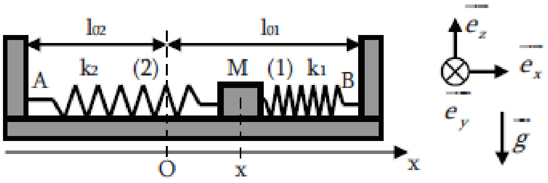
Exercice A : Oscillation d'un point relié à deux ressorts

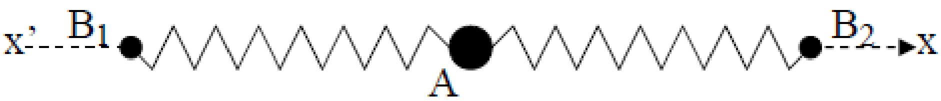
Le référentiel $\Re_G = \left(O, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z}\right)$ est supposé galiléen. Un point matériel M de masse m est attaché à 2 ressorts (1) et (2) horizontaux, de raideurs k_1 et k_2, et de longueurs à vide l_{01} et l_{02}, reliés à deux points fixes A et B distants de ($l_{01}+l_{02}$). Le point M glisse sans frottement le long de l'axe $\left(O, \overrightarrow{e_x}\right)$ à partir de sa position d'équilibre située en O. Il est repéré sur cet axe par son abscisse $x = \overline{OM}$.



1) Justifier la position d'équilibre en O du point M.
2) Etablir l'équation différentielle du mouvement de M. En déduire la période T des oscillations et la raideur k du ressort équivalent à cette association.
3) A l'instant t = 0, le point est abandonné sans vitesse initiale du point M_0 d'abscisse x_0. Déterminer l'équation horaire du mouvement x(t).

Exercice 1 : 3 masses et 2 ressorts

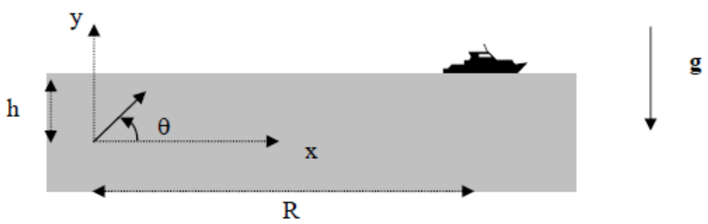
Trois points matériels A(M), B_1(m) et B_2(m) sont assujettis à se déplacer sans frottement sur l'axe horizontal x'x. Ils sont reliés par deux ressorts identiques de raideur k et de longueur à vide l_0. Les vitesses initiales sont nulles et on note : $x = \overline{A_0A}, l_0 + x_2 = \overline{A_0B_2}$ et $l_0 - x_1 = \overline{B_1A_0}$, A_0 étant la position initiale de A.



Etudier le mouvement du système et donner les valeurs exactes de x(t), x_1(t) et x_2(t) dans le cas où $x_1(0) = 0$ et $x_2(0) = a$. (Par application du principe fondamental de la dynamique, on obtient 3 équations ; on cherche des solutions sinusoïdales et on raisonne donc en complexes ; on obtient alors une matrice 3-3 et 3 modes propres…).

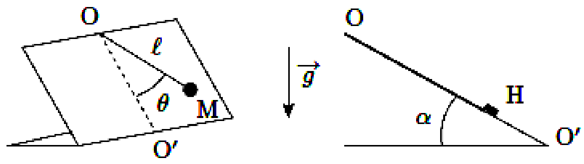
Exercice 2 : Portée d'un missile mer-mer

Un missile de masse m, de volume V est tiré d'un sous-marin en plongée à une profondeur h, avec une vitesse $\mathbf{v}_0$ faisant l'angle θ avec l'horizontale. La masse volumique de l'eau est notée ρ. On néglige le frottement de l'air. Le frottement dans l'eau est modélisé par la force $\mathbf{f} = -mc\mathbf{v}$ où c est une constante. Déterminer la portée R du missile en admettant que celui-ci est *pesé* ($m = \rho V$)



Exercice B : Pendule sur un plan incliné

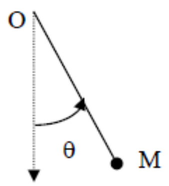
Sur un plan solide incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale, on attache en un point fixe O du plan un fil de longueur l, et on suspend à l'autre extrémité un point matériel M de masse m. La position du pendule ainsi constitue est repérée par l'angle θ(t) formée par le fil avec la ligne OO' de plus grande pente sur le plan incline. On note H la projection orthogonale du point M sur cette ligne. Les cotes des différents points sont définies par rapport à l'axe vertical ascendant (Oz).



1) Exprimer les énergies cinétiques E_C et potentielle E_P du point M en fonction de θ.
2) En déduire l'équation différentielle du second ordre vérifiée par θ. Quelle est la nature des oscillations de faible amplitude ?

Exercice 3 : Le pendule pas si simple…

Un point matériel M, de masse m, est relié à un point fixe O d'un repère galiléen par un fil inextensible de longueur L. Il est abandonné sans vitesse initiale, le fil étant tendu et faisant l'angle $\theta = \theta_0$ avec la verticale descendante.



1. Quel est, sans calculs, le point de la trajectoire où la vitesse de M est maximum ?
2. Peut-on répondre à la question précédente en remplaçant le mot vitesse par le mot accélération ?
3. Calculer l'accélération au point courant en fonction de θ. Montrer que selon que θ_0 est plus grand ou plus petit qu'un angle critique θ_c que l'on déterminera, l'accélération est minimum ou maximum en O.

Déterminer l'angle θ pour lequel l'accélération de M est maximum dans le cas particulier $\theta_0 = 60°$.

Exercice C : Machine à laver

Le tambour d'une machine à laver tourne autour d'un axe horizontal. Quelle doit être la vitesse minimale de rotation du tambour pour que le linge reste colle aux parois pendant l'essorage ? Le diamètre du tambour est d = 50cm et g = 10m.s^{-2}.

Exercice D : Déviation d'un palet

Un hockeyeur se trouve en un point A à la surface de la Terre situe à la latitude λ = 51°, sur une surface plane horizontale gelée. A l'aide de sa crosse, il propulse un palet, assimilé à un point matériel M de masse m = 300 g, vers le sud et avec une vitesse initiale v = 10m.s^{-1}, en direction d'un mur situé à une distance D = 500m. On note Ω la vitesse de rotation de la Terre sur elle-même. On ne tient pas compte de l'effet des frottements sur le mouvement du palet. On donne T = 86164s la durée du jour sidéral terrestre.

1) En supposant que le vecteur vitesse $\vec{v}$ du palet est bien approché par celui du mouvement dans un référentiel galiléen, exprimer la force d'inertie de Coriolis exercée sur le palet. Comment est orientée cette force ?

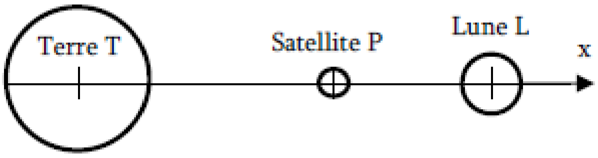
2) Déterminer les équations horaires approchées x(t) et y(t) du palet, le repère (Axyz) étant tel que l'axe (Ax) est vers le sud et l'axe (Ay) vers l'est.

3) En déduire la déviation Δy subie par le palet lorsqu'il frappe le mur. Faire l'application numérique.

4) On considère le cas où le tir est effectué depuis le pôle nord. Retrouver l'expression littérale de la déviation Δy en analysant le mouvement du palet dans le référentiel géocentrique.

Exercice 4 : Point d'équigravité

Un solide assimilé à un point matériel P de masse m est situé sur l'axe Terre-Lune à la distance x du centre T de la Terre. On note d = 3,84.10^5 km la distance T_L (L centre de la Lune). On note M_T = 5,97.10^{24} kg et $M_L = M_T/81$ les masses de la Terre et de la Lune. L'action gravitationnelle exercée par la Terre (ou la Lune) sur le point matériel s'obtient en concentrant toute la masse M_T (ou M_L) au centre.



1) Quelle est la force gravitationnelle résultante F(x) exercée sur P ?

2) Déterminer la distance x_e du point d'équigravité E ou le point matériel se trouve en équilibre

3) Cet équilibre est-il stable ?

4) Calculer les énergies potentielles desquelles dérivent chacune de ces forces

5) Redémontrer par cette méthode énergétique la nature de l'équilibre.

Exercice E : Orbite de transfert

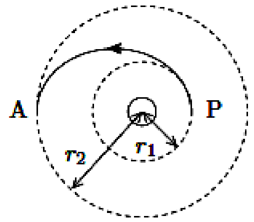
On désire réaliser le transfert d'un satellite terrestre en attente sur une orbite circulaire « basse » de rayon r_1 = 6700km vers une orbite circulaire « haute » de rayon r_2 = 42000km (géostationnaire), en passant par une orbite de transfert, dite de Hohman, tangente aux deux orbites circulaires. On donne $G = 6{,}67.10^{-11}$ $N.m^2.kg^{-2}$, et $M_T = 6.10^{24}$ kg.

1) Exprimer en fonction de r_1 et r_2 le demi grand axe de l'ellipse de transfert.

2) Exprimer et calculer les vitesses v_1 et v_2 du satellite sur les orbites circulaires de rayons respectifs r_1 et r_2.

3) Déterminer l'expression des vitesses v_P et v_A du satellite sur l'ellipse de transfert respectivement aux points P (juste après l'extinction des moteurs) et A (juste avant le rallumage des moteurs). Les calculer.

4) En déduire les accroissements de vitesse orthoradiale Δv_P et Δv_A.



Exercice 5 : ENSSAT 2010

Calculer la vitesse d'un satellite de masse m = 1800 kg sur une orbite circulaire à une altitude h = 500 km autour de la terre de rayon R_T = 6400 km et de masse M.

On rappelle que l'on peut relier facilement le produit G.M à la norme du champ de pesanteur à la surface de la terre g = 9, 8 $m.s^{-1}$.

Exercice 6 : ENSSAT 2010

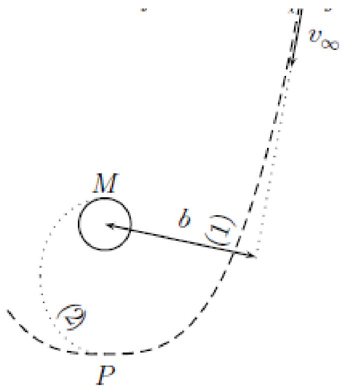
Un satellite de masse m a une trajectoire hyperbolique (1) de centre de force la planète Mars, de masse M et de rayon R_M. Il arrive de l'infini avec une vitesse v_1. Sa trajectoire est alors confondue avec l'asymptote de l'hyperbole. On donne la distance b entre le centre de force et son projeté orthogonal sur l'asymptote.

1) Exprimer en fonction des données les deux grandeurs qui se conservent au cours du mouvement du satellite sur sa trajectoire hyperbolique.

2) Exprimer la distance minimale d'approche dm de la planète mars, en fonction des données (lorsqu'il se trouve en P).

3) Au périgée de sa trajectoire, on modifie brutalement la vitesse du satellite afin de le positionner sur une orbite elliptique (2). Cette trajectoire est la trajectoire limite permettant au satellite de rentrer en contact avec Mars. Déterminer la variation d'énergie cinétique pour le satellite.

On donne la constante de gravitation G.



Exercice 7 : Déviation d'un satellite

On note M la masse de la Terre de centre O et G la constante gravitationnelle. Un satellite en P de masse m est lancé à une distance r_0 avec une vitesse «déviée» d'un angle α, mais de même norme que celle qu'il aurait sur une orbite circulaire de rayon r_0.

1) Calculer l'énergie potentielle de gravitation.

2) Trouver une équation du second degré dont OP à l'apogée et au périgée est solution.

3) Exprimer r_p au périgée et r_a à l'apogée en fonction de r_0 et α.

4) L'équation polaire de la trajectoire est $r = \frac{p}{1+e.\cos\theta}$.

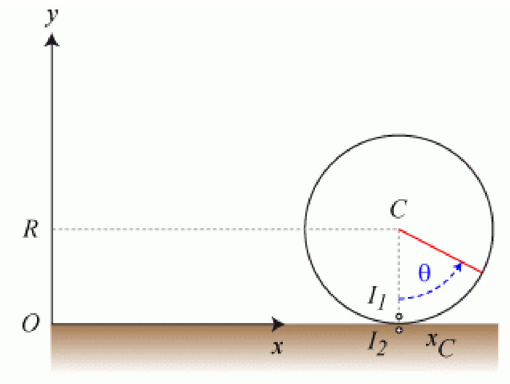
  4.a) Calculer p et e en fonction de r_0 et α.

  4.b) Qu'obtient-on pour $\alpha = 0$?

  4.c) Comment fait-on pour passer d'une orbite circulaire à une orbite elliptique ? Et inversement ?

Exercice 8 : Etude du contact d’un disque

Un disque vertical homogène de rayon R, de centre C de masse M roule sans glisser sur un plan. Exprimer la vitesse de glissement du disque sur le plan. Écrire la condition de roulement sans glissement.



Exercice 9 : Mouvement vertical d'un Yo-yo

Un Yo-yo est assimilé à un disque homogène, de masse m, de rayon R, autour duquel est enroulé un fil sans masse. L'autre extrémité du fil est maintenu fixe en O. A l'instant t = 0, on lâche le Yo-yo sans vitesse initiale, le fil étant vertical. On suppose que le fil ne glisse pas sur le disque.

a) Soit α la position angulaire du yo-yo par rapport à l'horizontale et x la position verticale de son centre de gravité (voir schéma). Quelle relation géométrique existe-t-il entre α et x ?

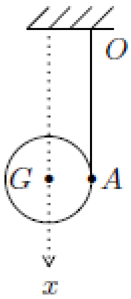
b) Déterminer l'accélération de G.

c) Déterminer la tension du fil.

d) En déduire l’équation générale du mouvement.

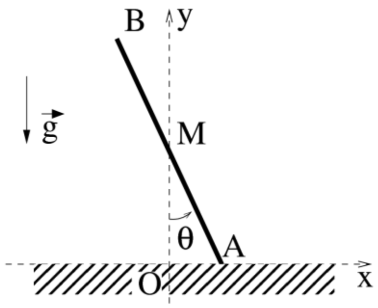
Le moment d'inertie du disque par rapport à son axe est $J=1/2mR^2$.

e) Retrouver à partir de l'énergie cinétique l'équation différentielle du mouvement.



Exercice 10 : Chute d'une barre

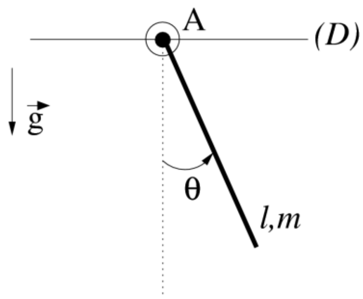
Une barre rigide AB, homogène de masse m, de longueur 2l et de section négligeable, est posée verticalement sur le sol en A. Le contact de la barre avec le sol en A est suppose sans frottement. Soit θ l'angle que fait la barre par rapport à la verticale (voir figure). A l'instant initial, la barre est très légèrement déplacée (sans vitesse initiale) de son équilibre instable et tombe.
En utilisant le théorème de la résultante dynamique et le théorème du moment cinétique :
a) Montrer que le mouvement du milieu M de AB est vertical.
b) Déterminer l'équation différentielle du mouvement vérifiée par l'angle θ.



Exercice 11 : Oscillation d'une barre

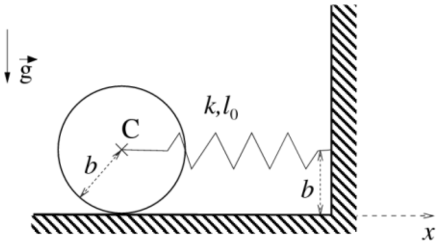
Une barre, homogène de masse m, de longueur l est attachée en A à un axe (D) horizontal fixe (voir figure). Grâce à des roulements à billes (de masse négligeable) la liaison entre la barre et l'axe (D) a les caractéristiques suivantes :
- La barre peut tourner librement (sans frottement) autour de A, dans le plan de la figure. Soit θ l'angle que fait la barre avec la verticale à l'instant t.
- Le point d'attache A peut se déplacer sans frottement le long de l'axe (D) ; ainsi la force $\vec{R}$ de l'axe (D) sur la barre est toujours verticale.

La barre est lâchée, sans vitesse initiale, d'un angle θ_0.
a) Montrer que le centre de gravité de la barre se déplace sur un axe vertical.
b) Trouver l'équation différentielle du mouvement de la barre (équation différentielle dont θ est solution).
<u>Donnée</u> : Le moment d'inertie J d'une barre homogène, de masse m, de longueur l, par rapport à son axe de symétrie (axe perpendiculaire à la barre passant par son centre) est $J=1/12ml^2$.



Exercice 12 : Oscillation d'un cylindre

Un cylindre plein homogène, de masse m, de centre C et de rayon b, est attaché en C à un ressort de longueur à vide l_0 et de raideur k (voir figure). La liaison entre le cylindre et le ressort est parfaite (sans frottement) et le cylindre peut tourner librement autour de son axe de symétrie.
Le cylindre peut se déplacer, sans glisser, sur le sol horizontal dans la direction x. Le contact entre le cylindre et le sol est caractérisé par un coefficient de frottement μ.
En utilisant le théorème de moment cinétique, déterminer la période d'oscillation du cylindre autour de sa position d'équilibre.
Rappel: Le moment d'inertie J d'un cylindre homogène, de masse m, de rayon b, par rapport à son axe de symétrie (axe du cylindre passant par son centre) est $J = 1/2mb^2$.



Exercice 13 : Oscillations d'un demi-disque sur un plan horizontal

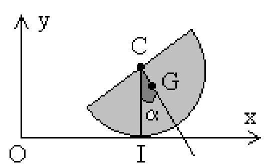
On considère un demi-disque (D) homogène, de centre C, de centre de masse G, de rayon R et de masse m. Le référentiel terrestre (Oxyz) est supposé galiléen.
Tout en restant dans le plan vertical (Oxy), le demi-disque roule sans glisser sur le plan horizontal. On désigne par I le point de contact entre le sol et (D) et on repère la position de (D) par l'abscisse x de C et par l'angle $\alpha = \left(\overrightarrow{CI}, \overrightarrow{CG}\right)$. A l'instant initial, on lâche (D) sans vitesse initiale dans la position $\alpha = \alpha_0$. On démontre que $CG = b = \frac{4R}{3\pi}$.

Le moment d'inertie de (D) par rapport à un axe passant par *C* perpendiculaire à (D) vaut $J = \frac{1}{2}mR^2$.

Pour trouver le moment d'inertie par rapport au centre de masse G, il faut utiliser le théorème de Huygens :

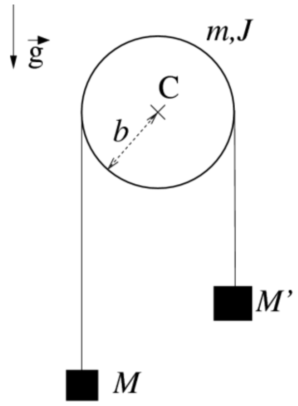
$$J = J_{Gz} + mb^2$$

a) Ecrire une intégrale première du mouvement.
b) En déduire la période des petites oscillations.



Exercice 14 : Machine d'Atwood

Une poulie circulaire, de rayon b, de centre C, de masse m, de moment d'inertie J par rapport à son axe, peut tourner librement (sans frottement) autour de son axe horizontal fixe.
Cette poulie supporte grâce à un fil inextensible de masse négligeable, d'un côté un masse M et de l'autre une masse M' supérieure à M. On suppose que le fil ne glisse pas sur la poulie.
Calculer l'accélération de la masse M’ en fonction des données de l'énoncé en utilisant l'énergie ou la puissance mécanique.

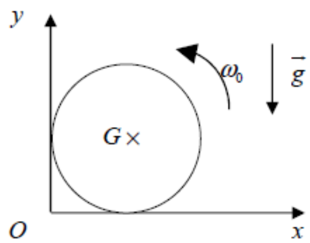


Exercice 15 : ENSSAT 2010

Un disque de masse m et de rayon r de moment d'inertie par rapport à son axe $J_G = \frac{1}{2}mr^2$ tourne initialement à la vitesse angulaire ω_0 (cf. figure). On suppose que le disque reste en permanence en contact avec les axes Ox et Oy.

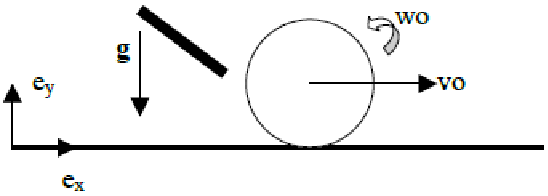
1) On note f le coefficient de frottement de glissement. Calculer $\vec{R}$ et $\vec{R'}$, réactions du mur et du sol.

2) Déterminer ω(t) dans le cas où le cylindre tourne dans le sens indiqué et reste collé au dièdre formé par Ox et Oy.



Exercice 16 : ENSSAT 2012

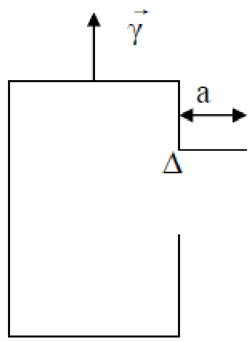
Un joueur de billard met en mouvement une boule, de masse m, de rayon R, de moment d'inertie J. La boule se déplace dans le plan vertical (O,ex,ey).
A t= 0 : $v=v_o\mathbf{e_x}$ et $w=w_o\mathbf{e_z}$ avec $v_o>0$ et $w_o>0$.
Le coefficient de frottement sur le tapis est f.



1) Exprimer la vitesse de glissement à t=0. Conclure.
2) Déterminer v(t) et w(t) en appliquant les lois de la résultante cinétique et du moment cinétique.
3) Déterminer la durée t_o au bout de laquelle cesse la première phase du mouvement. On prendra $J=\frac{2}{5}mR^2$
4) Quelle est la nature de la nouvelle phase du mouvement ? Déterminer v(t') et w(t').
5) Quelles sont les conditions initiales nécessaires pour que la boule de billard repasse par sa position de départ ?

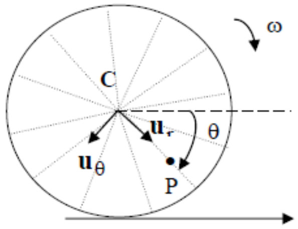
Exercice 17 : Attention aux doigts

Par rapport à un référentiel inertiel R, une voiture démarre avec une accélération constante ϒ, sa portière étant initialement ouverte. Déterminer la vitesse de rotation de la portière au moment où elle se referme en raisonnant dans le référentiel R' lié à la voiture.
La liaison d'axe portière – voiture est supposée parfaite. La portière a une masse m repartie de façon uniforme, une largeur a et un moment d'inertie par rapport à l'axe $J_\Delta=\frac{1}{3}ma^2$.
On appliquera le théorème du moment cinétique en A, point de Δ, au niveau du milieu de la portière.



Exercice 18 : La roue Floue

Une roue de bicyclette de centre C, de rayon R, roule sans glisser sur un axe horizontal. On appelle ω la vitesse angulaire de la roue. On repère un point P d'un rayon par ses coordonnées polaires (r, θ) relativement à C.

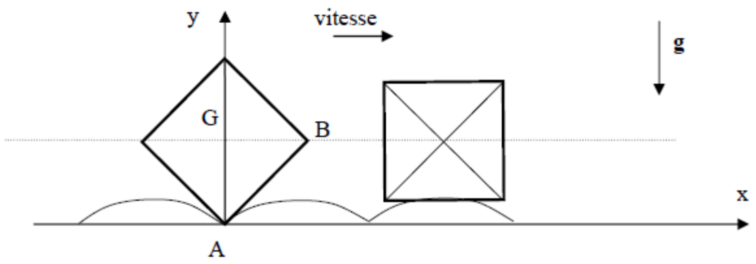


1. Exprimer la vitesse de P sur la base $(\mathbf{u}_r, \mathbf{u}_\theta)$.

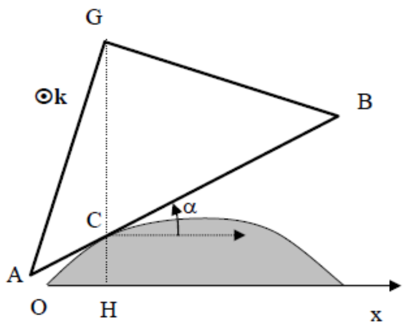
2. Déterminer l'ensemble des points P des rayons de la roue qui ont une vitesse instantanée radiale. En déduire l'aspect de la photo de la roue si le temps de pose est assez long.

Exercice 19 : La roue carrée

Dans le plan vertical (xOy) d'un repère galiléen $R(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$, une roue carrée homogène, de centre G, de côté $2a$ roule sans glisser sur un sol bosselé de telle sorte que G soit à la verticale du point de contact C avec le sol et que la trajectoire de G soit une droite horizontale.



A l'instant initial, la diagonale GA est verticale et le sommet A se confond avec l'origine O du repère.



La figure ci-contre représente le quadrant GAB de la roue à l'instant t. Le coté AB est tangent au profil de la bosse au point C de coordonnées (x, y) et fait l'angle α avec l'horizontale. On cherche le profil par son équation cartésienne $y = f(x)$.

1. Montrer que la fonction $f(x)$ suit l'équation différentielle :

$$1 + \left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right)^2 = \left(\sqrt{2} - \frac{f}{a}\right)^2$$

Avec la condition initiale $f(0) = 0$, montrer que le profil de la bosse est un arc de chaînette d'équation : $y = a\left(\sqrt{2} - \mathrm{ch}\left(k - \frac{x}{a}\right)\right)$ en précisant la valeur de k.

En déduire la période spatiale p des bosses.

2. Exprimer le vecteur rotation de la roue et écrire la condition de roulement sans glissement. Déterminer la vitesse v de G en fonction de α sachant que le moment d'inertie de la roue par rapport à l'axe horizontal passant par G est : $I = \frac{1}{3}ma^2$. Comparer au cas d'un disque roulant sans glisser sur un sol plat.

Exercice 20 : Une bille dans une goutière

On place une bille de rayon r, de moment d'inertie $I = \frac{2.m.r^2}{5}$ par rapport à l'un de ses axes, à l'intérieur d'un cylindre de rayon R d'axe horizontal et on la lâche d'un angle $\varphi = \varphi_0$ (cf. figure 2.1).

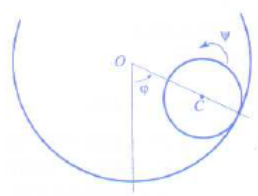


FIG. 2.1 – la bille dans la goutière

On donne $\psi(0) = 0$, $\dot{\psi}(0) = 0$, $\varphi(0) = \varphi_0$, $\dot{\varphi}(0) = 0$.

1) Montrer par des considérations physiques que $|\varphi(t)| \leq \varphi_0$.

2) Etablir l'expression de $\psi(t)$.

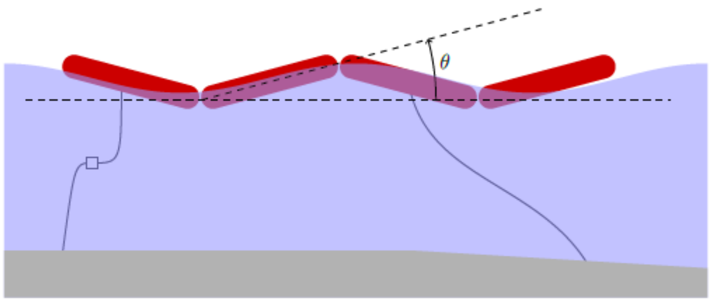
On note f le coefficient de frottement statique.

3) A quelle condition y-a-t-il roulement sans glissement ?

4) Commenter pour $\psi_0 = 15°$; $R = 2m$; $r = 5cm$; $g = 9,81 m.s^{-2}$.

Exercice 21 : Centrale 2011

Un Pelamis® est un dispositif constitué de flotteurs cylindriques couplés à des génératrices, fixé sur le fond marin, prélevant l'énergie de la houle.



On note θ l'angle entre un flotteur et l'horizontale. Il subit de la part de ses voisins deux couples. Un couple de rappel élastique $-C\theta$ et un couple résistant $-\beta d\theta/dt$ qui entraine une génératrice. Sur chaque flotteur s'exerce de plus un couple moteur dû à la houle : $\Gamma_0 \cos \omega t$. On note J le moment d'inertie d'un cylindre par rapport à son centre que l'on supposera fixe.

1) Déterminer l'équation du mouvement pour un flotteur ayant deux voisins.

2) En déduire l'expression de $\theta(t)$ en régime sinusoïdal forcé.

3) En déduire l'expression de la puissance moyenne fournie à la génératrice.

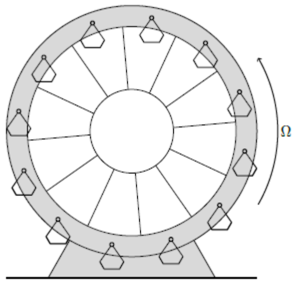
4) Γ_0, J et ω étant fixés, déterminer les valeurs de C et β qui maximisent cette puissance. On utilisera éventuellement un logiciel de calcul formel. Commenter.

5) Définir l'efficacité et le rendement d'un tel dispositif. Discuter.

Exercices avec utilisation d'un logiciel informatique

Exercice A : Pendule dans une grande roue

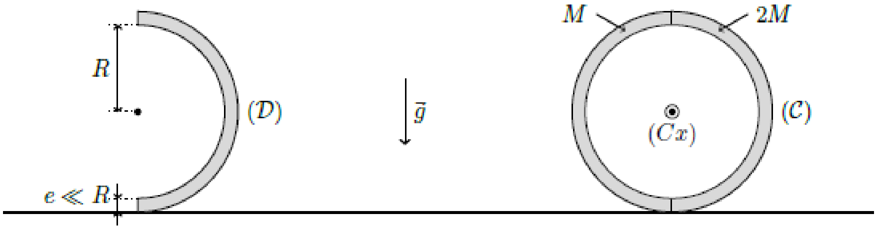
Un chronomètre est réalisé par association d'un dispositif à oscillations périodiques et d'un compteur qui compte et affiche le nombre N d'oscillations pendant une durée donnée. Nous modélisons ici le dispositif oscillant par un pendule simple (fil inextensible de longueur l comportant une masse m à son extrémité) oscillant dans le champ de pesanteur local ; on étudie de petites oscillations du pendule et le compteur enregistre le nombre de passages du fil par la position verticale.
1) Le pendule est au sol. Exprimer N pour une durée totale Δt en fonction des données.
2) Le pendule est embarqué dans une grande roue de fête foraine qui tourne à vitesse constante Ω autour de son axe horizontal. La nacelle qui porte le pendule est articulée de sorte que son plancher reste horizontal ; le point d'attache du pendule parcourt ainsi un cercle de rayon R.



Comparer les indications N_0 et N de deux pendules identiques, respectivement fixe au sol et embarqué dans la grande roue, après un tour de celle-ci. Le calcul de N pourra être exprimé sous forme d'une intégrale qu'on déterminera au moyen d'un logiciel de calcul formel.
On prendra $g = 9{,}8\ m.s^{-2}$, $l = 0{,}10\ m$, $R = 10\ m$, $\Omega = 0{,}1\ rad.s^{-1}$.
3. Application numérique : Calculer $\dfrac{N - N_0}{N_0}$.
À quelle(s) condition(s) un tel écart relatif pourra-t-il être mis en évidence ? On discutera, quantitativement et au besoin au moyen du logiciel de calcul, de l'influence de divers paramètres, notamment la précision sur la mesure de la longueur l, l'amplitude des oscillations du pendule, etc.

Exercice B : Un puis deux demi-cyclindres

On étudie d'abord un solide (D) en forme de demi-cylindre homogène, de masse m, de rayon R et d'épaisseur négligée (cf. ci-dessous à gauche). On associe ensuite deux demi-cylindres de même rayon et de masses respectives M et 2M pour former un cylindre rigide (C), de rayon R, d'axe horizontal (Cx), posé sur le plan horizontal (Oxy) sur lequel il peut rouler sans glissement sous l'action du champ de pesanteur d'intensité g (cf. ci-dessous à droite).



1. Quelle signification physique peut-on associer aux calculs menés dans la feuille de calcul Maple jointe ? En particulier, comment interprétez-vous les grandeurs a et J qui y sont calculées ?
On n'hésitera pas à poursuivre l'étude en s'appuyant sur la même feuille de calcul !
2. On abandonne sans vitesse initiale le solide (C) à partir de la position représentée sur le schéma ci-dessus. Décrire le mouvement.
En particulier, étudier la condition d'absence de glissement (au moins au début du mouvement) ; déterminer dans ce cas une durée caractéristique de l'évolution du système et l'allure de son portrait de phase.

```
> restart; gc( );
```

Un puis deux demi-cylindres

> $y := \theta \rightarrow R\cdot\cos(\theta)$; $z := \theta \rightarrow R\cdot\sin(\theta)$;

> $MomI := Y \rightarrow \frac{m}{\pi}\cdot int\left(\left((y(\theta) - Y)^2 + (z(\theta))^2\right), \theta = -\frac{\pi}{2} .. \frac{\pi}{2}\right)$;

> $EQ := diff(MomI(Y), Y) = 0$;

> $a := solve(EQ, Y)$;

> $J := MomI(a)$;

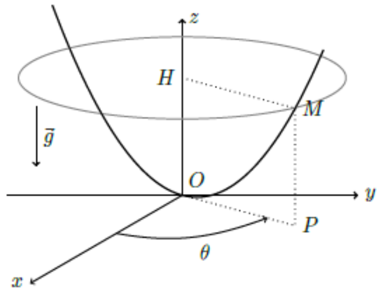
Autre calcul de la grandeur a

> $\frac{1}{\pi}\cdot int\left(y(\theta), \theta = -\frac{\pi}{2} .. \frac{\pi}{2}\right)$;

>

Exercice C : Mouvement d'un point matériel

On étudie le mouvement d'un point matériel M, de masse m, sous l'action du champ de pesanteur $\vec{g}$, à l'intérieur d'une cavité dans le référentiel terrestre galiléen. La surface de cette cavité est un paraboloïde de révolution, d'axe vertical ascendant (O,z) dont l'équation en coordonnées cylindriques est $r^2 = az$. Le point M glisse sans frottement sur cette surface. On repère M à l'aide des coordonnées cylindriques (r,θ,z) et $\overrightarrow{OP} = r\overrightarrow{u_r}$.



1) Exprimer le moment cinétique du point M en projection sur l'axe (O,z) ; démontrer que celui-ci se conserve au cours du mouvement et reste égal à une constante notée L_0.
2) Exprimer, en fonction des coordonnées et de leurs dérivées, l'énergie mécanique E_m de M dans le champ de pesanteur. Quelle propriété possède-t-elle ?
3) Déduire de ce qui précède une équation du premier ordre en r(t), de la forme :

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2G(r)+E_{p,ef}(r)=E_m$$

où G(r) est positif et sans dimension et $E_{p,ef}(r)$ est une énergie potentielle effective. Expliciter G(r) et $E_{p,ef}(r)$.
4) Le fichier Maple joint trace en bleu le graphe $E_{p,ef}(r)$. Discuter la nature du mouvement de M selon les conditions initiales. Montrer que la trajectoire de M dans la cavité est nécessairement tracée sur une région limitée par deux cercles définis à l'aide des constantes du mouvement et des données du problème.
5) On se place maintenant dans le cas où on communique initialement au point M une énergie mécanique égale à la valeur minimale de $E_{p,ef}(r)$ notée $E_{p,ef}$ min.

a) Donner, dans le cadre du modèle étudié, toutes les caractéristiques du mouvement du point.

b) On admet que, si les frottements sont suffisamment faibles, les résultats précédents (type de trajectoire, etc.) se conservent sur des durées brèves devant un temps caractéristique _ (que l'on ne calculera pas), cependant L_0 et E_m varient lentement. Le fichier Maple présente une animation de l'évolution de $E_{p,ef}(r)$ et E_m au cours du temps. Lancer l'animation et commenter.

Mouvement d'un point matériel

Question 4.

```
> restart;
 f1:=r->m*g*r^2/a; f2:=r->L^2/2/m/r^2;
m:=.1;g:=9.81;a:=1;L:=2;
> with(plots):
```

Représentations graphiques: la fonction(1) en vert, la fonction (2) en rouge, leur somme en bleu:

```
> CB1:=plot({f1(r),f2(r)}, r=0..6,0..30, color=[green,red],
  thickness=3):
> CB2:=plot({f1(r)+f2(r)}, r=0..6,0..30, color=[blue],thickness=3):

> display([CB1,CB2]);
```

Question 5. Modélisation simple d'un faible frottement

```
> h:=(r,t)->m*g*r^2/a+exp(-t)*L^2/2/m/r^2:w:=diff(h(r,t),r):sol:=
  solve(w,r):r0:=unapply(sol[1],t):
> ani1:=animate(h(r0(t),t),r=0..6, t=0..2,frames=50,view=[0..6,0.
  .30],numpoints=200,color=red,thickness=2):
> ani2:=animate(h(r,t),r=0..6, t=0..2,frames=50,view=[0..6,0..30],
  numpoints=200,color=red,thickness=2):
> display(ani1,ani2);
```