Cours IV : Electrocinétique

1 Système linéaire en régime permanent sinusoïdal

1.1 Filtre linéaire

1.1.1 Principe

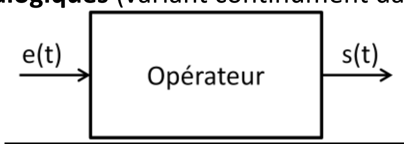
Un des problèmes fondamentaux posés à l'électronicien est d'extraire la partie utile d'un signal issu d'un capteur, ou reçu d'un interlocuteur, en réduisant le plus possible la partie parasite.

Exemple :
- En télécommunication : sélectionner après une antenne de réception, le signal utile des bruits générés par l'environnement.
- En chimie : sélectionner l'information contenant la valeur du pH en sortie d'un capteur tel que l'électrode de verre.

Définition :
Un filtre est un opérateur qui permet de sélectionner des signaux utiles, sur un critère fréquentiel.

1.1.2 Représentation

Définition :
Le filtre est composé d'un circuit électrique **linéaire** recevant un signal d'entrée e(t) et délivrant un signal de sortie s(t) tous deux **analogiques** (variant continûment dans le temps).



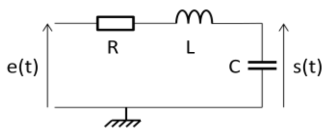
Son équation entrée-sortie est une **équation différentielle linéaire à coefficients constants**.

Propriété :
L'**ordre du filtre** est l'ordre de dérivation de plus haut degré de s(t).
La linéarité autorise un raisonnement par **superposition** : soit le signal s(t) associé à un signal e(t),
la réponse associée à l'entrée e'(t) = λe(t) sera s'(t) = λs(t),
la réponse associée à l'entrée e(t) = e_1(t) + e_2(t) sera s(t) = s_1(t) + s_2(t).

Remarque :

Filtre d'ordre 1 : $\tau \dfrac{ds}{dt} + s(t) = e(t)$ Filtre d'ordre 2 : $\dfrac{d^2s}{dt^2} + 2\sigma\omega_0 \dfrac{ds}{dt} + \omega_0^2 s(t) = \omega_0^2 e(t)$

Exemple : Circuit RLC



Les tensions s(t) et e(t) sont reliées par l'équation différentielle linéaire à coefficients constants :

$$LC\frac{d^2s(t)}{dt^2} + RC\frac{ds(t)}{dt} + s(t) = e(t) \quad \Rightarrow \quad \omega_0^2 = LC \quad \sigma = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}$$

1.2 Régime harmonique

1.2.1 Régime sinusoïdal permanent

A l'entrée du système, on applique un signal sinusoïdal de pulsation ω : $e(t) = E_m \cos(\omega t)$

L'étude de la réponse temporelle s'effectue en deux temps :

- lors du régime transitoire, superposition d'une solution homogène et particulière
- après amortissement du régime transitoire, régime sinusoïdal forcé = solution particulière

Lorsque le régime transitoire est totalement amorti, on parle de **régime harmonique**.

Propriété :
Dans le cas d'un signal d'excitation fonction sinusoïdal du temps $e(t) = E_m \cos(\omega t)$, le signal de sortie est également sinusoïdal, de **même pulsation** $s(t) = S_m \cos(\omega t + \varphi)$

1.2.2 Fonction de transfert

On peut alors passer en notation complexe avec :

$$\underline{e}(t) = E_m e^{j\omega t} = \underline{E} e^{j\omega t} \quad avec \quad \underline{E} = E_m \quad et \quad \underline{s}(t) = S_m e^{j(\omega t + \varphi)} = \underline{S} e^{j\omega t} \quad avec \quad \underline{S} = S_m e^{j\varphi}$$

Définition :
La **fonction de transfert** du filtre $\underline{H}(j\omega)$ se définit par :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{S}}{\underline{E}} \tag{1}$$

Le **module** de la fonction de transfert est donc le rapport des amplitudes :

$$\left|\underline{H}\right| = \frac{S_m}{E_m} \tag{2}$$

L'**argument** est égal au déphasage entre les signaux d'entrée et sortie :

$$Arg(\underline{H}) = \varphi \tag{3}$$

Exemple : Circuit RLC

$$LC\frac{d^2 s(t)}{dt^2} + RC\frac{ds(t)}{dt} + s(t) = e(t) \quad \Rightarrow \quad \left(-LC\omega^2 + jRC\omega + 1\right)\underline{s} = \underline{e}$$

Donc la fonction de transfert du filtre s'écrit : $\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{1}{1 + jRC\omega - LC\omega^2}$

Le module de la fonction de transfert du filtre s'écrit : $\left|\underline{H}(j\omega)\right| = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - LC\omega^2\right)^2 + \left(RC\omega\right)^2}}$

L'argument de la fonction de transfert du filtre s'écrit :

$$Arg\left(\underline{H}(j\omega)\right) = Arg\left(\frac{1}{1 + jRC\omega - LC\omega^2} \times \frac{-j}{-j}\right) = -\frac{\pi}{2} - Arg\left(RC\omega - j\left(1 - LC\omega^2\right)\right)$$

$$= -\frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\left(\frac{-1 + LC\omega^2}{RC\omega}\right)$$

Remarque :
L'ordre d'un filtre correspond au degré du dénominateur de la fonction de transfert.

Exercice : 1.7.1

1.2.3 Représentation de la fonction de transfert

Lorsque la pulsation des signaux varie, on décrit le comportement du filtre en examinant les variations du module et de l'argument de la fonction de transfert avec la pulsation.
Or, les signaux couramment traités en électronique ont des fréquences variant dans de très grandes proportions. Une **décade** correspond à un intervalle [f, 10f]. Pour accorder à chaque décade une importance comparable, on fera varier la pulsation selon une échelle logarithmique.

Exemple : Signal musical
L'intervalle des fréquences est [20 Hz, 20kHz] : soit une variation d'un rapport 1000 = 3 décades.

Lorsque la pulsation varie dans de très grandes proportions, le module de la fonction de transfert varie aussi souvent de plusieurs ordres de grandeur. On doit donc également recourir à une échelle logarithmique pour le module de la fonction de transfert.

Définition :
On appelle **diagramme de Bode** la représentation :
- d'une part de l'évolution du gain en décibels en fonction du logarithme de la pulsation
- d'autre part de l'argument de la fonction de transfert en fonction du logarithme de la pulsation.

Dans une représentation logarithmique, on définit le **gain en décibels** par :

$$G_{dB} = 20\log_{10}\left|\underline{H}\right| \quad (4)$$

Exemple : Circuit RLC
Le gain en dB de la fonction de transfert du filtre s'écrit :

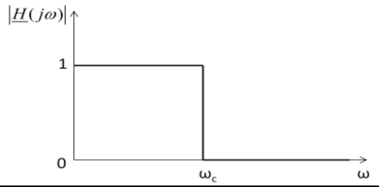
$$G_{dB} = 20\log_{10}\left|\underline{H}(j\omega)\right| = 20\log_{10}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\left((RC)^2-2LC\right)\omega^2+(LC)^2\omega^4}}\right)$$

$$= -20\log_{10}\left(\sqrt{1+\left((RC)^2-2LC\right)\omega^2+(LC)^2\omega^4}\right) = -10\log_{10}\left(1+\left((RC)^2-2LC\right)\omega^2+(LC)^2\omega^4\right)$$

1.3 Filtre passe-bas

1.3.1 Filtre idéal

Définition :
Un filtre passe-bas a le module de sa fonction de transfert égal à 1 pour une pulsation inférieure à la pulsation de coupure, ω_c, et égal à 0 au-delà. Le signal de sortie aura une amplitude égal au signal d'entrée si $\omega < \omega_c$, elle sera nulle si $\omega > \omega_c$.



1.3.2 Filtre du premier ordre

Propriété :
Un filtre passe-bas du premier ordre est défini par la fonction de transfert :

$$\underline{H} = \frac{H_0}{1 + j\omega\tau} \qquad (5)$$

Avec : H_0 = Gain statique du filtre

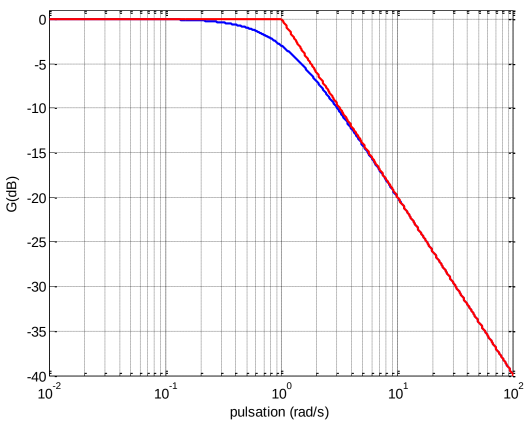
Etude du filtre :
Son module, argument et gain en dB s'écrivent :

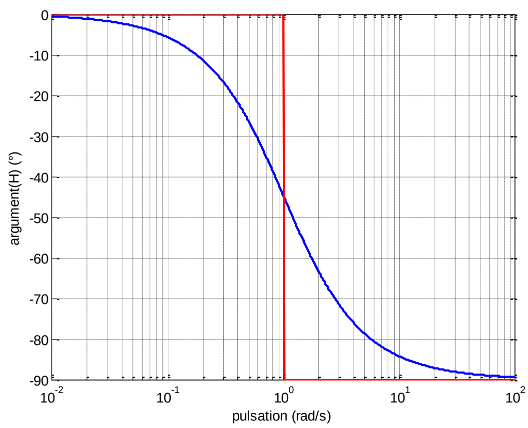
$\lvert\underline{H}\rvert = \dfrac{H_0}{\sqrt{1+(\omega\tau)^2}}$	$G_{dB} = 20\log_{10}(H_0) - 10\log_{10}\left(1+(\omega\tau)^2\right)$	$Arg(\underline{H}) = -\tan^{-1}(\omega\tau)$

Pour tracer son diagramme de Bode, il faut d'abord étudier le comportement asymptotique :

	ω → 0	$\omega_c = 1/\tau$	ω → ∞
$\lvert\underline{H}\rvert$	H_0	$\dfrac{H_0}{\sqrt{2}}$	$\dfrac{H_0}{\omega\tau}$
G_{dB}	$20\log_{10}(H_0)$	$20\log_{10}(H_0) - 3$	$20\log_{10}(H_0) - 20\log_{10}(\omega\tau)$
$Arg(\underline{H})$	0	$-\dfrac{\pi}{4}$	$-\dfrac{\pi}{2}$

Lorsque ω tend vers l'infini, le gain en décibel décroit donc de 20dB/décade.
On peut tracer le comportement de ce filtre en fonction de la pulsation pour $H_0 = 1$ et τ = 1.



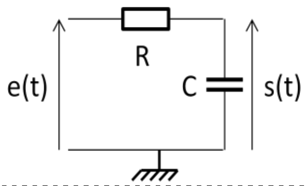


Remarque :
La pulsation $\omega_c = 1/\tau$, appelée **pulsation de coupure**, marque la transition entre deux domaines :

- l'intervalle $[0,\omega_c]$: appelé **bande passante à -3 dB** où le gain varie peu (de H_0 à H_0-3 dB)
- l'intervalle $[\omega_c,+\infty[$: appelé **bande atténuée** où le gain décroît à raison de 20 dB par décade

Exemple : Circuit RC

$$\underline{H} = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{R + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{1}{1 + jRC\omega} \quad avec \quad H_0 = 1 \quad et \quad \tau = RC$$



1.3.3 Filtre du second ordre

Propriété :

Un filtre passe-bas du second ordre est défini par la fonction de transfert :

$$\underline{H} = \frac{H_0}{1 + 2j\sigma\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \qquad (6)$$

Avec : ω_0 = Pulsation propre en rad.s^{-1}

σ = Coefficient d'amortissement

Etude du filtre :

Son module, argument et gain en dB s'écrivent :

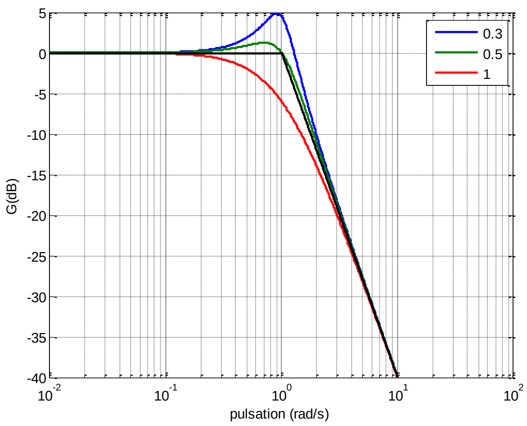
$\lvert\underline{H}\rvert = \dfrac{H_0}{\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(2\sigma\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$	$G_{dB} = 20\log_{10}(H_0) - 10\log_{10}\left(\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(2\sigma\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)$
$Arg(\underline{H}) = -\dfrac{\pi}{2} - \tan^{-1}\left(\dfrac{-1+\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}{2\sigma\frac{\omega}{\omega_0}}\right)$	

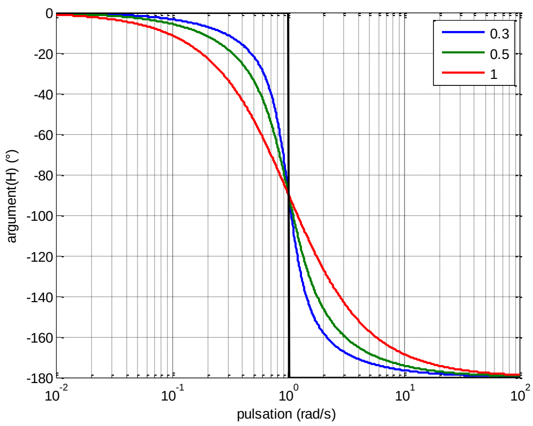
Comportement asymptotique :

	ω → 0	ω = ω_0	ω → ∞
$\lvert\underline{H}\rvert$	H_0	$\dfrac{H_0}{2\sigma}$	$-H_0\dfrac{\omega_0^2}{\omega^2}$
G_{dB}	$20\log_{10}(H_0)$	$20\log_{10}(H_0) - 20\log_{10}(2\sigma)$	$20\log_{10}(H_0) - 40\log_{10}\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)$
$Arg(\underline{H})$	0	$-\dfrac{\pi}{2}$	$-\pi$

Lorsque ω tend vers l'infini, le gain en décibel décroit donc de 40dB/décade.

On peut tracer le comportement de ce filtre en fonction de la pulsation pour $H_0 = 1$, $\omega_0 = 1$ et $\sigma \leq 1$.





Remarque :
L'intérêt d'utiliser un filtre d'ordre 2 est d'obtenir une pente pour $\omega >> \omega_0$ plus importante et ainsi mieux atténuer les signaux aux fréquences indésirables.
On peut distinguer deux cas :

- lorsque $\sigma \geq 1$, le dénominateur peut se factoriser et la fonction de transfert s'écrit :

$$\underline{H} = \frac{H_0}{(1+j\tau_1\omega)(1+j\tau_2\omega)}$$

L'étude se ramène à la combinaison de deux filtres passe-bas du premier ordre associés en cascade.

- lorsque $\sigma \leq 1$, le dénominateur n'est pas factorisable.

Le tracé présente une résonance pour des valeurs de $\sigma < 1/\sqrt{2}$

Le maximum d'amplitude apparaît pour la pulsation de résonance ω_r définie par :

$$pour\ \omega_r = \omega_0\sqrt{1-2\sigma^2} \quad \left|\underline{H}(j\omega_r)\right| = \frac{H_0}{2\sigma\sqrt{1-\sigma^2}}$$

La **bande passante à -3 dB** est alors définie comme l'intervalle de fréquences [f_m, f_M] dans laquelle le gain ne diffère pas de plus de 3 dB de sa valeur maximale.

Exemple : Circuit RLC

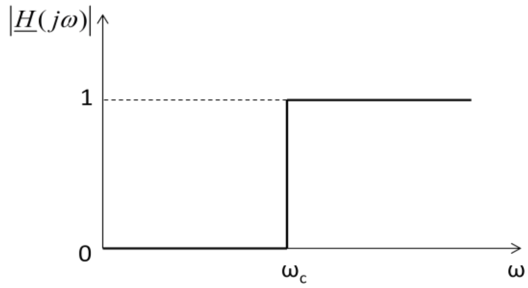
$$\underline{H} = \frac{1}{1+jRC\omega - LC\omega^2} \quad avec \quad H_0 = 1 \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \sigma = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}$$

Exercice : 1.7.2, 1.7.3

1.4 Filtre passe-haut

1.4.1 Filtre idéal

Définition :
Un filtre passe-haut a le module de sa fonction de transfert égal à 1 pour une pulsation supérieure à la pulsation de coupure, ω_c, et égal à 0 en-dessous. Le signal de sortie aura une amplitude égal au signal d'entrée si $\omega > \omega_c$, elle sera nulle si $\omega < \omega_c$.



Exemple : Transmission par impulsions lumineuses
Le capteur optoélectronique qui reçoit la lumière et délivre un signal électrique est sensible à la lumière ambiante. Il faut donc la filtrer tout en gardant la composante variable du signal. Le filtre passe-haut permettra d'éliminer la valeur moyenne du signal.

1.4.2 Filtre du premier ordre

Propriété :
Un filtre passe-haut du premier ordre est défini par la fonction de transfert :

$$\underline{H} = H_0 \frac{j\omega\tau}{1 + j\omega\tau} \qquad (7)$$

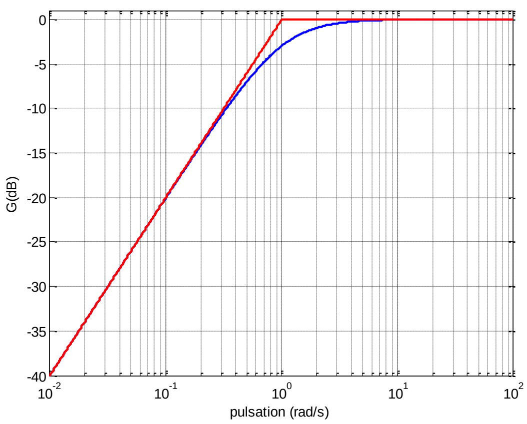
Etude du filtre :
Son module, argument et gain en dB s'écrivent :

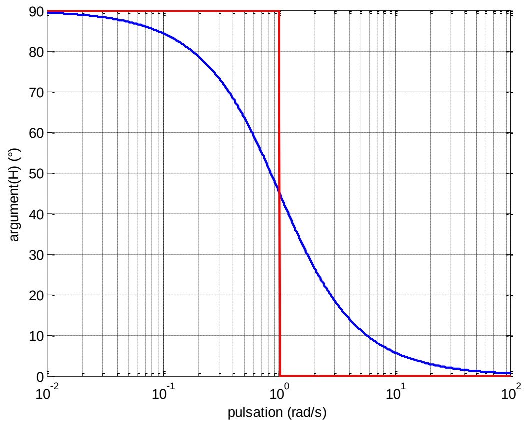
$\left\|\underline{H}\right\| = H_0 \frac{\omega\tau}{\sqrt{1+(\omega\tau)^2}}$	$G_{dB} = 20\log_{10}(H_0) + 20\log_{10}(\omega\tau) - 10\log_{10}\left(1+(\omega\tau)^2\right)$
$Arg(\underline{H}) = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}(\omega\tau)$	

Comportement asymptotique :

	ω → 0	$\omega_c = 1/\tau$	ω → ∞
$\left\|\underline{H}\right\|$	0	$\frac{H_0}{\sqrt{2}}$	$H_0\omega\tau$
G_{dB}	$20\log_{10}(H_0) + 20\log_{10}(\omega\tau)$	$20\log_{10}(H_0) - 3$	$20\log_{10}(H_0)$
$Arg(\underline{H})$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	0

Lorsque ω tend vers zéro, le gain en décibel croit donc de 20dB/décade.
On peut tracer le comportement de ce filtre en fonction de la pulsation pour $H_0 = 1$ et $\tau = 1$.



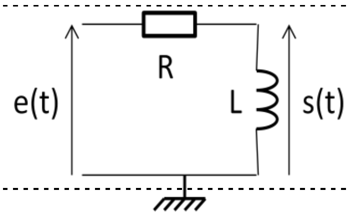


Remarque :
La **pulsation de coupure** $\omega_c = 1/\tau$ marque la transition entre deux domaines :

- l'intervalle $[0,\omega_c]$: appelé **bande atténuée** où le gain croit à raison de 20 dB par décade
- l'intervalle $[\omega_c,+\infty[$: appelé **bande passante à -3 dB**

Exemple : Circuit RL

$$\underline{H} = \frac{jL\omega}{R + jL\omega} = \frac{j\tau\omega}{1 + j\tau\omega} \quad avec \quad H_0 = 1 \quad et \quad \tau = \frac{L}{R}$$



1.4.3 Filtre du second ordre

Propriété :

Un filtre passe-haut du second ordre est défini par la fonction de transfert :

$$\underline{H} = H_0 \frac{-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}{1 + 2j\sigma\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \tag{8}$$

Etude du filtre :

Son module, argument et gain en dB s'écrivent :

$$|\underline{H}| = H_0 \frac{\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}{\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(2\sigma\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

$$Arg(\underline{H}) = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\left(\frac{-1+\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}{2\sigma\frac{\omega}{\omega_0}}\right)$$

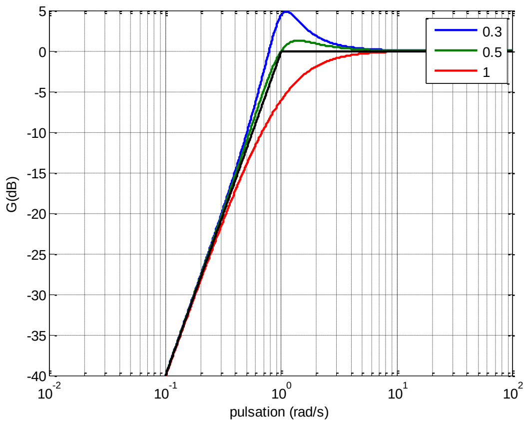
$$G_{dB} = 20\log_{10}(H_0) + 40\log_{10}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) - 10\log_{10}\left(\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(2\sigma\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)$$

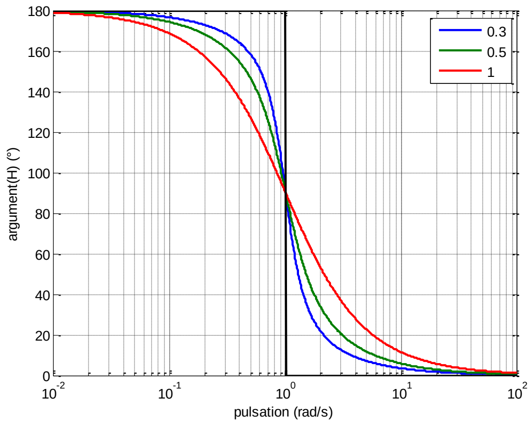
Comportement asymptotique :

	ω → 0	ω = ω_0	ω → ∞
$\lvert\underline{H}\rvert$	$H_0\frac{\omega^2}{\omega_0^2}$	$\frac{H_0}{2\sigma}$	H_0
G_{dB}	$20\log_{10}(H_0)+40\log_{10}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$	$20\log_{10}(H_0)-20\log_{10}(2\sigma)$	$20\log_{10}(H_0)$
$Arg(\underline{H})$	π	$\frac{\pi}{2}$	0

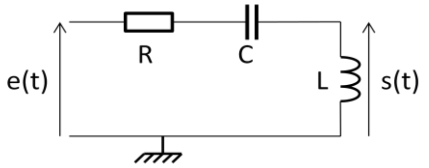
Lorsque ω tend vers zéro, le gain en décibel croit donc de 40dB/décade.

On peut tracer le comportement de ce filtre en fonction de la pulsation pour H_0 = 1, ω_0 = 1 et σ ≤ 1.





Exemple : Circuit RLC



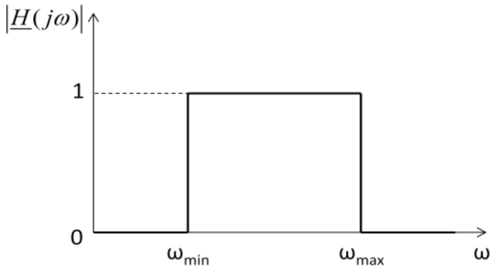
$$\underline{H} = \frac{-LC\omega^2}{1 + jRC\omega - LC\omega^2} \quad avec \quad H_0 = 1 \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \sigma = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}$$

1.5 Filtre passe-bande

1.5.1 Filtre idéal

Définition :

Un filtre passe-bande a le module de sa fonction de transfert égal à 1 pour une pulsation dans un intervalle de pulsation donné [ω_{min}, ω_{max}] et égal à 0 en-dehors. Le signal de sortie aura une amplitude égal au signal d'entrée si $\omega_{min} < \omega < \omega_{max}$, elle sera nulle ailleurs.



Exemple : Transmission par voie hertzienne

L'information de chaque station radio n'est autorisée à émettre que sur un intervalle de fréquences donné appelé canal de transmission. Le récepteur doit alors utiliser un filtre passe-bande pour sélectionner le canal utile.

1.5.2 Filtre du second ordre

Propriété :

Un filtre passe-bande du second ordre est défini par la fonction de transfert :

$$\underline{H} = H_0 \frac{2j\sigma\frac{\omega}{\omega_0}}{1 + 2j\sigma\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \tag{9}$$

Etude du filtre :

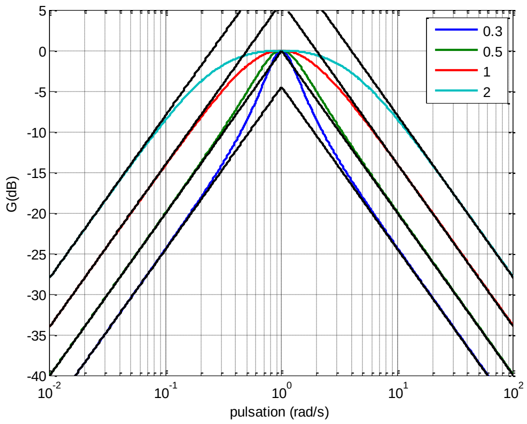
Son module, argument et gain en dB s'écrivent :

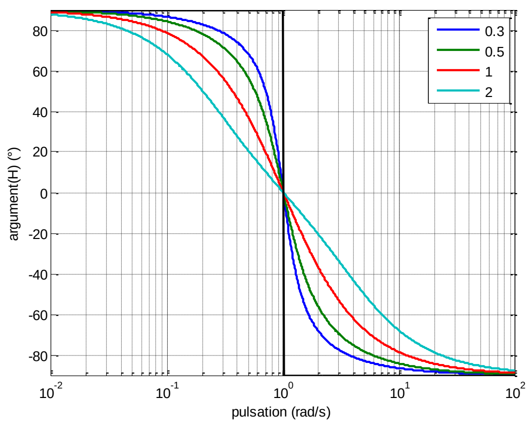
$\lvert\underline{H}\rvert = H_0 \frac{2\sigma\frac{\omega}{\omega_0}}{\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(2\sigma\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$	$Arg\left(\underline{H}\right) = -\tan^{-1}\left(\frac{-1+\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}{2\sigma\frac{\omega}{\omega_0}}\right)$
$G_{dB} = 20\log_{10}\left(H_0\right) + 20\log_{10}\left(2\sigma\frac{\omega}{\omega_0}\right) - 10\log_{10}\left(\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(2\sigma\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)$	

Comportement asymptotique :

	ω → 0	ω = ω_0	ω → ∞
$\lvert \underline{H} \rvert$	$2\sigma H_0 \dfrac{\omega}{\omega_0}$	H_0	$2\sigma H_0 \dfrac{\omega_0}{\omega}$
G_{dB}	$20\log_{10}\left(2H_0\sigma\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)$	$20\log_{10}(H_0)$	$20\log_{10}(H_0)-20\log_{10}\left(2\sigma\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)$
$Arg(\underline{H})$	$\dfrac{\pi}{2}$	0	$-\dfrac{\pi}{2}$

Le gain en décibel croit de 20dB/décade quand ω → 0 et décroit de 20dB/décade quand ω → ∞.
On peut tracer le comportement de ce filtre en fonction de la pulsation pour H_0 = 1, ω_0 = 1 et σ = [0,3 à 2].





<u>Remarque</u> :
On peut distinguer deux cas :

- lorsque σ ≥ 1, le dénominateur peut se factoriser et la fonction de transfert s'écrit :

$$\underline{H} = H_0 \frac{2j\sigma\dfrac{\omega}{\omega_0}}{\left(1+j\dfrac{\omega}{\omega_1}\right)\left(1+j\dfrac{\omega}{\omega_2}\right)}$$

L'étude se ramène alors à la combinaison de deux filtres du premier ordre associés en cascade : un filtre passe-bas et un filtre passe-haut.

- lorsque σ ≤ 1, le dénominateur n'est pas factorisable.

<u>Bande passante et facteur de qualité :</u>

<u>Définition :</u>
Un filtre passe-bande se caractérise par sa **bande passante à -3 dB**, intervalle de fréquences [f_m, f_M] dans laquelle le gain ne diffère pas de plus de 3 dB de sa valeur maximale.
Le coefficient caractérisant la sélectivité du filtre est nommé **facteur de qualité** tel que :

$$Q = \frac{f_0}{\lvert f_M - f_m \rvert} \tag{10}$$

> Propriété :
> Plus le facteur de qualité d'un filtre est élevé, plus la largeur relative de la bande passante est faible. Q mesure l'acuité de la résonance.

Démonstration :
On cherche les pulsations ω_m et ω_M pour lesquelles le module de la fonction de transfert vaut :

$$|\underline{H}| = \frac{H_0}{\sqrt{2}} \text{ ou encore } G_{dB} = 20\log_{10}(H_0) - 3$$

La première étape revient à simplifier l'expression de la fonction de transfert :

$$\underline{H} = H_0 \frac{2j\sigma\frac{\omega}{\omega_0}}{1 + 2j\sigma\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} = H_0 \frac{1}{1 + j\frac{1}{2\sigma}\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

Le module est donc égal $\frac{H_0}{\sqrt{2}}$ lorsque la relation suivante est vérifiée : $j\frac{1}{2\sigma}\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right) = \pm 1$

Ceci nous donne deux équations du second degré : $\omega^2 \pm 2\sigma\omega\omega_0 - \omega_0^2 = 0$

On obtient finalement les deux racines positives suivantes :

$$\omega_m = \omega_0\left(-\sigma + \sqrt{1+\sigma^2}\right) \quad et \quad \omega_m = \omega_0\left(+\sigma + \sqrt{1+\sigma^2}\right)$$

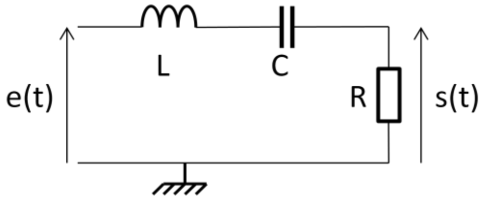
D'où, la largeur de la bande passante à -3 dB : $\omega_M - \omega_m = 2\sigma\omega_0 \quad et \quad donc \quad Q = \frac{1}{2\sigma}$

Remarque :
On peut donc exprimer toutes les fonctions de transfert de filtre du second ordre en fonction du facteur de qualité :

Filtre passe-bas : $\underline{H} = \frac{H_0}{1 + j\frac{\omega}{Q\omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$ Filtre passe-haut : $\underline{H} = H_0 \frac{-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}{1 + j\frac{\omega}{Q\omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$

Filtre passe-bande : $\underline{H} = H_0 \frac{j\frac{\omega}{Q\omega_0}}{1 + j\frac{\omega}{Q\omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$

Exemple : Circuit RLC



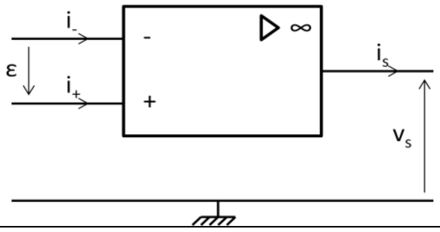
$$\underline{H} = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega - LC\omega^2} \quad avec \quad H_0 = 1 \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \sigma = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}} \quad Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

1.6 Caractère intégrateur ou dérivateur d'un filtre

1.6.1 Rappel : Amplificateur opérationnel idéal

Définition :
Un amplificateur opérationnel idéal est un composant théorique possédant trois bornes :
- l'entrée inverseuse notée (-)
- l'entrée non-inverseuse notée (+)

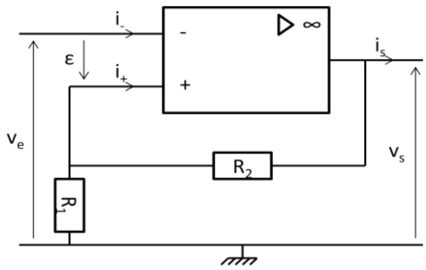
Aucun courant ne rentre par ces entrées : $i_+ = i_- = 0$
Un courant quelconque peut sortir (ou entrer) par la sortie (i_s).



Propriété :
Un amplificateur opérationnel peut fonctionner suivant deux régimes :
- un régime dit « linéaire » : $\varepsilon = 0$ ($v_+ = v_-$) dans la limite où v_s ne dépasse pas les valeurs fixées par la alimentation $V^-_{sat} < v_s < V^+_{sat}$
- un régime dit « non linéaire » :
  - si $\varepsilon > 0$, alors $v_s = V^+_{sat}$
  - si $\varepsilon < 0$, alors $v_s = V^-_{sat}$

Exemple : Montages de base à amplificateur opérationnel
- Amplificateur non inverseur :

On considère le montage suivant :

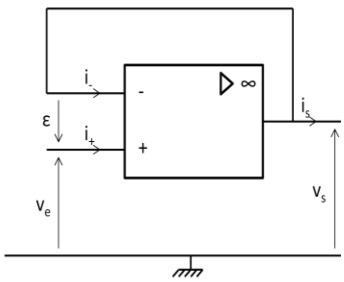


On se place en régime linéaire : $i_+ = i_- = 0$ et $\varepsilon = 0$

$$v_- = v_e \quad v_+ = \frac{R_1}{R_1 + R_2} v_s \quad d'où \quad v_s = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) v_e$$

- Montage suiveur :

On considère le montage suivant :



On se place en régime linéaire : $i_+ = i_- = 0$ et $\varepsilon = 0$

$$v_- = v_s \quad v_+ = v_e \quad d'où \quad v_s = v_e$$

1.6.2 Comportement intégrateur d'un filtre passe-bas du premier ordre

Définition :

Un **intégrateur pur** est un opérateur dont la relation entre signal d'entrée e(t) et signal de sortie s(t) est de la forme :

$$\tau \frac{ds(t)}{dt} = e(t) \qquad (11)$$

Ainsi, sa fonction de transfert $\underline{I}(j\omega)$ se met sous la forme :

$$\underline{I}(j\omega) = \frac{1}{j\tau\omega} \qquad (12)$$

Etude du filtre :

Son module, argument et gain en dB s'écrivent :

$\lvert\underline{I}\rvert = \frac{1}{\tau\omega}$	$G_{dB} = -20\log_{10}(\tau\omega)$	$Arg(\underline{I}) = -\frac{\pi}{2}$

Remarque :

Un tel filtre présente l'inconvénient de posséder un gain tendant vers l'infini lorsque la pulsation tend vers 0, ce qui peut entrainer une dérive indéfinie du signal d'entrée. Pour pallier à ce problème, on réaliser un intégrateur approché, qui présente un caractère intégrateur dans un domaine limité de fréquence comme le filtre passe-bas pour $\omega >> \omega_c$.

Etude d'un filtre passe-bas du premier ordre pour $\omega >> \omega_c$:

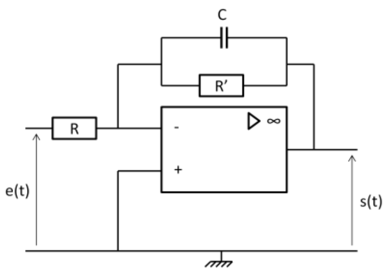
On a montré en 1.3.2 que l'on avait le comportement asymptotique suivant :

$\lvert\underline{H}\rvert = \frac{H_0}{\tau\omega}$	$G_{dB} = -20\log_{10}(\tau\omega)$	$Arg(\underline{H}) = -\frac{\pi}{2}$

Propriété :

Un filtre passe-bas du premier ordre se comporte comme un intégrateur dans un domaine de fréquence limité ($f >> f_c$).

Exemple : Filtre passe-bas actif



$$v_- - e(t) = -Ri(t) \quad v_+ = 0 \quad s(t) - v_- = -\left(\frac{1}{\frac{1}{R'} + jC\omega}\right) i(t) \quad \Rightarrow \quad \underline{H} = -\frac{R'}{R}\left(\frac{1}{1 + jR'C\omega}\right)$$

D'où $\omega >> \omega_P$: $$\underline{H} \approx -\frac{1}{jRC\omega}$$

1.6.3 Comportement dérivateur d'un filtre passe-haut du premier ordre

Définition :

Un dérivateur pur est un opérateur dont la relation entre signal d'entrée e(t) et signal de sortie s(t) est de la forme :

$$s(t) = \tau \frac{de(t)}{dt} \qquad (13)$$

Ainsi, sa fonction de transfert $\underline{D}(j\omega)$ se met sous la forme :

$$\underline{D}(j\omega) = j\tau\omega \qquad (14)$$

Etude du filtre :

Son module, argument et gain en dB s'écrivent :

$\lvert\underline{D}\rvert = \tau\omega$	$G_{dB} = 20\log_{10}(\tau\omega)$	$Arg(\underline{D}) = \frac{\pi}{2}$

Remarque :

Un tel filtre présente l'inconvénient de posséder un gain tendant vers l'infini lorsque la pulsation tend vers l'infini ce qui le rend très sensible aux signaux parasites de haute fréquence. Pour pallier à ce problème, on réaliser un dérivateur approché, qui présente un caractère dérivateur dans un domaine limité de fréquence comme le filtre passe-haut pour $\omega \ll \omega_c$.

Etude d'un filtre passe-haut du premier ordre pour $\omega \ll \omega_c$:

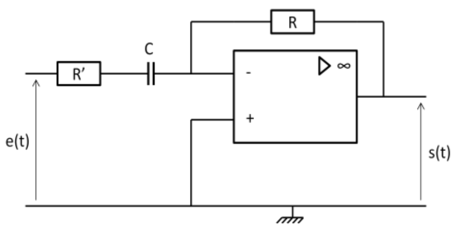
On a montré en 1.4.2 que l'on avait le comportement asymptotique suivant :

$\lvert\underline{H}\rvert = H_0\tau\omega$	$G_{dB} = 20\log_{10}(\tau\omega)$	$Arg(\underline{H}) = \frac{\pi}{2}$

Propriété :

Un filtre passe-haut du premier ordre se comporte comme un dérivateur dans un domaine de fréquence limité ($f \ll f_c$).

Exemple : Filtre passe-haut actif



$$v_- - e(t) = -(R' + \frac{1}{jC\omega})i(t) \quad v_+ = 0 \quad s(t) - v_- = -Ri(t) \quad \Rightarrow \quad \underline{H} = -\frac{jRC\omega}{1 + jR'C\omega}$$

D'où $\omega \ll \omega_P$: $\underline{H} \approx -jRC\omega$

A retenir et savoir faire :

- Savoir calculer une fonction de transfert (module, phase et gain en dB).
- Savoir déterminer la nature d'une fonction de transfert (passe-bas, haut, bande).
- Savoir tracer son diagramme de Bode.
- Savoir déterminer le caractère intégrateur ou dérivateur d'un filtre.