Cours IV : Electrocinétique

2 Analyse de Fourier

L'objectif de ce cours est de présenter une analyse des signaux analogiques en termes de fréquences, et de dégager la notion de spectre de fréquence d'un signal. Cette approche permettra la compréhension du principe de fonctionnement des filtres analogiques, dont l'usage est extrêmement répandu en électronique.

2.1 Décomposition d'un signal en série de Fourier

2.1.1 Principe

Définition :
Mathématiquement, il est possible de décomposer une fonction f(t) périodique de période T = 2π/ω en somme de termes sinusoïdaux du temps, de pulsations multiples de ω. Cette somme est appelée **série de Fourier** :

$$f(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(A_k \cos(k\omega t) + B_k \sin(k\omega t) \right) \tag{1}$$

Remarque :
La fonction se compose de trois parties :

- Partie qui ne varie pas : A_0
- Terme qui a la même période que la fonction elle-même, appelé **fondamental** :

$$A_1 \cos(\omega t) + B_1 \sin(\omega t)$$

- Termes qui varient de plus en plus vite (k > 1), appelés **harmoniques** de rang k

2.1.2 Coefficients de la série

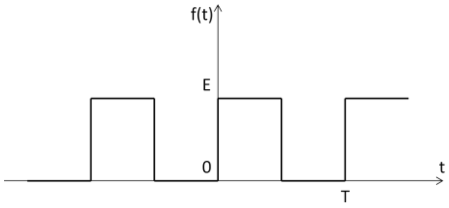
Définition :
Les coefficients de ce développement sont donnés par des intégrales portant sur une période du signal :

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{T} \int_{(T)} f(t)dt \\ A_k &= \frac{2}{T} \int_{(T)} f(t)\cos(k\omega t)dt \\ B_k &= \frac{2}{T} \int_{(T)} f(t) sin(k\omega t)dt \end{aligned} \tag{2}$$

Remarque :
Le terme constant A_0 de la série de Fourier est la **valeur moyenne** du signal.
Si la fonction f(t) est **paire** : les coefficients B_k sont nuls.
Si la fonction f(t) est **impaire** : les coefficients A_k sont nuls.

Exemple : Signal carré

Soit le signal carré représenté ci-dessous :



$$A_0 = \frac{1}{T}\int_{(T)} f(t)dt = \frac{E}{2}$$

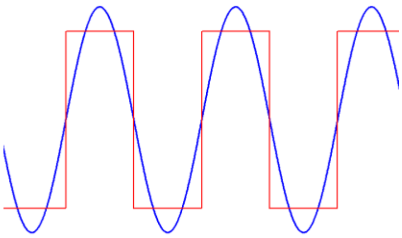
$$A_k = \frac{2}{T}\int_{(T)} f(t)\cos(k\omega t)dt = 0$$

$$B_k = \frac{2}{T}\int_{(T)} f(t)sin(k\omega t)dt = \frac{E}{k\pi}\left(1-\cos(k\pi)\right) = \begin{cases} \dfrac{2E}{(2p+1)\pi} & si \quad k = 2p+1\,(p\in\mathbb{Z}) \\ =0 \quad si \quad k=2p\,(p\in\mathbb{Z}) \end{cases}$$

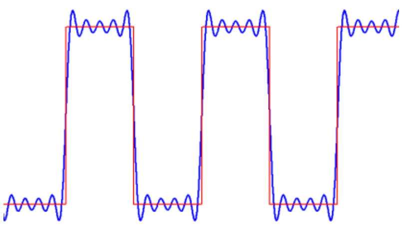
On a donc au final :

$$f(t) = \frac{E}{2} + \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{2E}{(2p+1)\pi}\sin\left((2p+1)\omega t\right)$$

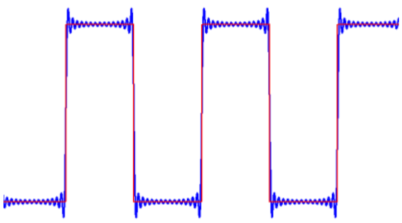
On peut alors représenter cette fonction en fonction de la valeur de k :



Harmonique fondamental



Avec 10 harmoniques



Avec 30 harmoniques

Lorsqu'on accroît le nombre de termes pris en compte, on épouse de mieux en mieux la forme du signal total. L'existence de variations brutales au cours du temps est associée à la présence significative de termes de rang élevé dans la série de Fourier (Phénomène de Gibbs).

2.2 Représentation spectrale

2.2.1 Autre écriture

Définition :

On peut exprimer la série de Fourier d'une fonction sous une autre forme qui fait intervenir l'amplitude et la phase de chaque terme de pulsation kω :

$$f(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} C_k \cos\left(k\omega t + \varphi_k\right)$$
$$avec \quad C_k = \sqrt{A_k^2 + B_k^2} \quad et \quad \varphi_k = \tan^{-1}\frac{B_k}{A_k} \qquad (3)$$

Remarque :

Pour un signal physique, l'amplitude des harmoniques tend vers 0 quand leur rang k tend vers l'infini.

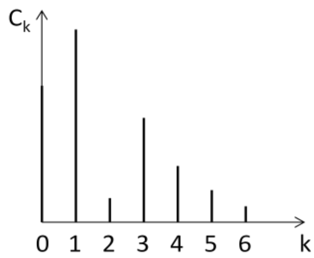
La série de Fourier peut être également écrite en utilisant les nombres complexes :

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \underline{C_k} e^{jk\omega t} \quad avec \quad \underline{C_k} = \frac{1}{T}\int_{(T)} f(t) e^{-jk\omega t} dt \quad \Rightarrow \quad \underline{C_0} = A_0 \quad \underline{C_k} = \frac{A_k - jB_k}{2} \quad \left|\underline{C_k}\right| = \frac{C_k}{2}$$

2.2.2 Spectre d'un signal

Définition :

La représentation des amplitudes C_k des harmoniques en fonction de leur rang k est appelé **spectre** du signal.



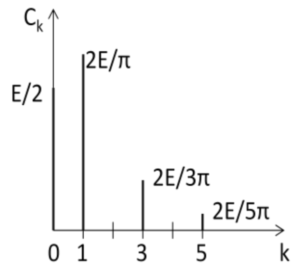
Remarque :

Il est aussi possible de graduer l'axe des abscisses en pulsation kω ou en fréquence kf.

Exemple : Signal carré

L'amplitude de ses harmoniques de rang pair est égale à : $C_{2p+1} = \dfrac{2E}{(2p+1)\pi}$

On peut donc représenter son spectre :



Exercice : 2.4.1

2.2.3 Interprétation énergétique

La **puissance** d'un signal est définie comme la valeur moyenne du carré du signal :

$$\left\langle f^2 \right\rangle = f_{eff}^2 = \frac{1}{T}\int_{(T)} f^2(t)dt$$

En utilisant les séries de Fourier, on peut la relier à la valeur des amplitudes des harmoniques :

$$\left\langle f^2 \right\rangle = A_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty} C_k^2$$

La puissance du signal résultant est la somme des puissances de chacun des termes.

2.2.4 Distorsion harmonique

Un critère de reconnaissance de la linéarité d'un système porte sur l'examen du signal de sortie pour une entrée dépendant sinusoïdalement du temps. Si le signal de sortie est sinusoïdal, de même fréquence que le signal d'entrée alors le système est linéaire. Dans ce cas, seuls les coefficients de l'harmonique sont non nuls. Les termes d'ordre supérieur constituent ce que l'on appelle la distorsion harmonique. On appelle **taux de distorsion harmonique** le rapport entre la puissance des termes harmoniques et celle du fondamental :

$$THD = \frac{\sqrt{\sum_{k=2}^{+\infty} C_k^2}}{C_1}$$

2.3 Effet d'un filtre sur un signal périodique

Soit la fonction de transfert $\underline{H}(j\omega)$ du filtre. Le spectre de sortie est le produit du spectre d'entrée par le module $|\underline{H}(j\omega)|$ de la fonction de transfert.

2.3.1 Filtre passe-bas

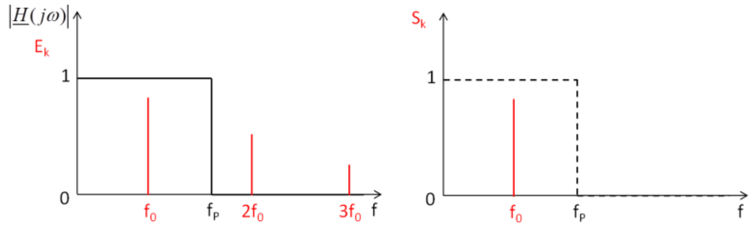
Un filtre passe-bas transmet intégralement la composante continue du signal. Le signal de sortie ne présente jamais de discontinuité.

Pour un signal périodique de fréquence f_0 :

- très inférieur à la fréquence de coupure f_P : le signal de sortie est voisin du signal d'entrée
- de l'ordre de f_P : le signal est transmis avec une déformation importante
- très supérieur à f_P : le signal de sortie est quasiment continu.

<u>Cas particuliers</u> :

- Si $f_0 < f_P < 2f_0$, la composante fondamentale est la seule à ne pas être modifiée par le filtre. Les termes d'harmoniques sont fortement atténués.



- Si toutes les composantes spectrales d'amplitude non négligeable sont contenues dans la bande passante. Le spectre de sortie sera quasiment égal à celui d'entrée. Plus précisément, les discontinuités et points anguleux du signal d'entrée sont adoucis dans le signal de sortie, car ces informations sont portées par les harmoniques de rang élevés.

Remarque :
Lorsque la fréquence de coupure du filtre passe-bas est inférieure à la fréquence du fondamental du signal, on se trouve dans la bande atténuée du filtre. Le filtre passe-bas se comporte comme un intégrateur. D'où la forme triangulaire du signal en sortie du filtre, dans le cas d'un signal carré en entrée.
Exercice : 2.4.2

2.3.2 Filtre passe-haut

Un filtre passe-haut transmet intégralement les discontinuités du signal et élimine sa composante continue.
Pour un signal périodique de fréquence f_0 :

- très inférieur à la fréquence de coupure f_P : le signal de sortie est d'amplitude très faible sauf au niveau des discontinuités du signal d'entrée
- de l'ordre de f_P : le signal est transmis avec une déformation importante
- très supérieur à f_P : le signal de sortie est peu déformé, sa composante continue est éliminée.

Remarque :
Un filtre passe-haut se trouve à l'entrée des oscilloscopes permettant d'éliminer la valeur moyenne d'un signal (mode AC).

2.3.3 Filtre passe-bande

Un filtre passe-bande élimine la composante continue du signal. Le signal de sortie ne présente pas de discontinuités.
Pour un signal périodique de fréquence f_0 :

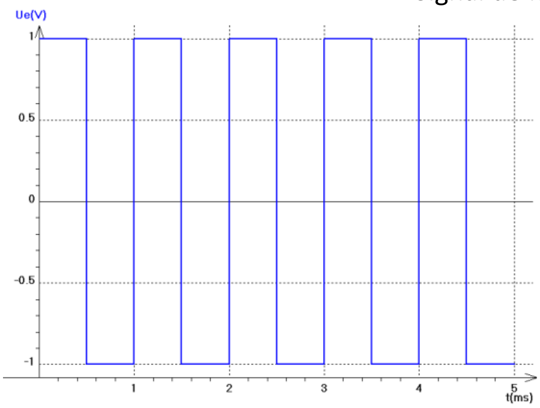
- très inférieur à la fréquence de coupure f_P : le signal de sortie est d'amplitude très faible sauf au niveau des discontinuités du signal d'entrée (effet passe-haut)
- de l'ordre de f_P : le signal de sortie est voisin de la partie variable du signal d'entrée
- très supérieur à f_P : le signal de sortie est d'amplitude très faible (effet passe-bas).

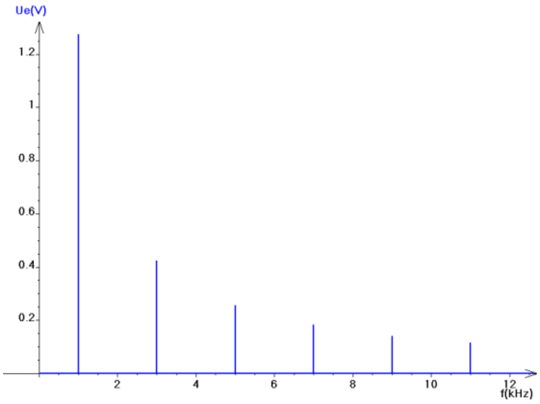
A retenir et savoir faire :

- Savoir interpréter l'effet d'un filtre du premier et du second ordre sur un signal périodique.

<u>Exemple</u> : Signal carré

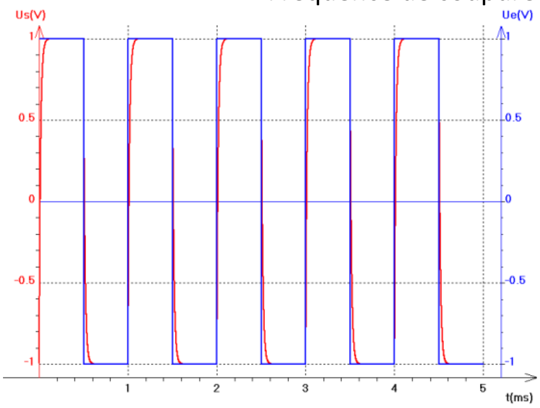
Signal de fréquence 1 kHz

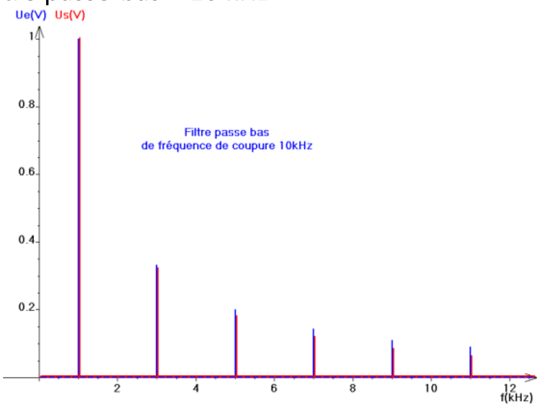




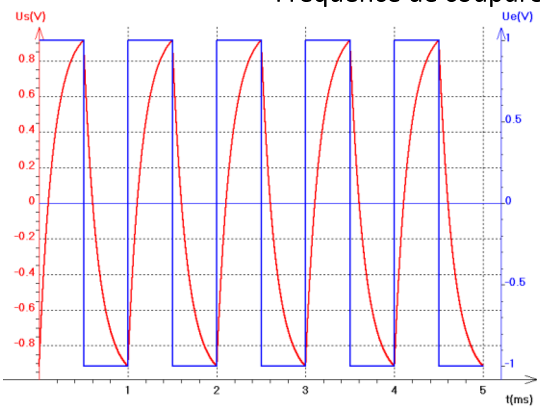
En fonction du temps En fonction de la fréquence

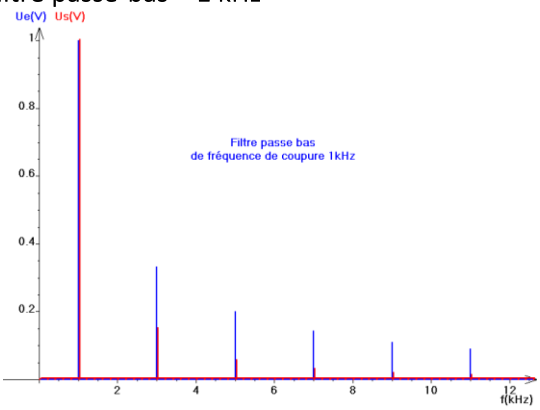
Fréquence de coupure du filtre passe-bas = 10 kHz



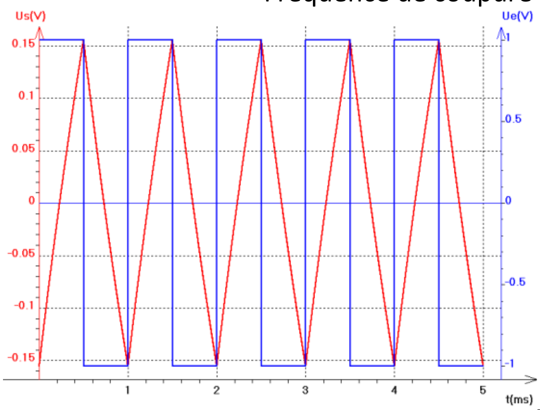


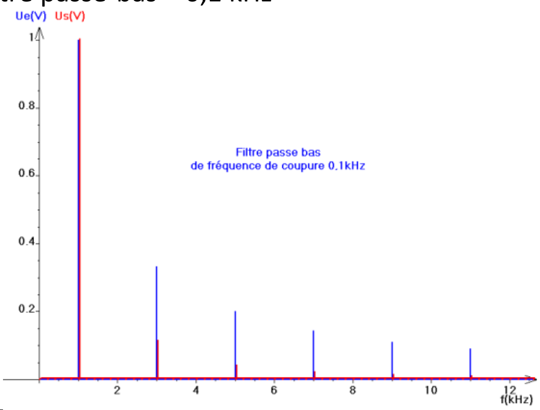
Fréquence de coupure du filtre passe-bas = 1 kHz





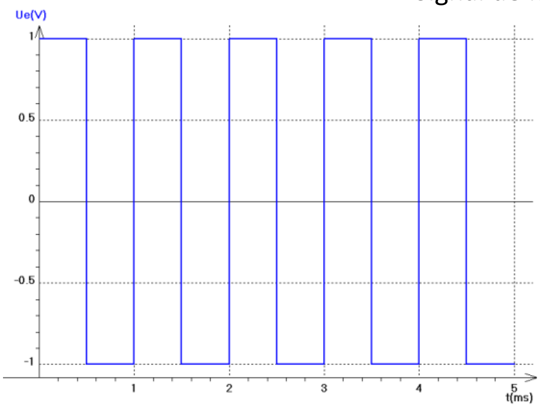
Fréquence de coupure du filtre passe-bas = 0,1 kHz

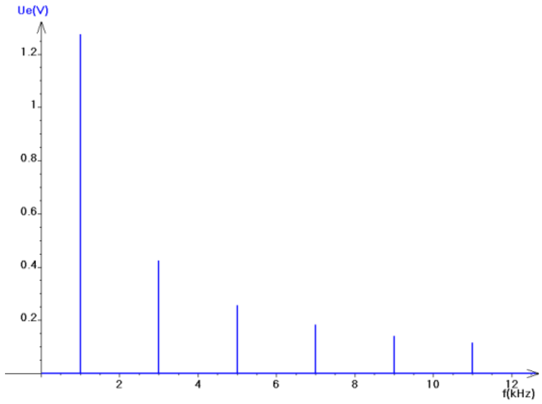




<u>Exemple</u> : Signal carré

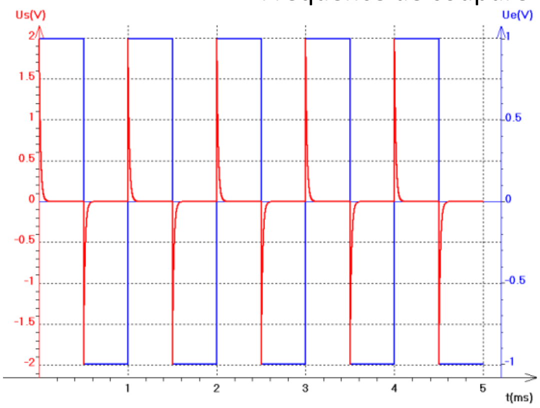
Signal de fréquence 1 kHz

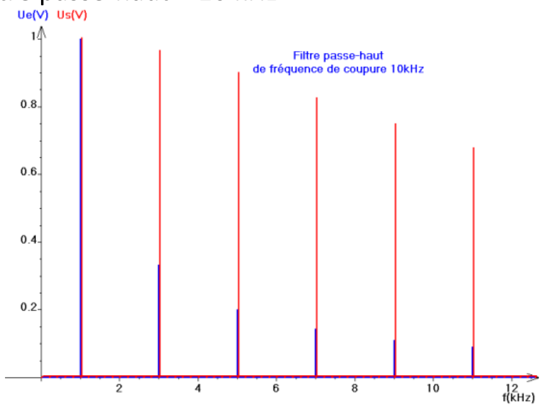




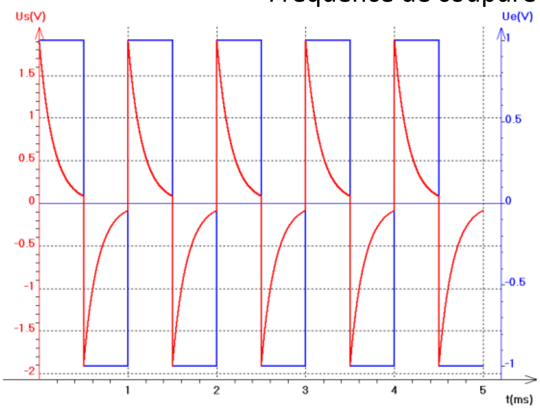
En fonction du temps En fonction de la fréquence

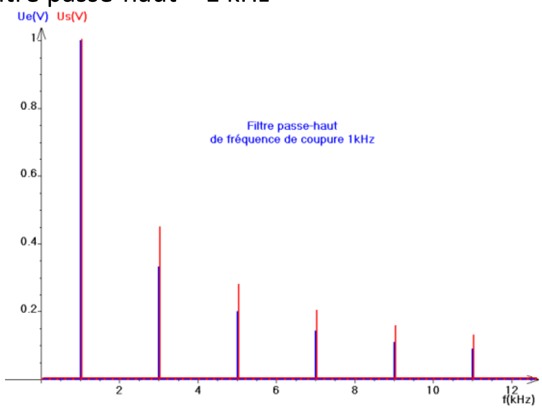
Fréquence de coupure du filtre passe-haut = 10 kHz



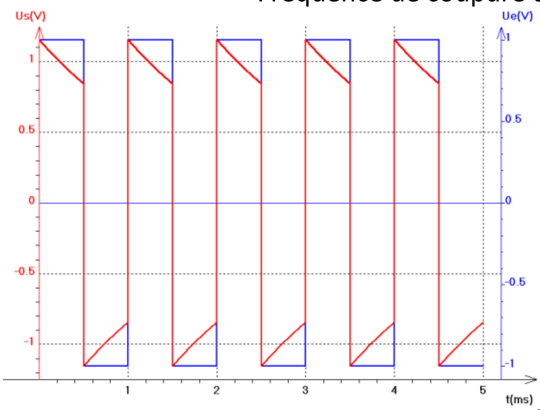


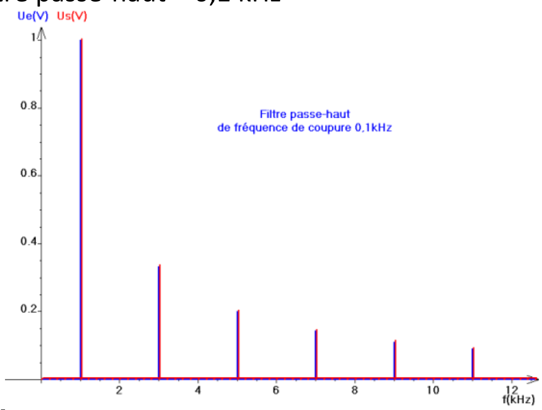
Fréquence de coupure du filtre passe-haut = 1 kHz





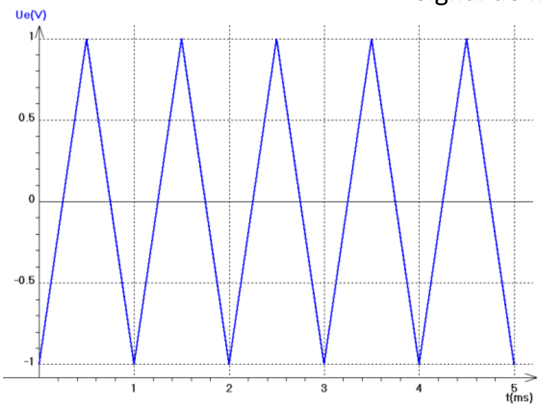
Fréquence de coupure du filtre passe-haut = 0,1 kHz

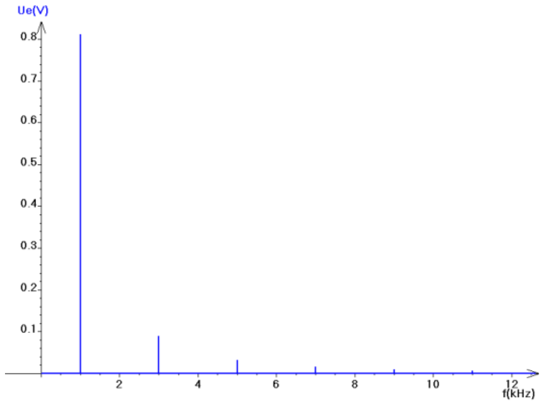




<u>Exemple</u> : Signal triangulaire

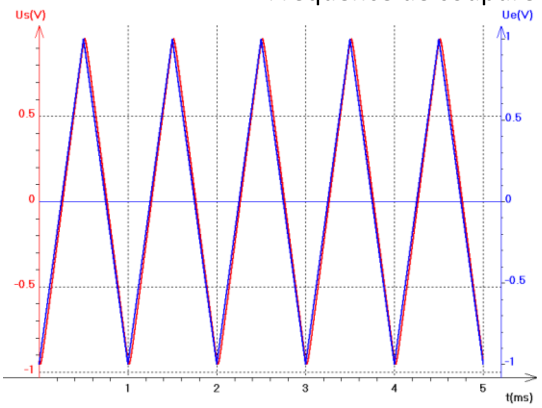
Signal de fréquence 1 kHz

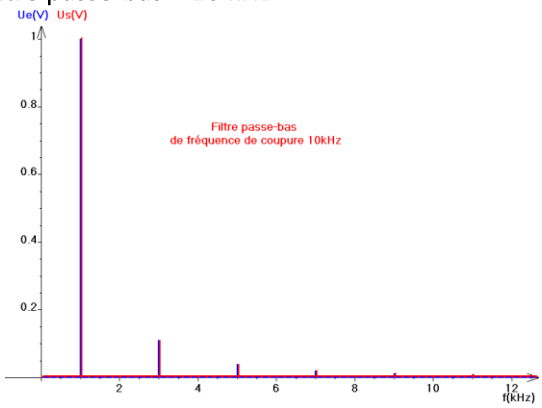




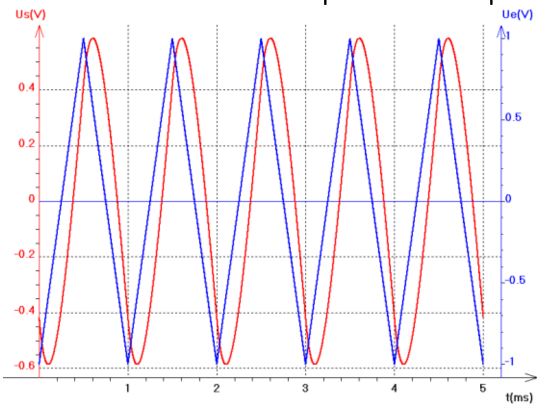
En fonction du temps En fonction de la fréquence

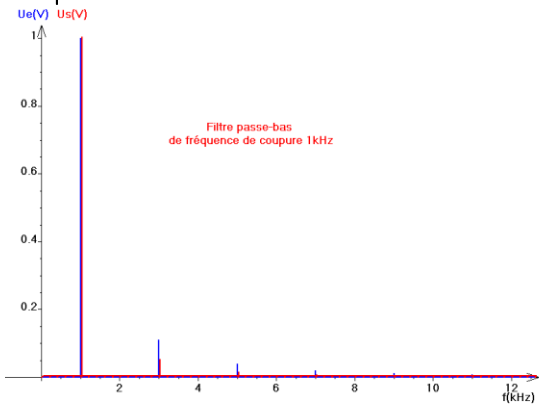
Fréquence de coupure du filtre passe-bas = 10 kHz



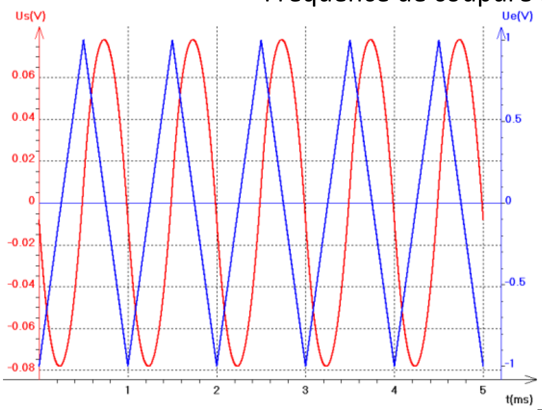


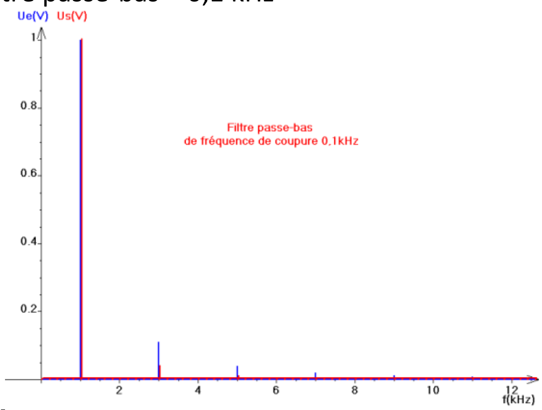
Fréquence de coupure du filtre passe-bas = 1 kHz





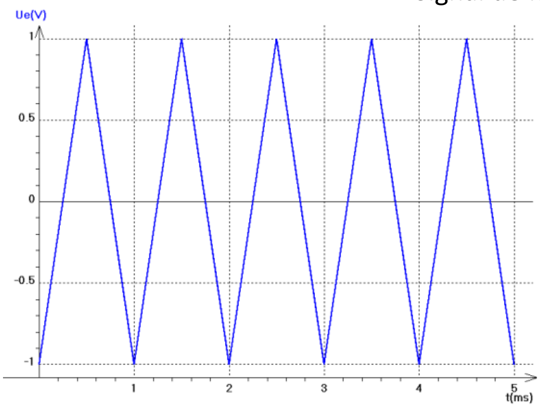
Fréquence de coupure du filtre passe-bas = 0,1 kHz

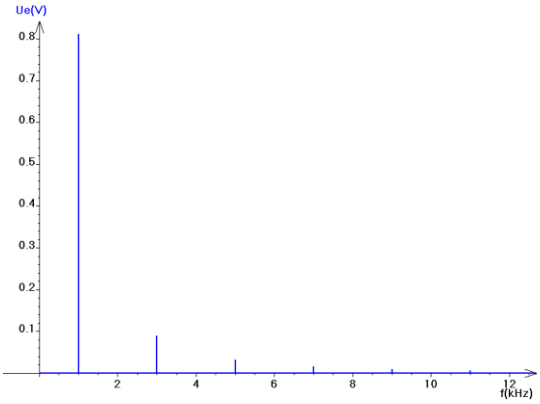




<u>Exemple</u> : Signal triangulaire

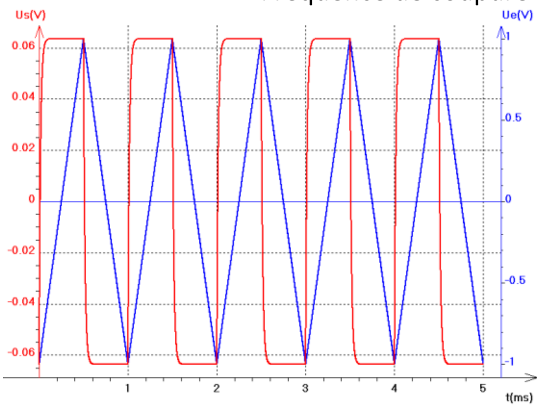
Signal de fréquence 1 kHz

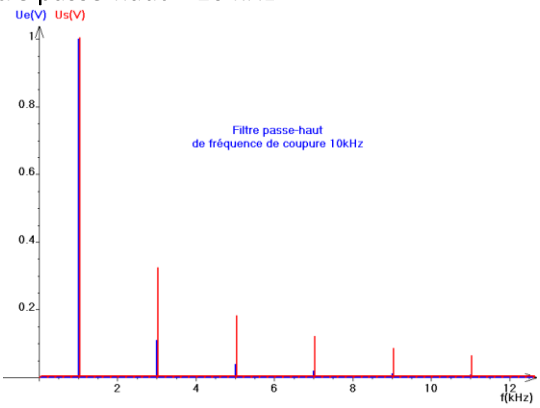




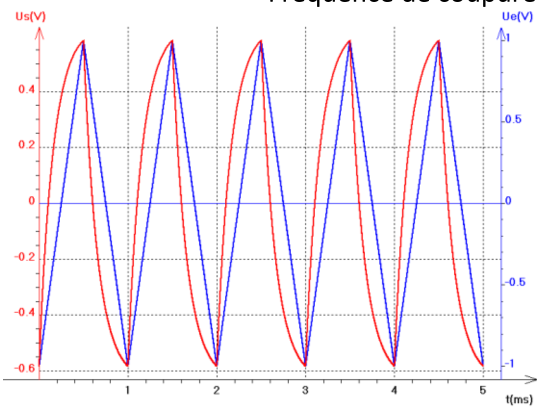
En fonction du temps En fonction de la fréquence

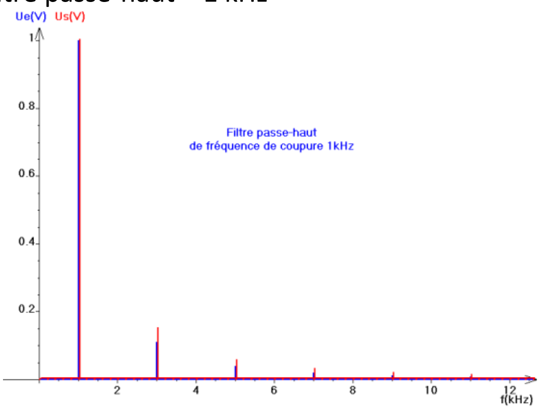
Fréquence de coupure du filtre passe-haut = 10 kHz





Fréquence de coupure du filtre passe-haut = 1 kHz





Fréquence de coupure du filtre passe-haut = 0,1 kHz