Cours V : Mécanique du solide

1 Théorèmes de dynamique du solide

1.1 Cinématique des solides

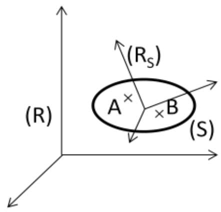
1.1.1 Le solide indéformable

1.1.1.1 Définition

<u>Définition</u> :
En mécanique, on appelle **solide** un corps indéformable : la distance entre deux points quelconques d'un solide reste constante au cours du temps.

Soit un solide (S) associé au référentiel (R_S), A et B deux points lui appartenant. Quelque soit le mouvement du solide dans un référentiel d'étude (R), tous les points du solide sont immobiles dans le référentiel (R_S).

$$\left(\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right)_{R_S} = \vec{0}$$



1.1.1.2 Masse d'un solide

Pour un système de points matériels de masses m_i, la masse totale, m, du système est : $m = \sum_i m_i$

<u>Définition</u> :
Pour un solide de masse volumique ρ, on parlera de répartition continue volumique. La **masse**, m, du solide s'exprime alors par :

$$m = \iiint_\tau dm = \iiint_\tau \rho d\tau \qquad (1)$$

1.1.1.3 Centre d'inertie (ou centre de masse)

Pour un système de points matériels M_i de masses m_i, le centre d'inertie (ou centre de masse ou barycentre), G, du système est défini comme : $\sum_i m_i \overrightarrow{GM_i} = \vec{0}$

<u>Définition</u> :
Pour un solide, le **centre de masse**, G, est défini par :

$$\iiint_\tau \overrightarrow{MG} dm = \vec{0} \qquad (2)$$

<u>Remarque</u> :
Cette définition est indépendante du repère choisi.
La désignation de G comme centre d'inertie est un abus de langage (ils sont souvent confondus).

Propriété :
Il est souvent commode de repérer la position de G par rapport à une origine O d'un repère, on peut transformer (2) en : $\iiint_\tau \left(\overrightarrow{GO}+\overrightarrow{OM}\right).dm = -m\overrightarrow{OG}+\iiint_\tau \overrightarrow{OM}.dm=\vec{0}$

$$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{m}\iiint_\tau \overrightarrow{OM}dm=\frac{1}{m}\iiint_\tau \rho(M)\overrightarrow{OM}d\tau \qquad (3)$$

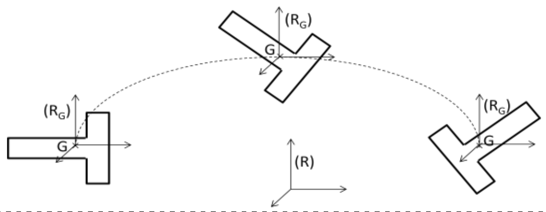
1.1.1.4 *Référentiel barycentrique*

Définition :
Le **référentiel barycentrique** (R_G) du solide (S) est le référentiel associé au centre d'inertie, G, du solide. Il est centré en G et animé par rapport au référentiel d'étude (R) d'un mouvement de translation.

Remarque :
Cette translation peut être quelconque (rectiligne, circulaire, curviligne, …).
Si le référentiel d'étude (R) est galiléen, (R_G) ne l'est pas forcément.
Le référentiel (R_G) a ses axes parallèles aux axes du référentiel d'étude (R).
Les dérivations dans (R) et dans (R_G) son identiques, en particulier : $\left(\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right)_{(R)}=\left(\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right)_{(R_G)}$

Le vecteur rotation de (R_G) par rapport à (R) est nul : $\vec{\Omega}_{(R_G/R)}=\vec{0}$

Exemple : Equerre lancée en l'air, avec un mouvement de rotation



1.1.2 Champ des vitesses d'un solide

1.1.2.1 *Relation de Varignon*

On se place dans le référentiel d'étude (R). Soit S un solide et (R_S) le référentiel lié au solide. On prend deux points A et B appartenant au solide. Alors $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur fixe dans le référentiel (R_S). D'après la loi de composition des vitesses dans des référentiels différents avec $\vec{\Omega}_{(R_s/R)}$, vecteur rotation du référentiel (R_s) par rapport à (R) :

$$\left(\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right)_{(R)}=\underbrace{\left(\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right)_{(R_s)}}_{=0}+\vec{\Omega}_{(R_s/R)}\wedge\overrightarrow{AB} \quad\Rightarrow\quad \vec{v}(B)_{(R)}=\vec{v}(A)_{(R)}+\vec{\Omega}_{(R_s/R)}\wedge\overrightarrow{AB}$$

$$\vec{v}(A)_{(R)}=\vec{v}(B)_{(R)}+\overrightarrow{AB}\wedge\vec{\Omega}_{(R_s/R)} \qquad (4)$$

Remarque :
Connaissant la vitesse d'un point du solide et le vecteur rotation, la vitesse des autres points du solide peut être déduite.

On distingue le solide du point matériel par ses degrés de liberté : la vitesse d'un point matériel ne dépend que de 3 degrés de liberté ; la vitesse d'un point d'un solide dépend de la vitesse d'un autre point du solide et du vecteur rotation, on a au total 6 degrés de liberté.

Moyen mnémotechnique : formule « BABAR »

On peut réécrire la relation de Varignon (avec $\vec{R}$ le vecteur rotation) sous la forme :

$$\vec{v}(B)_{(R)} = \vec{v}(A)_{(R)} + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{R}_{(R_s/R)}$$

1.1.2.2 Torseur cinématique

Rappel : Torseur

Un torseur est un outil mathématique composé de deux vecteurs :

- $\overrightarrow{M_A}$: moment du torseur au point A de coordonnées (L, M, N) dans (R)
- $\vec{R}$: résultante du torseur de coordonnées (X, Y, Z) dans (R)

Les moments aux points A et B sont reliés par la formule de Varignon : $\overrightarrow{M_B} = \overrightarrow{M_A} + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{R}$

Il se note : $\Gamma = \begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \overrightarrow{M_A} \end{Bmatrix}_{(R)} = \begin{Bmatrix} X & L \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}_{(A,R)}$

Définition :

Le **torseur cinématique** est défini par : $\Gamma_C = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega} \\ \vec{v}(A) \end{Bmatrix}_{(R)}$

Exercice : 1.4.1, 1.4.2

1.1.2.3 Mouvements possibles d'un solide

1.1.2.3.1 Translation

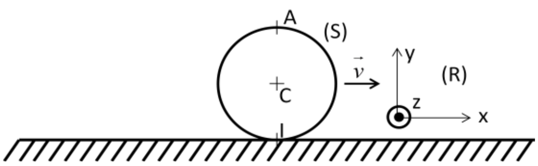
Un solide (S) est en translation par rapport à un référentiel (R) si tous les points liés à (S) ont la même vitesse par rapport à (R), ou de manière équivalente à chaque instant : $\vec{\Omega}_{(R_s/R)} = \vec{0}$

Remarque :

La translation peut être quelconque, rectiligne, curviligne, …

Le nombre de degré de liberté est réduit à 3. On peut parler de LA vitesse du solide par rapport à (R).

Exemple : Roue en glissement pur sur le sol



$$\vec{v}(C)_{(R)} = \vec{v}(A)_{(R)} = \vec{v}(I)_{(R)} = \vec{v}$$

1.1.2.3.2 Rotation autour d'un axe fixe

Un solide est en rotation autour d'un axe fixe Δ par rapport à un référentiel (R) si tous ses points sont en mouvement circulaire sur des cercles d'axe Δ avec la même vitesse angulaire : $\omega = \left\| \vec{\Omega}_{(R_s/R)} \right\|$

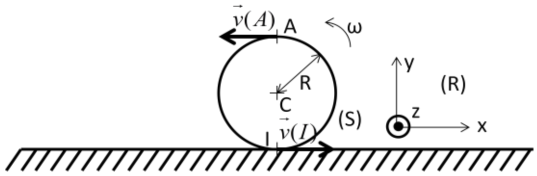
Remarque :

Soit le point O appartenant à Δ alors : $\vec{v}(O)_{(R)} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v}(M)_{(R)} = \overrightarrow{MO} \wedge \vec{\Omega}_{(R_s/R)}$

$\vec{\Omega}$ est orienté suivant l'axe fixe. Soit r la distance de M à Δ dans un repère cylindrique alors :

$$\vec{v}(M)_{(R)} = r\omega.\vec{e_\theta}$$

Exemple : Roue qui patine sur le sol



$$\vec{v}(C)_{(R)} = \vec{0} \quad \vec{v}(A)_{(R)} = -\omega \mathrm{R}\,\vec{\mathrm{e}_x} \quad \vec{v}(I)_{(R)} = \omega \mathrm{R}\,\vec{\mathrm{e}_x}$$

1.2 Cinétique des solides

1.2.1 Résultante cinétique (ou quantité de mouvement)

1.2.1.1 Définition

Définition :

On appelle **résultante cinétique** $\vec{P}$ d'un solide (S) la somme continue des quantités de mouvement élémentaires des volumes mésoscopiques constituant le solide : $\vec{P}_{(R)} = \iiint_\tau \vec{v}(M)_{(R)}\, dm$

Propriété :

On peut aussi écrire la **résultante cinétique** en fonction de la vitesse du centre de masse :

$$\vec{P}_{(R)} = m\vec{v}(G)_{(R)} \tag{5}$$

Démonstration :

$$\vec{P}_{(R)} = \iiint_\tau \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_{(R)} dm = \iiint_\tau \left(\frac{d\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GM}}{dt}\right)_{(R)} dm = \left(\frac{d\overrightarrow{OG}}{dt}\right)_{(R)} \iiint_\tau dm + \iiint_\tau \left(\frac{d\overrightarrow{GM}}{dt}\right)_{(R)} dm$$

$$= m\vec{v}(G)_{(R)} + \frac{d}{dt}\underbrace{\left(\iiint_\tau \overrightarrow{GM}\, dm\right)}_{=\vec{0}}{}_{(R)} = m\vec{v}(G)_{(R)}$$

1.2.1.2 Résultante cinétique barycentrique

Propriété :

Dans le référentiel barycentrique (R_G), le centre de masse est immobile : $\vec{P}_{(R_G)} = \vec{0}$

Remarque :

On obtient une nouvelle définition du référentiel barycentrique : référentiel dans lequel la quantité de mouvement est nulle.

1.2.2 Moment cinétique

1.2.2.1 Définition

Définition :

On appelle **moment cinétique** en un point A d'un solide (S) par rapport à un référentiel (R), $\overrightarrow{L_{A(R)}}$, la somme continue des moments cinétiques élémentaires en A des volumes mésoscopiques constituant le solide : $\overrightarrow{L_{A(R)}} = \iiint_{\tau} \overrightarrow{AM} \wedge \vec{v}(M)_{(R)}\, dm$

Propriété :

On peut exprimer le moment cinétique en un point A' différent de A par la simple relation :

$$\overrightarrow{L_{A'(R)}} = \overrightarrow{L_{A(R)}} + \overrightarrow{A'A} \wedge \vec{P}_{(R)} \qquad (6)$$

1.2.2.2 Moment cinétique barycentrique

Propriété :

Dans le référentiel barycentrique (R_G), le moment cinétique est indépendant du point d'application :

$$\vec{P}_{(R_G)} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{L_{A'(R_G)}} = \overrightarrow{L_{A(R_G)}} = \vec{L}_{(R_G)}$$

Remarque :

Le moment cinétique dans le référentiel barycentrique est une grandeur intrinsèque au système.

1.2.2.3 Moment cinétique par rapport à un axe

Définition :

Soit un axe Δ passant par A et dirigé selon $\overrightarrow{u_\Delta}$. Le **moment cinétique** $L_{\Delta(R)}$ **par rapport à l'axe Δ** est défini comme la projection du moment cinétique en A, $\overrightarrow{L_{A(R)}}$, sur Δ :

$$L_{\Delta(R)} = \overrightarrow{L_{A(R)}} \cdot \overrightarrow{u_\Delta} \qquad (7)$$

1.2.3 Torseur cinétique

Définition :

Le **torseur cinétique** est défini par : $C = \begin{Bmatrix} \vec{P} \\ \overrightarrow{L_A} \end{Bmatrix}_{(R)}$

Exercice : 1.4.3, 1.4.4

1.2.4 Mouvements possibles d'un solide

1.2.4.1 Translation

Un solide en translation a les mêmes éléments cinétiques par rapport à (R) qu'un point matériel fictif confondu avec le centre de masse, G, où serait concentrée toute la masse du système.

$$\vec{P}_{(R)} = m\vec{v}(G)_{(R)} \quad et \quad \overrightarrow{L_{A(R)}} = \overrightarrow{AG} \wedge \vec{P}_{(R)} = \overrightarrow{AG} \wedge m\vec{v}(G)_{(R)}$$

Démonstration :

$$\overrightarrow{L_{A(R)}} = \iiint_\tau \overrightarrow{AM} \wedge \vec{v}(M)_{(R)} dm = \iiint_\tau \overrightarrow{AM} \wedge \vec{v}(G)_{(R)} dm \quad car \quad \vec{v}(M)_{(R)} = \vec{v}(G)_{(R)}$$

$$= \iiint_\tau \left(\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GM}\right) \wedge \vec{v}(G)_{(R)} .dm = \left(\overrightarrow{AG} \wedge \vec{v}(G)_{(R)}\right) \iiint_\tau dm + \underbrace{\iiint_\tau \overrightarrow{GM} dm}_{=\vec{0}} \wedge \vec{v}(G)_{(R)}$$

$$= \overrightarrow{AG} \wedge m\vec{v}(G)_{(R)}$$

1.2.4.2 Rotation autour d'un axe fixe

1.2.4.2.1 Résultante cinétique

Soit un axe fixe Δ passant par le point O, origine du repère et dirigé suivant $\overrightarrow{u_\Delta}$, vecteur unitaire. La distance du point M appartenant au solide (S) en rotation autour de l'axe fixe Δ à l'origine du repère est notée OM = r. La projection du point M sur l'axe fixe est notée H. Le vecteur rotation instantané peut alors se mettre sous la forme :

$$\vec{\Omega}_{(R_S/R)} = \Omega\overrightarrow{u_\Delta} \quad \Rightarrow \quad \vec{P}_{(R)} = mr\Omega\overrightarrow{u_\theta}$$

Démonstration :

$$\vec{P}_{(R)} = m\vec{v}(G)_{(R)} = m\left(\underbrace{\vec{v}(O)_{(R)}}_{=\vec{0}} + \overrightarrow{GO} \wedge \vec{\Omega}_{(R_S/R)}\right) = m\Omega\left(\overrightarrow{GO} \wedge \overrightarrow{u_\Delta}\right) = mr\Omega\overrightarrow{u_\theta}$$

1.2.4.2.2 Moment d'inertie

<u>Définition</u> :
On appelle moment d'inertie, J_Δ, d'un solide (S) par rapport à un axe Δ la quantité :

$$J_\Delta = \iiint_\tau HM^2 dm \qquad (8)$$

<u>Remarque</u> :
Le moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe est une caractéristique de la répartition de la masse du solide, c'est une caractéristique intrinsèque du solide qui ne dépend donc pas du mouvement du solide, ni du temps. Il est d'autant plus grand que la masse est éloignée de l'axe Δ.
De part sa définition, le moment d'inertie est toujours positif.

<u>Exemple</u> :

Moment d'inertie d'une tige rectiligne, de section négligeable, de longueur 2b et de masse m, par rapport à sa médiatrice Δ	$J_\Delta = \frac{1}{3}mb^2$
Moment d'inertie d'un disque, ou d'un cylindre plein, de rayon R et de masse m, par rapport à son axe de symétrie Δ	$J_\Delta = \frac{1}{2}mR^2$
Moment d'inertie d'une sphère pleine, de rayon R et de masse m, par rapport à son diamètre Δ	$J_\Delta = \frac{2}{5}mR^2$

1.2.4.2.3 Moment cinétique

Le moment cinétique au point O est composé de deux termes, l'un parallèle à l'axe Δ et l'autre perpendiculaire :

$$\overrightarrow{L_{O(R)}} = J_\Delta \vec{\Omega}_{(R_S/R)} - \iiint_\tau \left(\overrightarrow{OH} \cdot \vec{\Omega}_{(R_S/R)}\right) \cdot \overrightarrow{HM} dm = L_{\Delta(R)} \overrightarrow{u_\Delta} - \iiint_\tau \left(\overrightarrow{OH} \cdot \vec{\Omega}_{(R_S/R)}\right) \cdot \overrightarrow{HM} dm$$

La composante perpendiculaire peut s'annuler dans deux cas : si Δ est un axe de symétrie du solide (S) ou si le plan passant par O et perpendiculaire à Δ est un plan de symétrie de (S). Alors, le moment cinétique en O s'écrit : $\overrightarrow{L_{O(R)}} = J_\Delta \vec{\Omega}_{(R_S/R)}$

On peut calculer le moment cinétique, $L_{\Delta(R)}$, par rapport à l'axe Δ :

$$L_{\Delta(R)} = J_\Delta \Omega \qquad (9)$$

Démonstration :

$$\overrightarrow{L_{O(R)}} = \iiint_\tau \overrightarrow{OM} \wedge \vec{v}(M)_{(R)}\, dm = \iiint_\tau \overrightarrow{OM} \wedge \left(\vec{\Omega}_{(R_S/R)} \wedge \overrightarrow{OM}\right) dm = \iiint_\tau \left(\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OM}\right) \vec{\Omega}_{(R_S/R)} - \left(\overrightarrow{OM} \cdot \vec{\Omega}_{(R_S/R)}\right) \overrightarrow{OM} dm$$

$$= \iiint_\tau \left(\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HM}\right)^2 dm \cdot \vec{\Omega}_{(R_S/R)} - \iiint_\tau \left(\overrightarrow{OH} \cdot \vec{\Omega}_{(R_S/R)}\right) \cdot \left(\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HM}\right) dm$$

$$= \left(\overrightarrow{OH}\right)^2 \vec{\Omega}_{(R_S/R)} \iiint_\tau dm + 2 \iiint_\tau \underbrace{\left(\overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{HM}\right)}_{=\vec{0}} dm . \vec{\Omega}_{(R_S/R)} + \iiint_\tau \left(\overrightarrow{HM}\right)^2 dm \cdot \vec{\Omega}_{(R_S/R)}$$

$$- \left(\overrightarrow{OH}\right)^2 \vec{\Omega}_{(R_S/R)} \iiint_\tau dm - \iiint_\tau \left(\overrightarrow{OH} \cdot \vec{\Omega}_{(R_S/R)}\right) \overrightarrow{HM} . dm$$

$$= J_\Delta \vec{\Omega}_{(R_S/R)} - \iiint_\tau \left(\overrightarrow{OH} \cdot \vec{\Omega}_{(R_S/R)}\right) \cdot \overrightarrow{HM} dm$$

$$L_{\Delta(R)} = \overrightarrow{L_{O(R)}} \cdot \overrightarrow{u_\Delta} = \left(J_\Delta \vec{\Omega}_{(R_S/R)} - \iiint_\tau \left(\overrightarrow{OH} \cdot \vec{\Omega}_{(R_S/R)}\right) \cdot \overrightarrow{HM} dm \right) \cdot \overrightarrow{u_\Delta} = J_\Delta \Omega$$

1.3 Dynamique des solides

1.3.1 Actions mécaniques

1.3.1.1 Définition

Définition :
On appelle **action** (ou **effort**) toute cause susceptible de maintenir un solide au repos, de créer un mouvement ou de déformer un système.

1.3.1.2 Classification

Parmi toutes les actions pouvant s'exercer sur un solide (S), certaines peuvent provenir d'éléments internes à (S). Elles sont dites **intérieures**, par opposition aux actions **extérieures** exercées par des éléments extérieurs au solide sur le solide.

Exemple :
Deux solides en contact
- action intérieure = action de contact entre solide ou action de liaison
- action extérieure = poids

1.3.1.3 Principe des actions mutuelles

On considère un système composé d'un ensemble de points. On note F_{ji} ($j\neq i$) l'action exercée par M_j sur M_i. Alors la somme des actions intérieures sur M_i vaut : $\overrightarrow{F_{i,\text{int}}} = \sum_{j,j\neq i} \overrightarrow{F_{ji}}$

Le principe des actions mutuelles indique que la force exercées par M_i sur M_j est opposée à celle exercées par M_j sur M_i et que sa direction est colinéaire à $\overrightarrow{M_iM_j}$.

$$\overrightarrow{F_{ji}} = -\overrightarrow{F_{ij}}$$

La somme des actions intérieures exercées sur tout le système de points est alors nulle puisqu'elle contient à la fois les termes F_{ij} que F_{ji} qui s'annulent deux à deux.

$$\overrightarrow{F_{\text{int}}} = \sum_i \overrightarrow{F_{i,\text{int}}} = \sum_i \sum_{j,j\neq i} \overrightarrow{F_{ji}} = 0$$

De la même manière, le moment total intérieur à un système sera nul.

1.3.2 Résultante et moment des actions mécaniques extérieures

1.3.2.1 Résultante des actions mécaniques extérieures

Définition :

Pour un champ de forces appliqué à un solide (S), on appelle **résultante des actions mécaniques**, $\vec{R}$, la somme des actions élémentaires volumiques appliquées au solide : $\vec{R} = \iiint_\tau \overrightarrow{f_v} d\tau$

1.3.2.2 Moment des actions mécaniques extérieures

1.3.2.2.1 Moment en un point

Définition :

Pour un champ de forces appliqué à un solide (S), on appelle **moment des actions mécaniques**, $\overrightarrow{M_A}$**,** en un point A quelconque du solide, la somme des moments en A des actions élémentaires volumiques appliquées au solide : $\overrightarrow{M_A} = \iiint_\tau \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{f_v} d\tau$

Propriété :

On peut exprimer le **moment des actions mécaniques** en un point A' différent de A par la simple relation :

$$\overrightarrow{M_{A'}} = \overrightarrow{M_A} + \overrightarrow{A'A} \wedge \vec{R} \qquad (10)$$

1.3.2.2.2 Moment par rapport à un axe

Définition :

Soit un axe Δ passant par A et dirigé selon $\overrightarrow{u_\Delta}$. Le **moment des actions mécaniques,** M_Δ**, par rapport à l'axe Δ** est défini comme la projection du moment des actions mécaniques en A sur Δ :

$$M_\Delta = \overrightarrow{M_A} \cdot \overrightarrow{u_\Delta} \qquad (11)$$

1.3.3 Torseur des actions

1.3.3.1 *Définition*

Définition :

Le **torseur des actions mécanique** est défini par : $\Gamma_S = \left\{ \begin{matrix} \vec{R} \\ \overrightarrow{M_A} \end{matrix} \right\}_{(R)}$

1.3.3.2 *Glisseur*

Définition :
On appelle **glisseur** une action mécanique telle qu'il existe un point B où le moment des actions mécaniques est nul.

Remarque :

On peut alors exprimer le moment en A selon : $\overrightarrow{M_A} = \overrightarrow{M_B} + \vec{R} \wedge \overrightarrow{BA} = \vec{R} \wedge \overrightarrow{BA}$

Propriété :
Lorsque le torseur des actions mécaniques s'exerçant sur le solide est celui d'un glisseur, on peut utiliser le terme de **force**.

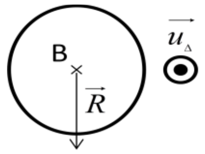
Exemple : le poids
On considère l'accélération de la pesanteur terrestre g uniforme sur tout le solide. En notant ρ la masse volumique du solide, on peut exprimer l'action mécanique extérieure s'exerçant sur le solide sous la forme : $\overrightarrow{f_v} = \mu \vec{g}$
On obtient alors les résultantes et moments en G, centre de masse, des actions mécaniques :

$$\vec{R} = m\vec{g} \quad et \quad \overrightarrow{M_G} = \iiint_\tau \rho \overrightarrow{GM} d\tau \wedge \vec{g} = \underbrace{\iiint_\tau \overrightarrow{GM} dm}_{=\vec{0}} \wedge \vec{g} = \vec{0}$$

L'action mécanique du poids est équivalente à une force unique appliquée au centre d'inertie G du système.

1.3.3.3 *Bras de levier*

On considère un glisseur appliqué en un point B, et on cherche à calculer son moment par rapport à la droite (A ; Δ) perpendiculaire au plan de figure. Soit H la projection de B sur la droite et BH la distance entre B et la droite.



$$M_\Delta = \overrightarrow{M_A}.\overrightarrow{u_\Delta} = \left(\vec{R} \wedge \overrightarrow{BA}\right).\overrightarrow{u_\Delta} = \left(\vec{R} \wedge \left(\overrightarrow{BH} + \overrightarrow{HA}\right)\right).\overrightarrow{u_\Delta} = \left(\vec{R} \wedge \overrightarrow{BH}\right).\overrightarrow{u_\Delta} \quad \Rightarrow \quad |M_\Delta| = \left\|\vec{R}\right\|.BH$$

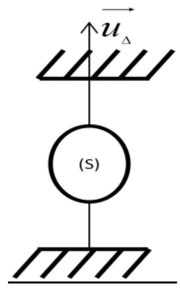
On appelle bras de levier du glisseur la distance BH entre son support et la droite Δ.

1.3.3.4 *Couple*

Définition :
On appelle **couple** une action mécanique dont la résultante est nulle.

Exemple : couple de rappel élastique

Soit un solide (S) attaché à un fil tendu. Le fil n'étant pas rigide, il est possible de faire tourner (S) autour de l'axe Δ du fil. Cette rotation entraine une déformation du fil et donc des contraintes mécaniques internes. A l'image du ressort en extension, on peut souvent modéliser l'effet de ces contraintes par un couple Γ exercé par le fil sur (S). L'angle qui repère la rotation de (S) autour de Δ est noté θ et θ_0 pour sa valeur au repos. On appelle C la constante de torsion.



$$\vec{\Gamma} = -C(\theta - \theta_0)\overrightarrow{u_\Delta}$$

1.3.3.5 Liaison pivot parfaite

Une liaison pivot est une liaison autorisant uniquement un mouvement de rotation autour d'un axe fixe Δ. On considère un solide (S) lié à un support fixe dans un référentiel (R) par une liaison pivot parfaite.

Dans le cas d'une liaison pivot parfaite autour d'un axe Δ, l'action de liaison a un moment nul par rapport à l'axe Δ : $M_\Delta(liaison) = 0$

1.3.4 Théorème de la résultante cinétique (ou dynamique) en référentiel galiléen

Soit un solide en mouvement par rapport à un référentiel galiléen (R). Alors la dérivée de la quantité de mouvement (ou résultante dynamique), $\vec{D}_{(R)}$, est égale à la résultante des actions mécaniques extérieures, $\vec{R}_{ext}$, agissant sur le solide :

$$\vec{D}_{(R)} = \left(\frac{d\vec{P}_{(R)}}{dt}\right)_{(R)} = m\vec{a}(G)_{(R)} = \vec{R}_{ext} \qquad (12)$$

Remarque :

Le mouvement du centre d'inertie d'un solide est identique à celui d'un point matériel fictif qui serait affecté de toute la masse du système et soumis à l'ensemble des forces exercées par l'extérieur sur le solide.

Si le référentiel est non galiléen il faut rajouter les résultantes des forces d'entrainement et de Coriolis.

1.3.5 Théorème du moment cinétique (ou dynamique) en référentiel galiléen

1.3.5.1 En un point fixe

Soit un solide en mouvement par rapport à un référentiel galiléen (R). Alors la dérivée du moment cinétique (ou moment dynamique), $\overrightarrow{\delta_{A(R)}}$, est égale au moment des actions mécaniques extérieures, $\overrightarrow{M_{A\,ext}}$, agissant sur le solide :

$$\overrightarrow{\delta_{A(R)}} = \left(\frac{d\overrightarrow{L_{A(R)}}}{dt}\right)_{(R)} = \overrightarrow{M_{A\,ext}} \qquad (13)$$

Remarque :

Si le référentiel est non galiléen il faut rajouter les moments des forces d'entrainement et de Coriolis.

Le théorème du moment cinétique est valable au centre d'inertie G bien que ce soit a priori un point mobile dans (R).

Le théorème du moment cinétique est applicable dans le référentiel barycentrique bien que ce référentiel ne soit pas a priori galiléen, mais uniquement au centre d'inertie G du système.

1.3.5.2 Par rapport à un axe fixe

Soit un axe Δ fixe dans le référentiel galiléen (R) alors :

$$\left(\frac{dL_{\Delta(R)}}{dt}\right)_{(R)} = M_{\Delta,ext} \qquad (14)$$

1.3.5.3 Rotation autour d'un axe fixe

Soit un solide (S) en rotation autour d'un axe fixe Δ à la vitesse angulaire Ω.

$$\left(\frac{dL_{\Delta(R)}}{dt}\right)_{(R)} = \left(\frac{dJ_{\Delta}\Omega}{dt}\right)_{(R)} = J_{\Delta}\left(\frac{d\Omega}{dt}\right)_{(R)} = M_{\Delta,ext}$$

<u>Exercice</u> : 1.4.5

<u>A retenir et savoir faire :</u>

- Savoir relier les vitesses des points d'un solide.
- Savoir exprimer la résultante cinétique et le moment cinétique en fonction du mouvement du solide.
- Savoir exprimer la résultante, le moment des actions mécaniques
- Savoir utiliser les théorèmes de la résultante cinétique et du moment cinétique en fonction du mouvement du solide.