Cours VI : Electromagnétisme

1 Electrostatique

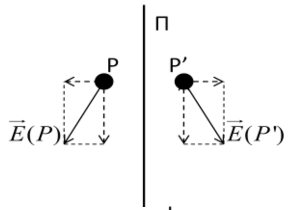
1.1 Formulation locale des lois de l'électrostatique

1.1.1 Symétries de la distribution de charges et du champ

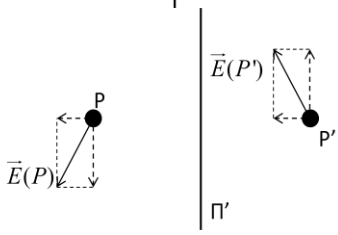
Le principe de Curie postule que « les effets ont au moins les symétries des causes ».

1.1.1.1 Plans de symétrie et d'antisymétrie

Si le plan Π est plan de symétrie de la distribution de charges, alors ce plan est également un plan de symétrie pour le champ :
- les composantes parallèles au plan sont égales
- les composantes orthogonales au plan sont opposées.



Si le plan Π' est plan d'antisymétrie de la distribution de charges, alors ce plan est également un plan d'antisymétrie pour le champ :
- les composantes parallèles au plan sont opposées
- les composantes orthogonales au plan sont égales.



1.1.1.2 Invariances

Si la distribution de charges est invariante : - par translation selon un axe, - par rotation autour d'un axe, - par rotation autour d'un point, les composantes du champ le sont aussi.	Elles ne dépendent donc : - pas de la coordonnée le long de cet axe, - pas de la coordonnée angulaire de rotation, - d'aucune coordonnée angulaire.

1.1.2 Champ et potentiel électrostatiques

En première année, le champ $\vec{E}$ et le potentiel V électrostatiques ont été définis pour une distribution donnée de charges par :

Distribution de charges	Champ électrostatique	Potentiel électrostatique
Unique charge ponctuelle	$\vec{E}(M)=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 PM^3}\overrightarrow{PM}$	$V(M)=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 PM}$
Ensemble de charges ponctuelles	$\vec{E}(M)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i\frac{Q_i}{P_iM^3}\overrightarrow{P_iM}$	$V(M)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i\frac{Q_i}{P_iM}$
Distribution volumique $dq=\rho(P)dv$	$\vec{E}(M)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_V\frac{\rho(P)\overrightarrow{PM}}{PM^3}dv$	$V(M)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_V\frac{\rho(P)}{PM}dv$
Distribution surfacique $dq=\sigma(P)ds$	$\vec{E}(M)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iint_S\frac{\sigma(P)\overrightarrow{PM}}{PM^3}ds$	$V(M)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iint_S\frac{\sigma(P)}{PM}ds$
Distribution linéique $dq=\lambda(P)dl$	$\vec{E}(M)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_L\frac{\lambda(P)\overrightarrow{PM}}{PM^3}dl$	$V(M)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_L\frac{\lambda(P)}{PM}dl$

Le potentiel électrostatique a été défini comme la circulation du champ électrostatique entre deux points A et B selon :

$$V(A)-V(B)=\int_A^B \vec{E}(M)\cdot\vec{dl} \qquad (1)$$

Pour une variation infinitésimale de potentiel, on a donc : $dV=-\vec{E}\cdot\vec{dl}$

Dans un système de coordonnées cartésiennes, on aurait la formulation suivante :

$$\begin{cases} E_x(x,y,z)=-\dfrac{\partial V}{\partial x}(x,y,z) \\ E_y(x,y,z)=-\dfrac{\partial V}{\partial y}(x,y,z) \\ E_z(x,y,z)=-\dfrac{\partial V}{\partial z}(x,y,z) \end{cases}$$

Or, le potentiel électrostatique est une fonction de plusieurs variables, V(x,y,z). On peut donc exprimer la différentielle de cette fonction comme : $dV=\dfrac{\partial V}{\partial x}dx+\dfrac{\partial V}{\partial y}dy+\dfrac{\partial V}{\partial z}dz$

On peut alors utiliser **l'opérateur gradient** (défini en annexe) pour mettre l'expression précédente sous la forme : $dV=\overrightarrow{grad}V\cdot\vec{dl}$

Et l'on a finalement la relation suivante entre champ et potentiel électrostatique (déjà vue en première année) :

$$\vec{E}=-\overrightarrow{grad}V \qquad (2)$$

Terminologie :

Les équations (1) et (2) sont respectivement appelées **équation intégrale** et **équation locale**. Seul l'usage permettra de privilégier une écriture par rapport à une autre.

Exercice : 1.5.1, 1.5.2

1.1.3 Equation de Maxwell-Gauss

Enoncé en première année, le théorème de Gauss permet d'exprimer le flux du champ électrostatique de la manière suivante :

Théorème de Gauss :

Le flux sortant du champ électrostatique au travers d'une surface fermée Σ est égal à la charge électrique totale Q_{int} contenue à l'intérieur de cette surface, divisée par la constante ε_0 :

$$\oiint_\Sigma \vec{E}(M)\cdot ds\vec{n}=\frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} \qquad (3)$$

Remarque :

La constante ε_0 est appelée permittivité du vide et est égale à $8{,}854.10^{-12}$ $F.m^{-1}$.

Cette écriture est de type intégral pour deux raisons :

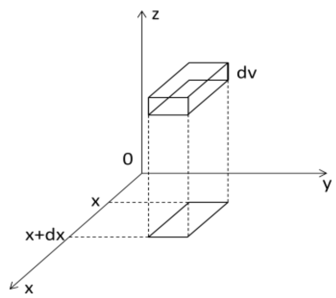
- le flux est une intégrale de surface
- la charge intérieure peut être vue comme une intégrale du volume telle que : $Q_{int}=\iiint_V \rho dv$

<u>Exercice</u> : 1.5.3

<u>Equation de Maxwell-Gauss</u> :
La formulation locale du théorème de Gauss se met sous la forme de l'équation de Maxwell-Gauss :

$$div\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad (4)$$

Démonstration :
Considérons un petit élément de volume en coordonnées cartésiennes :



L'expression du flux sortant de cet élément est :

$$d\phi = \left[E_x\left(x+dx,y,z\right)-E_x\left(x,y,z\right)\right]dydz + termes\ en\ E_y\ et\ E_z = \left(\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}\right)\underbrace{dxdydz}_{dv}$$

La charge élémentaire contenue dans cet élément de volume s'exprime à l'aide de la densité volumique de charge par : $dQ_{\text{int}} = \rho\left(x,y,z\right)dv$

Alors, en appliquant le théorème de Gauss au volume élémentaire, on aboutit à une formulation locale : $\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$

Pour simplifier cette expression, on introduit un nouvel opérateur, appelé divergence (défini en annexe), tel qu'en coordonnées cartésiennes : $div\vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}$

On retrouve bien l'équation de Maxwell-Gauss : $div\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$

<u>Remarque</u> :
En partant de la formulation intégrale du théorème de Gauss et en utilisant le théorème de Green-Ostrogradsky , on a alors : $\oiint_{\Sigma} \vec{E}\left(M\right)\cdot ds\vec{n} = \iiint_V div\vec{E}dv = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} = \iiint_V \frac{\rho}{\varepsilon_0}dv$

On retrouve la formulation de l'équation de Maxwell-Gauss : $div\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$

1.1.4 Equation de Poisson

<u>Equation de Poisson</u> :
L'équation locale reliant potentiel et densité volumique de charge, appelée équation de poisson, s'écrit :

$$\Delta V + \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0 \qquad (5)$$

Démonstration :

En partant des équations (2) et (4), on aboutit à : $div\vec{E} = div\left(-\overrightarrow{grad}V\right) = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$

On fait ainsi apparaître un autre opérateur, le Laplacien (défini en annexe) et noté comme suit en coordonnées cartésiennes : $\Delta v = div\left(\overrightarrow{grad}V\right) = \dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 V}{\partial z^2}$

On a ainsi : $-\Delta V = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$

<u>Exercice</u> : 1.6.1, 1.6.2

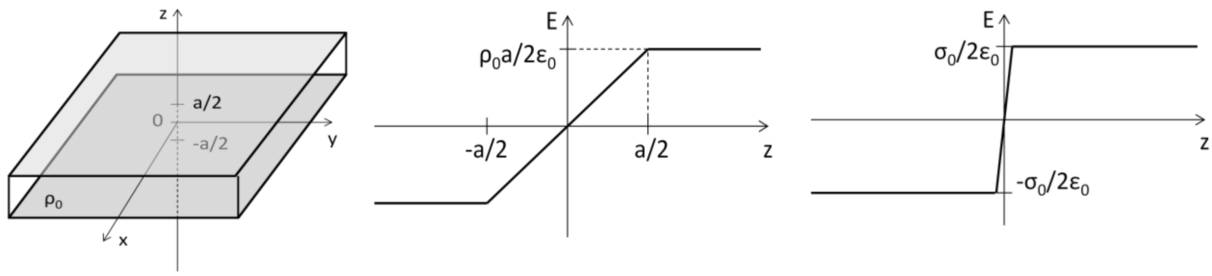
1.2 Relations de passage du champ électrique à l'interface entre deux milieux

1.2.1 Composante normale du champ électrique

La composante normale du champ électrique présente une discontinuité à la traversée d'une surface, lorsque celle-ci porte une densité surfacique de charge σ_0. Cette discontinuité est égale à σ_0/ε_0.

Démonstration sur un exemple :

Soit deux plans parallèles d'équations respectives z = a/2 et z = -a/2, entre lesquels se trouve une distribution volumique de charge uniforme de valeur ρ_0.



a) Symétries et invariances

- tout plan contenant l'axe (Mz) est plan de symétrie, donc $\vec{E}(M)$ est dirigé selon $\overrightarrow{u_z}$
- invariance par translation selon $\overrightarrow{u_x}$ et $\overrightarrow{u_y}$, donc $\vec{E}(M)$ ne dépend que de z
- Le plan xOy est plan de symétrie pour la distribution, donc la fonction E(z) est impaire et nulle dans le plan xOy.

On a finalement : $\vec{E}(M) = E(z)\overrightarrow{u_z}$

b) Equations locales

On utilise l'équation de Maxwell-Gauss dans chaque domaine :

- Entre les deux plans : $div\vec{E} = \dfrac{\partial E}{\partial z} = \dfrac{\rho_0}{\varepsilon_0} \quad donc \quad E(z) = \dfrac{\rho_0}{\varepsilon_0} z \quad pour \quad |z| \leq \dfrac{a}{2}$
- A l'extérieur des deux plans : $div\vec{E} = \dfrac{\partial E}{\partial z} = 0 \quad donc \quad E(z) = constante$

c) Passage à une densité surfacique

On imagine maintenant que l'épaisseur a précédente devient infiniment fine, tandis que la densité volumique de charge ρ_0 tend vers l'infini, on a alors : $\sigma_0 = a\rho_0$

On aboutit de ce fait à une distribution surfacique de charge, dont chaque élément de surface ds contient la même quantité de charge que la distribution initiale : $dQ = \sigma_0 ds$

L'évolution du champ électrique présente alors une discontinuité de : $\Delta E(z) = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}$

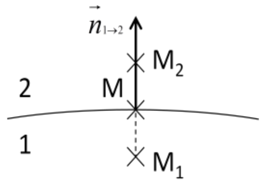
1.2.2 Composante tangentielle du champ électrique

La composante tangentielle du champ électrique reste continue à la traversée d'une surface, quel que soit l'état électrique de celle-ci.

1.2.3 Formulation vectorielle

Il est possible de réunir les deux résultats ci-dessus en une seule écriture vectorielle.

On considère une interface entre deux demi-espaces indicés 1 et 2 et l'on note $\vec{n}_{1\to 2}$ la normale en un point M de cette surface, orientée du milieu 1 vers le milieu 2. On définit deux points M_1 et M_2 dans chaque demi-espace au voisinage du point M.



Soit σ(M) la densité surfacique de charge au point M, la relation suivante résume la relation de passage du champ électrique à la traversée de la surface :

$$\vec{E}(M_2) - \vec{E}(M_1) = \frac{\sigma(M)}{\varepsilon_0}\vec{n}_{1\to 2} \qquad (6)$$

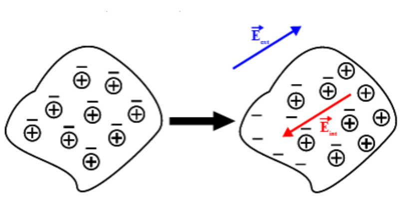
<u>Exercice</u> : 1.6.3

1.3 Conducteur en équilibre électrostatique

1.3.1 Equilibre électrostatique

<u>Définition</u> :
Un **conducteur** est un corps qui possède des particules chargées pouvant se déplacer librement et ainsi conduire le courant électrique :
- Les métaux sont conducteurs car ils possèdent des électrons libres
- Les électrolytes sont conducteurs car ils possèdent des ions.

On considère un corps conducteur placé à proximité d'une distribution de charges. Son état électrique va évoluer, sous l'effet du champ électrique crée par la distribution. Les charges vont se mouvoir dans le conducteur. Les charges cesseront leur déplacement lorsque le champ intérieur compensera exactement le champ extérieur et finalement le champ électrostatique total sera nul.



<u>Définition</u> :
A l'équilibre électrostatique, il n'y a plus de mouvement de charges dans le conducteur et de ce fait, le champ électrique est nul en tout point du conducteur : $\vec{j} = \vec{0} \quad et \quad \vec{E} = \vec{0}$

1.3.2 Caractère équipotentiel et répartition des charges

La nullité du champ électrique en tout point d'un conducteur a des conséquences immédiates :
- d'après (2), le potentiel électrostatique, V, est constant à l'intérieur du conducteur

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V = \vec{0}$$

- d'après (4), la densité volumique de charges, ρ, est nulle en tout point intérieur au conducteur

$$div\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0$$

Mais comme le conducteur a été préalablement chargé, les charges n'ont donc pu se répartir qu'à la surface du conducteur. On définit donc une densité surfacique de charge, σ. Le conducteur a alors pour charge totale : $Q = \iint_S \sigma ds$

<u>Propriété</u> :
Un corps conducteur à l'équilibre électrostatique est un **volume équipotentiel**. Il est électriquement neutre dans son volume, mais peut porter des **charges en surface**.

<u>Remarque</u> :
D'après (5), on peut simplifier l'équation de Poisson à l'intérieur du conducteur : $\Delta V = 0$
Cette équation prend alors le nom d'**équation de Laplace**.

<u>Définition</u> :
La **capacité**, C, d'un conducteur est la capacité qu'a le conducteur à accumuler des charges électriques sous un potentiel donné. Elle s'exprime par le rapport de la charge totale sur le potentiel du conducteur : $C = \frac{Q}{V}$

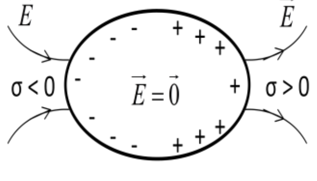
1.3.3 Théorème de Coulomb

En première année, il a été vu que les lignes de champs étaient orthogonales aux surfaces équipotentielles (très facile à démontrer à partir de l'équation (2)).
De plus, nous avons mis en évidence que la composante normale du champ électrique était discontinue à la traversée d'une surface portant une densité surfacique de charges (1.2.2). L'équation (6) nous mène à l'écriture du théorème de Coulomb où $\vec{n}$ est la normale au conducteur, dirigée vers l'extérieur du conducteur

<u>Théorème de Coulomb</u> :
L'expression du champ électrique au voisinage de la surface d'un conducteur est la suivante :

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n} \qquad (7)$$

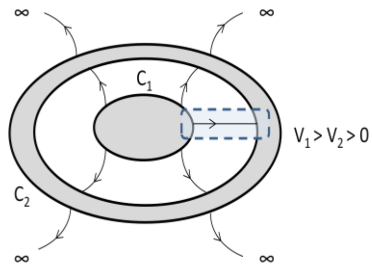
<u>Remarque</u> :
On peut en déduire suivant le signe de σ l'orientation des lignes de champ :
- si σ > 0, alors la ligne de champ quitte le conducteur
- si σ < 0, alors la ligne de champ aboutit sur le conducteur.



1.4 Condensateur

1.4.1 Définition

Lorsque l'on approche un conducteur chargé (positivement par exemple) d'un conducteur neutre, les charges positives du conducteur neutres sont repoussées alors que ses charges négatives sont attirées. La répartition des charges dans le conducteur neutre a été modifiée par influence (partielle).



On parle d'influence totale lorsqu'un des conducteurs entoure l'autre. On montre alors que les surfaces qui se font face portent des charges opposées.

Définition :
On appelle **condensateur** l'ensemble formé par :
- la face du conducteur 1 (armature intérieure)
- la face interne du conducteur 2 (armature externe)
- le domaine séparant des deux faces.

1.4.2 Capacité d'un condensateur

Prenons un tube de champ partant de la surface C_1 pour aller sur C_2. Sur la surface fermée Σ englobant ces lignes de champ (représenté en pointillés ci-dessus), on peut appliquer le théorème de Gauss sur Σ : $\oiint_\Sigma \vec{E}(M)\cdot ds\vec{n} = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} = 0$ Car : $\vec{E} \perp \vec{n}$ sur le tube et $\vec{E} = \vec{0}$ dans les conducteurs

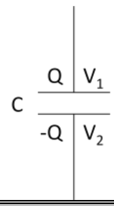
Or, la charge intérieure à Σ est nulle entre les deux armatures et égale à :

$dQ_1 = \sigma_1\, dS_1$ dans C_1 et $dQ_2 = \sigma_2\, dS_2$ dans C_2, soit au final : $dQ_1 = -\,dQ_2$.

Les charges électriques portées par les deux faces en regard sont donc opposées. Si l'on note Q la charge du conducteur 1, on appelle alors capacité du condensateur le coefficient C tel que :

$$Q = C(V_1 - V_2)$$

Définition :
Lorsque deux conducteurs forment un condensateur, la charge Q portée par l'armature intérieure est proportionnelle à la différence de potentiel entre les conducteurs.
Ce coefficient de proportionnalité est appelé **capacité du condensateur**, C :

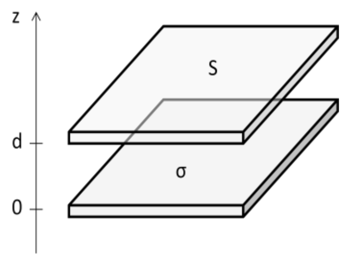


$$Q = C(V_1 - V_2) \tag{8}$$

Remarque :
Augmenter la valeur d'une capacité permet, pour une différence de potentiel donnée, d'accroître la valeur de la charge.

1.4.3 Condensateur plan idéal

Le modèle du condensateur plan s'applique dans le cas où la distance entre les armatures est très petite devant le rayon de courbure de celles-ci. Ce modèle comprend :
- deux faces planes parallèles de section S
- un espace vide les séparant de largeur d (distance entre les faces)
- des charges réparties surfaciquement uniformément sur ces faces, de valeur opposée.



Etude du condensateur :

En négligeant les effets de bord, on obtient des lignes de champ parallèles entre elles et dirigées perpendiculairement aux faces. Entre les deux faces, on a donc un champ uniforme (divergence nulle) : $\vec{E} = E_0 \vec{u}_z$

Par application du théorème de Coulomb, on peut relier la valeur du champ à la densité surfacique de charge : $E_0 = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$

La différence de potentiel peut ensuite être calculée par circulation sur un segment joignant perpendiculairement les deux faces : $V_1 - V_2 = E_0 d$

La valeur de la charge Q résulte de l'intégration sur la surface : $Q = \sigma S$

On en déduit l'expression de la capacité pour un condensateur plan déjà rencontrée en première année :

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2} = \varepsilon_0 \frac{S}{d} \tag{9}$$

Remarque :

Un condensateur dont les armatures ont une surface de l'ordre du cm² et sont écartées d'un dixième de millimètre atteignent dans l'air une capacité inférieure à la dizaine de picofarad.

Il faut donc accroître l'aire des surfaces en regard et diminuer l'épaisseur. Ceci dépendant de l'encombrement. Il faut aussi éviter le court-circuit. Il est possible de jouer sur la forme : enrouler deux conducteurs permet par exemple d'obtenir des surfaces beaucoup plus grandes dans un volume donné.

Il est aussi possible d'utiliser un matériau isolant de permittivité ε plus élevée que celle du vide ou de l'air. Ainsi, on a dans le cas du condensateur plan : C = εS/d.

1.4.4 Energie électrostatique

Propriété :

La présence d'un champ électrique en un point de l'espace est associée à celle d'une **densité volumique d'énergie** u_E ($J.m^{-3}$) stockée d'expression :

$$u_E = \frac{dU_E}{dv} = \frac{\varepsilon_0}{2} E_0^2 \tag{10}$$

Avec : E_0 = Champ électrique uniforme entre les armatures du condensateur en $V.m^{-1}$

Démonstration dans le cas d'un condensateur plan :

La notion d'énergie électrique a été introduite en première année en électrocinétique telle que dans un intervalle de temps [t_1, t_2], l'énergie électrique reçue par le composant s'exprime (en fonction de la tension à ses bornes, u et du courant le traversant, i) par : $U_E = \int_{t_1}^{t_2} ui dt$

Dans le cas d'un condensateur, on a de plus les relations suivantes (entre la tension, u, le courant, i, la charge du condensateur, q, et la capacité du condensateur) : $q = Cu \quad et \quad i = C\frac{du}{dt}$

On obtient donc au final l'énergie électrique emmagasinée dans le condensateur à une constante près : $U_E = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} + U_0$

En considérant naturellement qu'il n'y a pas d'énergie électrique lorsque le condensateur n'est pas chargé, on peut choisir $U_0 = 0$ et donc : $U_E = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} = \frac{1}{2}Cu^2$

Dans le cas du condensateur plan, on peut utiliser la valeur de la capacité trouvée en équation (9) :

$$U_E = \frac{\varepsilon_0}{2}\frac{S}{d}u^2$$

Enfin, la tension aux bornes du condensateur, u, est directement liée à la différence de potentiel entre ses deux armatures : $u = V_1 - V_2 = E_0 d \quad \Rightarrow \quad U_E = \frac{\varepsilon_0}{2} S d E_0^2$

On en déduit que dans le cas d'un condensateur plan, la densité volumique d'énergie est donnée par : $u_E = \frac{dU_E}{dv} = \frac{\varepsilon_0}{2} E_0^2$

On peut généraliser cette expression pour tout condensateur. On remarque alors que l'énergie est localisée là où règne le champ et que la densité volumique d'énergie ne dépend que de l'intensité du champ régnant en chaque point, à l'exclusion de tout paramètre géométrique sur le système.

Exercice : 1.6.4, 1.6.5

A retenir et savoir faire :

- Connaître les équations locales et intégrales pour le champ électrostatique.
- Connaître les relations de passage à une interface entre deux milieux.
- Savoir appliquer ces équations au cas d'un conducteur en équilibre électrostatique.
- Connaître l'expression de la capacité d'un condensateur plan et celle de la densité volumique d'énergie électrostatique.