquences. Combien de nœuds et de ventres possède le mode numéro n ?
e) En admettant que, dans le domaine de l'acoustique, un tube soit régi par les mêmes équations qu'une cavité résonante, identifier les tubes d'une flûte de Pan produisant les sons aigus et ceux produisant les sons graves. On supposera que le mode fondamental n = 1 est prédominant.
f) Une cavité de forme quelconque a pour taille typique d. Que peut-on dire de la longueur d'onde d'une onde électromagnétique stationnaire existant dans cette cavité ?

7.9 Exercices

7.9.1 Superposition des deux ondes planes progressives monochromatiques

On s'intéresse à la superposition de deux ondes planes progressives monochromatiques de même amplitude E_0, de même pulsation ω et se propageant respectivement selon les vecteurs u_1 et u_2. On pose pour $0 \leq \alpha \leq \pi/2$:

$$\overrightarrow{u_1} = \sin\alpha \overrightarrow{u_x} + \cos\alpha \overrightarrow{u_z}$$
$$\overrightarrow{u_2} = -\sin\alpha \overrightarrow{u_x} + \cos\alpha \overrightarrow{u_z}$$

a) Quelles sont les normes des deux vecteurs d'onde k_1 et k_2 ?
b) Sachant que les deux champs électriques sont parallèles à u_y et qu'ils sont en phase dans le plan x = 0, donner leur expression sous forme complexe.
c) En déduire l'expression du champ électrique total (réel). Décrire l'onde obtenue. Est-elle plane ? Est-elle progressive ?
d) Donner la forme du champ magnétique (réel). Commentaires.
e) En déduire le vecteur de Poynting moyen. Pouvait-on deviner sa direction ?

7.9.2 Effet Doppler

Une onde plane progressive monochromatique de fréquence v est émise par un objet s'éloignant à la vitesse $v << c$ (c est la célérité de l'onde) d'un observateur immobile (la direction observateur-source est prise colinéaire à la vitesse de la source).
a) Quelle est la forme de l'onde émise ? Par un changement de référentiel pour les coordonnées, trouver la période T' de l'onde perçue par l'observateur.
b) Retrouver le résultat en supposant que la source émet un bip tous les T, en évaluant l'intervalle T' entre deux réceptions successives de bips par l'observateur.
c) Donner des applications de ce phénomène.

7.9.3 Réflexion et transmission à l'interface de deux milieux transparents

Deux milieux semi-infinis, transparents, d'indices n_1 et n_2 occupent les demi-espaces $z \leq 0$ et $z \geq 0$. Une onde plane progressive monochromatique polarisée rectilignement selon u_x arrive depuis les $z \leq 0$ en incidence normale sur l'interface.
a) On rappelle que la célérité des ondes dans un milieu d'indice n est égale à c/n. En déduire la relation entre k et ω pour une onde dans un milieu transparent d'indice n.
b) On appelle $\underline{r}$ et $\underline{t}$ les coefficients en réflexion et transmission en amplitude pour le champ électrique. Donner l'expression des champs électriques et magnétiques incidents, réfléchis et transmis en fonction de $\underline{r}$ et $\underline{t}$.

c) Calculer $\underline{r}$ et $\underline{t}$ grâce aux conditions aux limites. Commentaires ?
d) Calculer les coefficients de réflexion R (transmission T) en énergie, définis comme le rapport du module du vecteur de Poynting moyen réfléchi (transmis) par celui du vecteur de Poynting moyen incident. Quelle relation existe-t-il entre R et T, quel est son sens physique ?

7.9.4 Equations de Maxwell et lois de Snell-Descartes

Une onde plane progressive monochromatique arrive avec l'incidence θ_1 sur l'interface z = 0 séparant deux milieux transparents d'indices n_1 et n_2. Son vecteur d'onde est contenu dans le plan y = 0 et fait un angle θ_1 avec u_z. Une onde réfléchie et une onde transmise sont engendrées à cette interface. On les choisit aussi comme planes progressives monochromatiques de vecteurs d'onde k_r et k_t.
a) Ecrire les formes de ces trois ondes.
b) A l'aide d'une condition aux limites, montrer que les trois ondes ont même pulsation et exprimer le module des trois vecteurs d'onde.
c) Montrer que les vecteurs d'onde réfléchis et transmis appartiennent au plan d'incidence (plan y = 0), et trouver une relation entre les trois angles formés par les vecteurs d'onde et u_z grâce à la partie spatiale de leur phase. Qu'en déduisez-vous ?