

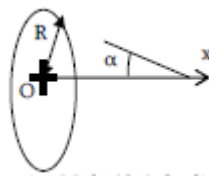
Exercice 1 : Disque uniformément chargé

Soit un disque de centre O , de rayon R , compris dans le plan (yOz) et portant une charge totale Q_0 uniformément répartie.

1. Calculer la densité surfacique de charge
2. Donner l'expression du potentiel $V(M)$ créée en un point M de (Ox) .

(On utilisera la variable $a = \sqrt{r^2 + x^2}$: distance entre le point M et le disque pour l'intégration)

3. Trouver l'expression du champ électrostatique qui dérive de ce potentiel.
4. Retrouver l'expression du champ par intégration directe (utiliser l'angle α).
5. Calculer l'énergie potentielle d'interaction entre ce disque et une charge q placée sur l'axe x .



Exercice 2 : Sphère chargée uniformément

Une sphère centrée sur O de rayon R est uniformément chargée de charge Q .

1) Calculer :

1.a) le champ électrique $\vec{E}$

1.b) et le potentiel V

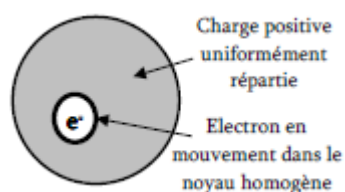
en tout point de l'espace.

Exercice 3 : Modèle de Thomson de l'atome d'hydrogène

Le modèle de Thomson suppose que l'électron est ponctuel, de charge $-e$, et que la charge positive $+e$ (représentant le proton) est uniformément répartie dans une sphère de rayon a_0 . C'est un modèle historique : on a su ensuite que Thomson inversait en fait le rôle du proton et celui de l'électron...

1. Déterminer en tout point M de l'espace le champ électrostatique E créée par le proton seul. Distinguer les cas où $r < a_0$ et $r > a_0$.
2. Calculer le potentiel V de ce champ électrique en prenant la référence à l'infini.
3. Représenter la norme du champ ainsi que le potentiel.
4. Calculer l'énergie potentielle $E_p(r)$ de l'électron soumis à un tel champ
5. Déterminer la position d'équilibre de l'électron et en discuter la stabilité.
6. Le potentiel d'ionisation de l'électron est l'énergie qu'il faut fournir pour arracher un électron à l'atome pris dans son état fondamental. Il s'exprime en électronvolts ($1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$) et vaut 13,6 eV. En déduire la valeur de a_0 .

On donne : $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9,0 \cdot 10^9 \text{ SI}$ et $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$



Exercice 4 : Différents types de condensateurs

- a) Calculer la capacité d'un condensateur sphérique d'armatures concentriques de rayons respectifs R_1 et R_2 .
- b) Déterminer l'énergie stockée entre les armatures d'un condensateur sphérique en fonction de la charge Q portée par l'armature intérieure.
- c) Retrouver l'expression de la capacité à l'aide de la relation $U_E = Q^2/2C$.
- d) Calculer la capacité d'un condensateur cylindrique d'armatures concentriques de rayons respectifs R_1 et R_2 .

Exercice 5 : Etude d'une membrane cellulaire

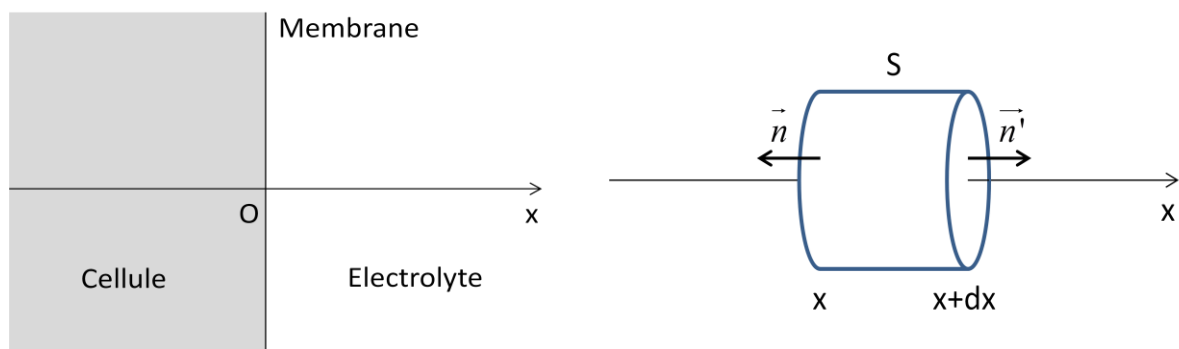
Une membrane cellulaire est assimilée au plan yOz ; l'axe Ox est orienté vers l'extérieur de la cellule. Toutes les grandeurs physiques sont supposées ne dépendre que de l'abscisse x .

Une micro-électrode relevant l'évolution du potentiel à la traversée de la membrane (de l'extérieur vers l'intérieur de la cellule), indique une variation de potentiel électrique en général négative.

On schématise le potentiel par la fonction $V(x)$ suivante (V_0 constante positive homogène à un potentiel, à une distance) :

$$\begin{aligned} x \leq 0 \quad V(x) &= -V_0 \\ x > 0 \quad V(x) &= -V_0 \exp\left(-\frac{x}{a}\right) \end{aligned}$$

- a) Calculer le champ électrique en tout point.
- b) Appliquer le théorème de Gauss à une surface cylindrique d'axe Ox et de base S , limitée par les plans d'abscisses x et $x+dx$. En déduire la densité volumique de charge ρ en tout point. Retrouver cette expression par application de l'équation de Maxwell-Gauss puis par l'équation de Poisson. Quel est le signe de ρ ? Comment une densité volumique de charge peut-elle exister dans un liquide ?
- c) En examinant l'éventuelle discontinuité du champ électrique, déterminer la densité surfacique de charge σ présente sur la surface d'équation $x = 0$.
- d) Calculer la charge totale contenue dans un cylindre d'axe Ox et de base S , s'étendant indéfiniment le long de l'axe Ox (de $-\infty$ à $+\infty$). Commenter ce résultat.



Exercice 6 : Trajectoire d'une particule

Une particule de charge électrique q et de masse m pénètre à l'instant $t = 0$ en O ($x = y = z = 0$) avec une vitesse v_0 dans une région où règnent un champ électrique uniforme E et un champ magnétique uniforme B parallèles, dirigés suivant l'axe Oy d'un référentiel $Oxyz$ rectangulaire.

La vitesse v_0 est dans le plan yOz et fait l'angle α avec les champs E et B . On introduira le paramètre

$$\omega = \frac{qB}{m}$$

- Déterminer les composantes v_x , v_y et v_z de la vitesse v de la particule à l'instant t en intégrant les équations différentielles du mouvement.
- Déterminer les équations paramétriques du mouvement de la particule et définir sa trajectoire.
- On supprime le champ électrique. Définir la nouvelle trajectoire de la particule.

Exercice 7 : Effet Hall

Un ruban d'argent de largeur $a = 1$ cm, d'épaisseur $e = 0,1$ mm, est parcouru par un courant $I = 15$ A ; les lignes de courant sont parallèles à la longueur (supposée infinie). Ce ruban est placé dans un champ magnétique uniforme $B = 2$ T, normal au plan de ce ruban.

- En régime permanent, on constate l'existence d'une d.d.p. V_H entre les deux bords du ruban distants de a . Expliquer ce phénomène.

- On mesure $V_H = 25,2$ μ V. En déduire :

- La vitesse de déplacement des électrons en régime permanent,
- Le nombre n d'électrons libres par unité de volume, et le comparer au nombre n' d'atomes d'argent par unité de volume du ruban.

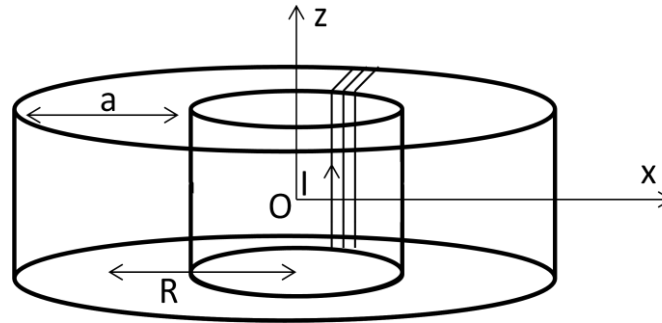
On donne : $M_{Ag} = 108$ g.mol⁻¹ ; masse volumique de l'argent : $\mu = 10,5$ g/cm³ ; charge élémentaire $e = -1,6.10^{-19}$ C ; nombre d'Avogadro $N_A = 6,02.10^{23}$ mol⁻¹

Exercice 8 : Segment de courant

- Calculer le champ créé en un point M distant de d .
- En déduire le champ créé par une spire carrée, de côté a de centre O et d'axe Oz en un point de son axe.

Exercice 9 : Tore circulaire

On veut étudier le champ magnétique créé par une distribution de courants présente sur un tore circulaire de rayon R à la section carré de côté a . On note O le centre du tore et (Oz) son axe de révolution. La distribution de courants est constituée par un enroulement d'un grand nombre de N spires jointives enroulées sur toute la surface du tore, le sens du courant étant donnée sur la figure. On négligera l'épaisseur des fils. Soit M un point quelconque de l'espace où l'on cherche le champ magnétique créé par cette distribution, déterminer l'expression de B en un point quelconque de l'intérieur et de l'extérieur du tore.



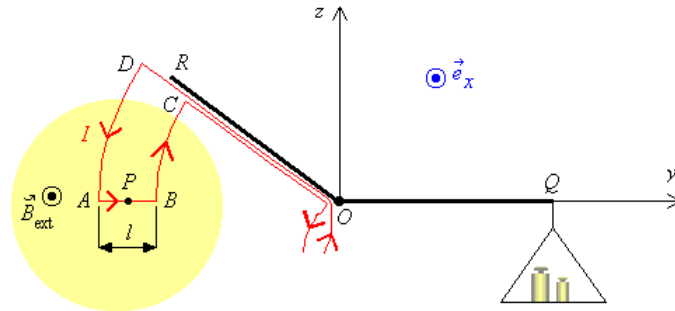
Exercice 10 : Champ créée par un faisceau cylindrique d'électrons

Un faisceau électronique a la forme d'un cylindre très long de rayon R et d'axe Oz . Les électrons ont tous la même vitesse $\vec{v} = v\vec{e}_z$ et ils sont uniformément répartis avec une densité de n électrons par unité de volume.

- En adoptant un modèle volumique, calculer la densité volumique de charge et le vecteur densité volumique de courant $\vec{j}$.
- Calculer le champ électrique $\vec{E}(M)$ en un point M de coordonnées cylindriques (r, θ, z) .
- Calculer le champ magnétique $\vec{B}(M)$. Quelle relation relie E et B ?
- Le faisceau peut-il rester cylindrique ?

Exercice 11 : Balance de Cotton

La balance de Cotton est un appareil de mesure du champ magnétostatique. L'un des fléaux est constitué d'un circuit parcouru par un courant d'intensité I et plongé dans le champ magnétostatique $\vec{B}_{\text{ext}}$ à mesurer. Le deuxième fléau permet d'équilibrer la balance à l'aide de masses marquées.



On suppose que :

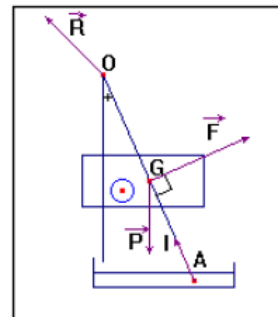
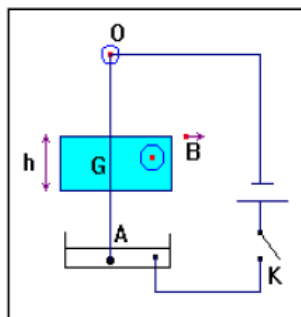
- le champ magnétostatique $\vec{B}_{\text{ext}}$ est uniforme et donné par $\vec{B}_{\text{ext}} = B_{\text{ext}} \vec{e}_x$; son action se limite à la zone colorée en jaune,
- les deux bras de fléau OR et OQ sont de même longueur et la longueur AB est notée l ,
- P est le milieu de AB et $OP = OR$,
- l'intensité du courant I est mesurée par un galvanomètre.

Etablir l'expression de l'intensité du champ $\vec{B}_{\text{ext}}$ que l'on souhaite mesurer en fonction de I , l et la masse m nécessaire pour équilibrer la balance.

Exercice 12 : Appareil de Laplace

Une tige de cuivre OA, de masse $m = 8,3 \text{ g}$, homogène, de longueur $L = 30 \text{ cm}$, peut se mouvoir dans un plan vertical autour de l'axe Δ perpendiculaire au plan de la figure, passant par O. L'extrémité A plonge dans une cuve à mercure qui assure le contact électrique avec le reste du circuit. Sur une hauteur $h = 3 \text{ cm}$, la partie centrale de la tige est placée dans un champ magnétique B uniforme et parallèle à Δ , pointant vers le lecteur.

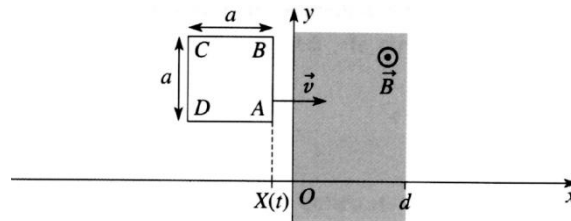
- Que se passe-t-il quand l'interrupteur K est ouvert ?
- Que se passe-t-il quand l'interrupteur K est fermé ?
- Quand $I = 10 \text{ A}$, la tige dévie de $\theta = 5^\circ$ et reste en équilibre. Faire le schéma. En déduire la valeur de B . Comment peut-on réaliser expérimentalement un tel champ magnétique ?



Exercice 13 : Déplacement d'un cadre conducteur

On suppose que le champ magnétique B est uniforme et constant entre les plans ($x = 0$) et ($x = d$), et nul ailleurs. Un cadre conducteur carré, de côté a ($a < d$), de résistance totale R et de côtés parallèles aux axes (Ox) et (Oy), circule avec une vitesse constante v . On désigne par $X(t)$ l'abscisse du côté avant du cadre. Déterminer en fonction de X le courant i et la force électromagnétique F résultante qui s'exerce sur le cadre :

- en calculant le champ électromoteur ;
- en utilisant la loi de Faraday ;
- par un bilan énergétique.

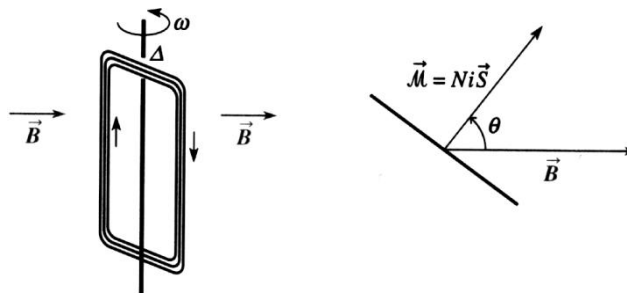


Exercice 14 : Alternateur rudimentaire

Une bobine plate de $N = 200$ spires, d'aire $S = 20\text{cm}^2$, tourne avec une vitesse angulaire constante $\omega = 10 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ entre les pôles d'un aimant en «U», qui produit un champ $B = 0,2\text{T}$ supposé uniforme et normal à l'axe de rotation.

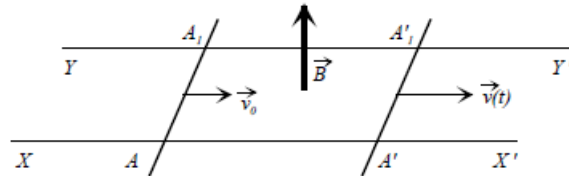
La bobine dont les bornes sont reliées, possède une résistance $R = 1 \Omega$. Le champ qu'elle crée est négligeable devant celui de l'aimant.

- Calculer la f.e.m. d'induction induite par le mouvement de la bobine.
- Déterminer le moment Γ par rapport à l'axe qu'il faut exercer pour entretenir la rotation.
- Effectuer un bilan d'énergie
- Ce dispositif peut être utilisé comme génératrice tachymétrique. Expliquer.



Exercice 15 : Barres mobiles sur deux rails

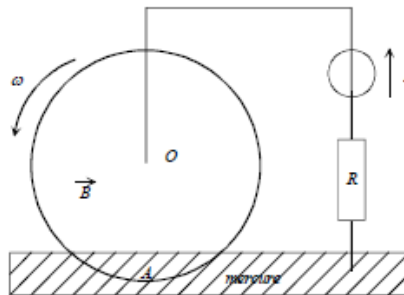
Sur deux rails rectilignes parallèles horizontaux XX' et YY' , de résistance négligeable, sont placées deux barres mobiles horizontales AA_1 et $A'A'_1$ perpendiculaires aux rails. La distance entre les rails est $l = 10\text{ cm}$; la résistance de la partie de chaque barre comprise entre les deux rails est $R = 1\ \Omega$; chaque barre a une masse $m = 10\text{ g}$. L'ensemble étant soumis à l'action d'un champ magnétique vertical B uniforme d'intensité $B = 1\text{ T}$, on déplace la barre AA_1 en l'approchant de $A'A'_1$, avec une vitesse constante $v_0 = 20\text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$ normale à AA_1 . Etudier la loi des vitesses $v(t)$ de la barre $A'A'_1$. Tracer le graphe de $v(t)$.



Exercice 16 : Roue de Barlow

A l'instant $t = 0$, on ferme le circuit d'une roue de Barlow. On désignera r le rayon de la roue, B le module du champ magnétique uniforme normal à la roue, E la f.é.m. du générateur, R la résistance totale du circuit, et J le moment d'inertie de la roue par rapport à son axe Oz . Le mercure exerce sur la roue un système de forces de frottement visqueux dont le moment par rapport à l'axe de rotation de la roue est $-k\omega$, ω étant la vitesse angulaire instantanée de la roue de Barlow.

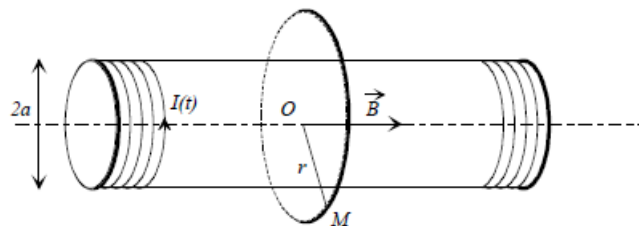
- Exprimer la f.é.m. induite dans le circuit, en fonction de B , r et ω .
- Exprimer le moment Γ des forces électromagnétiques par rapport à l'axe Oz , en fonction de B , r et de l'intensité $i(t)$ dans le circuit.
- Donner la loi $\omega(t)$ et l'intensité i_0 du courant en régime permanent.



Exercice 17 : Bobine autour d'un solénoïde

Un très long solénoïde, de rayon a , est constitué de n spires par unité de longueur. Le solénoïde est entouré d'une bobine plate de résistance R , formée de N spires circulaires de rayon r et de même axe que le solénoïde. Le solénoïde est parcouru par un courant variable $I(t)$ au cours du temps.

- Déterminer le champ électromoteur E_m induit au point M de la bobine plate, en fonction de n , a , r et dI/dt ,
- Exprimer la f.é.m. induite aux bornes de la bobine plate, par deux méthodes différentes.
- Que devient cette f.é.m. si la bobine est extérieure au solénoïde sans l'entourer ?
- Calculer l'inductance mutuelle M de ces deux circuits



Exercice 18 : Moteur asynchrone

Un ventilateur électrique est constitué:

- d'un système fixe de bobines, alimenté en alternatif, produisant un champ magnétique B d'intensité constante mais dont la direction tourne à la vitesse angulaire constante ω_0 ; ce champ tournant demeure orthogonal à un axe $z'z$ fixe;
- d'une petite bobine plate de N spires de surface S , de résistance R et d'inductance L , fermée sur elle-même solidaire des aubes du ventilateur qui tourne à la vitesse angulaire ω autour de l'axe $z'z$.

- Calculer la valeur instantanée $i(t)$ de l'intensité du courant induit dans la petite bobine plate, en régime permanent.
- Calculer le couple instantané Γ du système de forces qui s'exercent sur la bobine plate, ainsi que sa valeur moyenne dans le temps $\langle \Gamma \rangle$.
- Quelles conditions doivent remplir ω et ω_0 pour que ce dispositif fonctionne en moteur ?

Exercice 19 : Roue de Barlow

On s'intéresse à une roue conductrice cylindrique d'axe Oz , d'épaisseur e , de rayon R plongée dans un champ magnétique $\vec{B} = B_0 \vec{u}_z$. Un courant I est amené en O et sort en M , contact ponctuel à l'extérieur de la roue.

- Trouver une expression de I en fonction d'une intégrale de la densité de courant.
- Calculer le moment de la force par rapport à l'axe de rotation.
- Calculer la puissance fournie par le moteur sachant que la roue effectue n tours par seconde.

Exercice 20 : Barres en rotation dans un champ magnétique

Deux barres conductrices homogènes identiques en rotation autour d'un axe horizontal Δ ont un moment d'inertie J autour de cet axe. A l'autre extrémité, elles se déplacent dans des glissières reliées par un fil de résistance R . Le système est plongé dans un champ magnétique $\vec{B}$ parallèle à Δ . On néglige tout frottement.

On appelle φ_1 et φ_2 les angles que font les barres 1 et 2 avec la verticale.

- Déterminer :
 - l'équation électrique qui donne le courant i circulant dans le circuit en fonction de φ_1 et φ_2 ;
 - les équations mécaniques qui donnent l'évolution de φ_1 et φ_2 en fonction de i .

Exercice 21 : Roue de Barlow

La roue métallique représentée figure 3.1 pleine homogène (de masse m) est libre de tourner autour de $\vec{e}_z$. On la modélise par le rayon OA de résistance R , en considérant que ce rayon tourne à la vitesse $\dot{\theta}$.

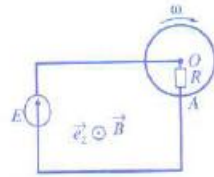


FIG. 3.1 – Roue de Barlow

- 1) Déterminer le mouvement de la roue.

Exercice 22 : ENSSAT 2012

On considère un solénoïde de longueur H , de section circulaire de rayon R_1 , comportant n_1 spires par unité de longueur, parcouru par un courant d'intensité I_1 (on considérera que ce solénoïde se comporte comme un solénoïde infini).

- 1- Déterminer la géométrie du champ magnétique créé par ce solénoïde. En supposant le champ nul à l'extérieur du solénoïde, déterminer le champ en un point intérieur au solénoïde.
- 2- Quelle est la géométrie du potentiel vecteur ? En utilisant la relation intégrale liant le champ magnétique et son potentiel vecteur, déterminer le potentiel vecteur créé en tout point de l'espace par ce solénoïde.
- 3- Déterminer l'inductance propre de ce solénoïde.
- 4- On entoure ce solénoïde d'un solénoïde de même longueur H , de rayon $R_2 > R_1$, comportant n_2 spires par unité de longueur parcouru par un courant d'intensité I_2 . Déterminer l'inductance mutuelle des deux solénoïdes.

Les deux solénoïdes se comportent comme des solénoïdes infinis.

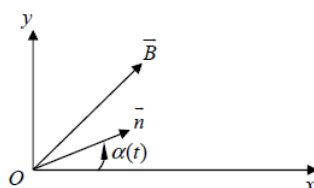
Exercice 23 : ENSSAT 2010

Un moteur est constitué d'un stator fixe créant au voisinage d'un point O un champ magnétique :

$$\vec{B} = B_0 [\cos(\omega_0 t) \vec{u}_x + \sin(\omega_0 t) \vec{u}_y]$$

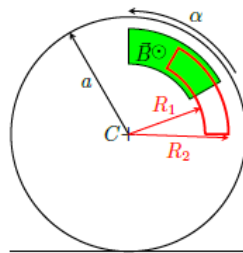
On modélise le rotor par une spire circulaire d'axe horizontal $(O, \vec{n})$ tournant à la vitesse angulaire constante ω autour de son diamètre Oz . On pose $\alpha(t) = \vec{u}_x, \vec{n} = \omega t + \alpha_0$

1. On désigne par i le courant induit dans la spire et on note R , L et S respectivement la résistance, l'auto-inductance et la surface de la spire. On étudie le régime établi. Déterminer l'équation électrique du dispositif. En déduire $i(t)$ en régime établi.
2. Déterminer, en régime établi, le couple moyen exercé sur le rotor par les actions mécaniques de Laplace.



Exercice 24 : Cycliste (Centrale 2011)

Un cycliste, soucieux d'économiser ses patins de frein, met à profit ses connaissances de physique et installe sur son vélo un dispositif électromagnétique. Un électroaimant crée, à la demande du cycliste, un champ magnétique horizontal stationnaire perpendiculaire à une des deux roues dans une zone restreinte (zone colorée ci-dessous). Pour simplifier l'étude, nous supposons le champ magnétique uniforme dans cette zone. Sur une roue dépourvue de rayons (roue lenticulaire : disque non conducteur) est fixé un contour en cuivre donc la forme est visible sur le schéma ci-dessous (contour en trait gras de même largeur angulaire α que la zone colorée, de rayons intérieur et extérieur R_1 et R_2). Comme le montre la figure, le contour peut pénétrer entièrement dans la zone où règne un champ magnétique.



Le cycliste actionne l'électroaimant alors qu'il roule en ligne droite à une vitesse V_0 .

1. Sur quel argument qualitatif se base le cycliste-physicien pour expliquer le dispositif choisi ?
2. Déterminer l'évolution temporelle de la vitesse angulaire des roues au cours du premier tour de roue où l'électroaimant est actionné. On donnera en particulier la diminution de vitesse angulaire au bout du premier tour.
3. Combien de tours sont nécessaires pour un arrêt complet du vélo ? Quelle est la distance parcourue au cours du freinage ?
4. Quel phénomène gênant apparaît dans le fil de cuivre ? Avec quelle(s) conséquence(s) ?

Les applications numériques seront effectuées avec les données suivantes

- Vitesse initiale $V_0 = 30 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$.
- Masse de l'ensemble {cycliste + vélo} : 80 kg.
- Roue lenticulaire de diamètre $2a = 700 \text{ mm}$, de masse $m = 1,2 \text{ kg}$, de moment d'inertie par rapport à son axe de rotation $J = 12 \text{ ma}^2$.
- Zone de champ magnétique : $\alpha = 0,20 \text{ rad}$, $B = 1,0 \text{ T}$.
- Contour en cuivre de section $s = 2,5 \text{ mm}^2$, de résistivité $\rho = 1,7 \times 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$, $R_1 = 25 \text{ cm}$, $R_2 = 30 \text{ cm}$, même ouverture angulaire α que la zone de champ magnétique.

Exercice 25 : Câble coaxial

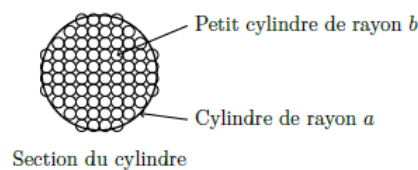
Une ligne coaxiale est constituée de deux cylindres C_1 et C_2 infinis d'épaisseur très faible, de rayon a et b , parcourus par des intensités I et $-I$. On note V_1 et V_2 les potentiels des deux cylindres et on néglige toute chute de tension le long de la ligne.

- a) Calculer le vecteur de Poynting en tout point situé entre les conducteurs.
- b) En déduire l'expression du flux de ce vecteur à travers un plan de section droite. Exprimer en fonction de V_1 , V_2 et I . Conclure.

Exercice 26 : Centrale 2011

Un cylindre métallique de conductivité γ , de « grande » longueur, d'axe Oz, de rayon a , est plongé dans un champ magnétique uniforme colinéaire à Oz, variable dans le temps : $\vec{B} = B_0 \cos(\omega t)$.

1. Déterminer le champ électrique $\vec{E}(M, t)$ induit par le champ $\vec{B}$ en tout point M du cylindre et en déduire le vecteur densité volumique de courant $\vec{j}(M, t)$. On néglige pour l'instant le champ magnétique créé par ces courants induits.
2. Calculer la puissance moyenne P_J dissipée par effet joule dans une portion de cylindre de longueur h .
3. On remplace le cylindre par un grand nombre de cylindres de petit rayon b , de même longueur, serrés les uns contre les autres de manière à ce que l'ensemble de ces cylindres occupe le même volume que le cylindre initial.



En négligeant les petits volumes qui existent entre les petits cylindres, évaluer la nouvelle valeur P'_J de la puissance moyenne dissipée par effet joule. Exprimer le rapport P'_J / P_J en fonction de a et b . Commenter.

4. On reprend le cylindre initial de rayon a et on se propose d'évaluer le champ magnétique créé par les courants induits sur l'axe Oz.

Calculer le champ magnétique $d\vec{b}$ créé sur l'axe Oz par les courants induits dans le métal entre les cylindres de rayons r et $r + dr$. En déduire le champ magnétique total $\vec{b}$.

Comparer $\vec{b}$ et $\vec{B}$. Commenter.

Exercice 27 : Cavité résonante

On s'intéresse à une cavité contenue entre deux plans parallèles infinis, taillée dans un conducteur parfait entre $z = 0$ et $z = a$. On s'intéresse à un champ électromagnétique, qui est la superposition de deux ondes planes progressives monochromatiques polarisées rectilignement de sens de propagation opposés $\pm u_z$.

- a) Donner la forme exacte du champ électrique dans la cavité.
- b) Montrer que seules certaines longueurs d'onde discrètes λ_n peuvent exister dans la cavité. Quelles sont les fréquences f_n associées ?
- c) Comment appeler ce phénomène ? Donner une analogie en électrocinétique. Que se passe-t-il si on essaie de créer un champ électromagnétique de fréquence différente de f_n ?
- d) Tracer sur un même graphe l'allure, à un instant donné, du champ électrique pour les trois plus basses fréquences. Combien de nœuds et de ventres possède le mode numéro n ?
- e) En admettant que, dans le domaine de l'acoustique, un tube soit régi par les mêmes équations qu'une cavité résonante, identifier les tubes d'une flûte de Pan produisant les sons aigus et ceux produisant les sons graves. On supposera que le mode fondamental $n = 1$ est prédominant.

Exercice 28 : Superposition des deux ondes planes progressives monochromatiques

On s'intéresse à la superposition de deux ondes planes progressives monochromatiques de même amplitude E_0 , de même pulsation ω et se propageant respectivement selon les vecteurs u_1 et u_2 . On pose pour $0 \leq \alpha \leq \pi/2$:

$$\begin{aligned}\vec{u}_1 &= \sin \alpha \vec{u}_x + \cos \alpha \vec{u}_z \\ \vec{u}_2 &= -\sin \alpha \vec{u}_x + \cos \alpha \vec{u}_z\end{aligned}$$

- Quelles sont les normes des deux vecteurs d'onde k_1 et k_2 ?
- Sachant que les deux champs électriques sont parallèles à u_y et qu'ils sont en phase dans le plan $x = 0$, donner leur expression sous forme complexe.
- En déduire l'expression du champ électrique total (réel). Décrire l'onde obtenue. Est-elle plane ? Est-elle progressive ?
- Donner la forme du champ magnétique (réel). Commentaires.
- En déduire le vecteur de Poynting moyen. Pouvait-on deviner sa direction ?

Exercice 29 : Champ rayonné par une plaque de courants

Dans le plan $z = 0$, des courants surfaciques :

$$\vec{j}_s = j_s^0 \exp(i(\omega t - \alpha x)) \vec{u}_y$$

avec $\alpha < \omega/c$, engendrent un champ électromagnétique dans tout l'espace. Partout ailleurs, l'espace est vide.

- Trouver la densité surfacique de charges σ portée par le plan $z = 0$ à l'aide d'une équation de conservation de la charge surfacique.
- Expliquer pourquoi on cherche le champ électrique sous la forme (variables et direction) :

$$\vec{E} = f(z) \exp(i(\omega t - \alpha x)) \vec{u}_y$$

- Trouver une équation satisfaite par f et la résoudre. On pose :

$$\beta = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \alpha^2}$$

- Quelle est la forme du champ électrique pour $z > 0$ et pour $z < 0$ (on écrira le champ sous la forme de la superposition de deux ondes planes progressives monochromatiques) ? Vu le problème, éliminer une des deux ondes dans chaque demi-espace.
- Conclure en utilisant les relations de passage pour les champs.
- Commenter, sur les expressions de E et B , le fait que $z = 0$ soit un plan de symétrie des sources du champ électromagnétique.
- Quelle est la relation entre le module du vecteur d'onde et la pulsation ? Est-ce surprenant ?

Exercice 30 : Ondes électromagnétiques planes progressives

On étudie la propagation d'une onde électromagnétique dans le vide.

1) Rappeler l'équation aux dérivées partielles à laquelle satisfont les champs électrique et magnétique.

2) On suppose que le champ électrique est de la forme :

$$\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kz) \vec{u}_x$$

a) A quelle équation doit satisfaire k pour que ce champ soit solution de l'équation rappelée à la question 1 ?

b) Quels sont la direction, le sens et la vitesse de propagation de cette onde ?

c) Quel est l'état de polarisation de cette onde ?

d) Quelle est la structure de cette onde ?

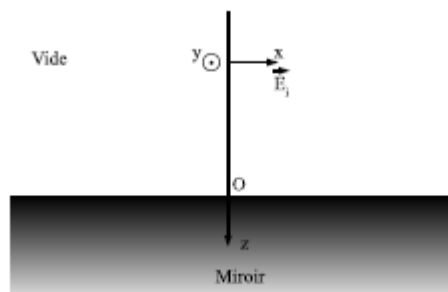
e) Calculer le champ magnétique associé à ainsi que le vecteur de Poynting de l'onde.

f) La puissance moyenne rayonnée par cette onde à travers une surface $S = 4 \text{ mm}^2$ orthogonale à sa direction de propagation est $P = 10 \text{ W}$. Calculer les amplitudes de E_0 et B_0 des champs électrique et magnétique.

Exercice 31 : Réflexion d'une onde plane à la surface d'un miroir (ENSSAT 2012)

On considère un miroir plan, assimilé à un conducteur parfait, surmonté par du vide. Une onde plane de vecteur champ électrique $\vec{E}_i = E_{0,i} \cos(k_i z - \omega t) \vec{u}_x$ arrive en incidence normale sur le miroir.

Déterminer la structure du champ électromagnétique $(\vec{E}, \vec{B})$ dans tout l'espace.



Exercices avec utilisation d'un logiciel informatique

Exercice A : Conducteurs cylindriques à l'équilibre

Deux armatures cylindriques concentriques identiques, parallèles, seules dans l'espace, sont séparées de la distance d très grande devant leur rayon a . L'hypothèse $d \gg a$ permet de considérer que les densités de charges sont uniformes à la surface de chaque cylindre conducteur. Les armatures portent des charges opposées, ce que nous représentons par deux charges linéiques, λ et $-\lambda$, associées aux deux cylindres respectivement. L'air baignant les deux cylindres est assimilé au vide ; l'ensemble est à l'équilibre.

Le système étant supposé invariant dans la direction des cylindres, notée z , l'étude est limitée à un plan perpendiculaire aux cylindres. O étant, dans ce plan, le point à égale distance des centres des deux cylindres, on note Ox l'axe allant du cylindre chargé négativement ($-\lambda$) vers le cylindre chargé positivement (λ). Un axe Oy complète les deux précédents de telle sorte que (Ox, Oy, Oz) est un repère orthonormé direct.

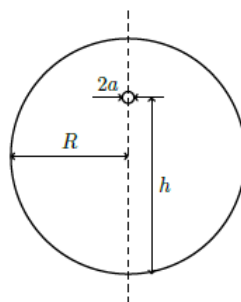
1. Exprimer les potentiels électrostatiques V_+ et V_- auxquels sont portés respectivement le cylindre chargé λ et le cylindre chargé $-\lambda$.

2. Expliquer pourquoi le système des deux conducteurs peut être considéré comme un condensateur, dont on exprimera la capacité linéique Γ .

Application numérique : $d = 12 \text{ m}$, $a = 5 \text{ mm}$; la permittivité électrique du vide est $\epsilon_0 = 8,8 \times 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$.

3. Les surfaces équipotentielles apparaissent dans le plan (Oxy) comme des courbes. Faire tracer plusieurs d'entre elles, au moyen de la feuille de calcul Maple jointe. Qu'observez-vous ? On justifiera bien sûr les calculs proposés par cette feuille de calcul.

4. Application : un conducteur cylindrique de rayon a passe dans un tunnel cylindrique conducteur de rayon R , parallèle à l'axe de celui-ci. Il est à hauteur h constante au dessus du sol. Le potentiel du tunnel sera pris nul (potentiel de la terre). Le cylindre conducteur est porté au potentiel $V_c = 1,5 \text{ kV}$.



5. Donner l'expression de la capacité linéique Γ du système, ainsi que du champ électrique à la surface du conducteur cylindrique.

Application numérique : $R = 4 \text{ m}$, $h = 6 \text{ m}$ et $a = 5 \text{ mm}$.

```

> restart : gc( ) : with(plots) :
> V := (r1, r2) ->  $\frac{\text{lambda}}{2 \cdot \text{Pi} \cdot \text{epsilon}} \cdot \log\left(\frac{r2}{r1}\right) : V(r1, r2);
> subs\left(\left\{r1 = \sqrt{r^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2} + d \cdot r \cdot \cos(\text{theta})\right\}, r2 = \sqrt{r^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2} - d \cdot r \cdot \cos(\text{theta})\right),$ 
```

$$V(r1, r2) : \text{subs}\left(\left\{r = \sqrt{x^2 + y^2}, \text{theta} = \arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)\right\}, \%\right) : V := \% : V;$$

```

> lambda := 1 : epsilon := 1 : d := 1 :
> plot3d(V, x = -1 .. 1, y = -1 .. 1, axes = boxed, grid = [40, 40], shading = none);
> gequipot := display(seq(implicitplot(V = 0.04 \cdot k, x = -1 .. 1, y = -1 .. 1, view = [-1 .. 1, -1 .. 1],
    scaling = constrained, numpoints = 10000), k = -10 .. 10)) :
> gequipot,
>

```