

Cours VI : Electromagnétisme

2.8 Exemples de calcul de champ magnétostatique crée par des courants filiformes

Méthode de résolution (en utilisant la Loi de Biot et Savart) :

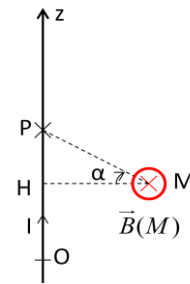
- 1- Rechercher les symétries et invariances
- 2- Calculer le champ magnétique élémentaire crée par l'élément de courant $I d\vec{l}$
- 3- Utiliser les symétries pour simplifier
- 4- Intégrer sur le circuit fermé

Méthode de résolution (en utilisant le théorème d'Ampère) :

- 1- Rechercher les symétries et invariances.
- 2- Choisir le contour fermé d'Ampère
- 3- Calcul du champ magnétostatique

2.8.1 Fil rectiligne infini parcouru par un courant I

On considère un fil rectiligne infini confondu avec l'axe Oz et parcouru par un courant I. Le courant et l'axe Oz sont orientés dans le même sens. Ce système modélise un circuit fermé comportant une portion rectiligne de longueur L grande devant la distance r au point M où est évalué le champ $\vec{B}$. Le point M(r, θ , z) est repéré par ses coordonnées cylindriques.



2.8.1.1 Symétrie et invariance

Symétries :

Tous les plans contenant le fil sont plans de symétrie (Π) de la distribution de courant

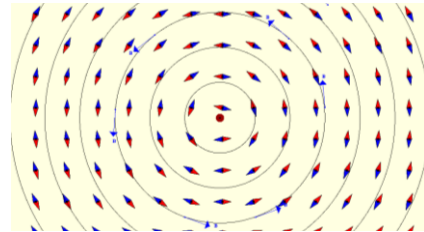
Tous les plans perpendiculaires au fil sont plans d'antisymétrie de la distribution de courant.

Le champ magnétique est perpendiculaire aux plans de symétrie : $\vec{B} = B_\theta(r, \theta, z)\vec{e}_\theta$

Invariances :

La distribution de courants étant invariante par translation selon z et rotation selon θ , on a : $\vec{B} = B_\theta(r)\vec{e}_\theta$

Les lignes de champ sont orthoradiales. Ce sont des cercles d'axe Oz.



2.8.1.2 Loi de Biot et Savart

2.8.1.2.1 Champ magnétique élémentaire

L'élément de courant $I d\vec{l}$ situé en P(0, 0, Z), crée le champ élémentaire :

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \wedge \vec{PM}}{PM^3} \quad \text{avec} \quad d\vec{l} = dZ \vec{e}_z$$

On décompose le vecteur $\vec{PM}$ en utilisant le projeté H(0, 0, z) de M sur l'axe Oz, on obtient :

$$\vec{PM} = \vec{PH} + \vec{HM} = (Z - z)\vec{e}_z + r\vec{e}_r \quad \text{d'où} \quad d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I r dZ}{(r^2 + (Z - z)^2)^{3/2}} \vec{e}_\theta$$

On introduit l'angle α entre $\vec{MH}$ et $\vec{MP}$, on obtient :

$$\cos \alpha = \frac{r}{(r^2 + (Z - z)^2)^{1/2}} \quad \text{et} \quad \tan \alpha = \frac{Z - z}{r} \Rightarrow dZ = \frac{r d\alpha}{\cos^2 \alpha}$$

2.8.1.2.2 Intégration

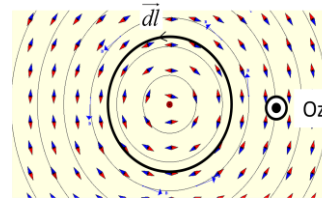
Finalement, le champ magnétique créé par le fil infini se calcule en intégrant l'expression ci-dessous pour α variant entre $-\pi/2$ et $\pi/2$:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \cos \alpha d\alpha}{r} \vec{e}_\theta \quad \text{d'où} \quad \vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \alpha d\alpha \vec{e}_\theta = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\theta$$

2.8.1.3 Théorème d'Ampère

2.8.1.3.1 Contour d'Ampère

On choisit un cercle d'axe Oz et de rayon r parcouru dans le sens trigonométrique.



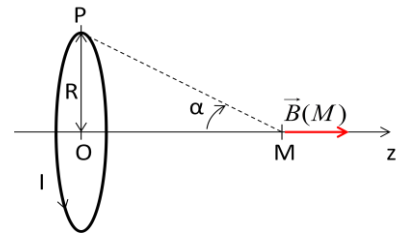
2.8.1.3.2 Calcul du champ magnétostatique

$$C = \oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_{\Gamma} B(r) \vec{e}_{\theta} \cdot r d\theta \vec{e}_{\theta} = B(r) \int_0^{2\pi} r d\theta = 2\pi r B(r) \quad \text{et} \quad I_{\text{int}} = +I$$

D'après le théorème d'Ampère : $2\pi r B(r) = \mu_0 I \Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_{\theta}$

2.8.2 Spire circulaire parcourue par un courant I

On considère une spire circulaire plate d'axe Oz de rayon R parcourue par un courant i. La bobine est contenue dans le plan xOy. Nous calculons ici le champ en un point M de l'axe de la spire. Le point M(r, θ, z) est repéré par ses coordonnées cylindriques.



2.8.2.1 Symétrie et invariance

Symétries :

Tout plan contenant l'axe Oz est plan d'antisymétrie de la distribution de courants.

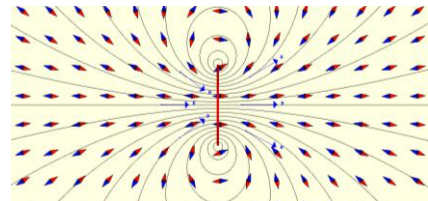
En tout point M, le champ magnétique est contenu dans le plan passant par M et contenant l'axe Oz :

$$\vec{B} = B_r(r, \theta, z)\vec{e}_r + B_z(r, \theta, z)\vec{e}_z$$

Invariances :

La distribution de courants étant invariante par rotation selon θ, on a : $\vec{B} = B_r(r, z)\vec{e}_r + B_z(r, z)\vec{e}_z$

Le plan xOy est plan de symétrie de la distribution de courants. Le champ magnétique est perpendiculaire à ce plan en tout point de xOy. De plus, xOy étant plan de symétrie, les composantes du champ sont des fonctions paires de z.



Simplification :

On cherche ici à calculer le champ magnétique sur l'axe de la spire qui fait partie des plans d'antisymétrie de la distribution de courant et de plus, r ne varie pas d'où : $\vec{B} = B_z(z)\vec{e}_z$

2.8.2.2 Loi de Biot et Savart

2.8.2.2.1 Champ magnétique élémentaire

Le champ magnétique élémentaire créé par la spire d'axe Oz et placée dans le plan (xOy) est donné par :

$$\left\{ \begin{array}{l} d\vec{l} = R d\theta \vec{e}_\theta \\ \vec{PM} = \vec{PO} + \vec{OM} = -R\vec{e}_r + z\vec{e}_z \end{array} \right. \Rightarrow d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{IR d\theta \vec{e}_\theta \wedge (-R\vec{e}_r + z\vec{e}_z)}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

En utilisant les propriétés de symétrie : $d\vec{B} \cdot \vec{e}_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{IR^2 d\theta}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$

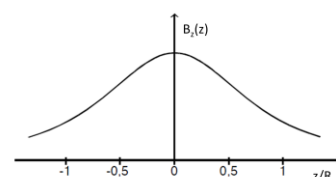
2.8.2.2.2 Intégration

L'expression du champ total créé par la spire en M s'obtient en intégrant l'expression du champ

$$\text{élémentaire sur toute la spire : } \vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi (R^2 + z^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} R^2 d\theta \vec{e}_z = \frac{\mu_0 I R^2}{2 (R^2 + z^2)^{3/2}} \vec{e}_z$$

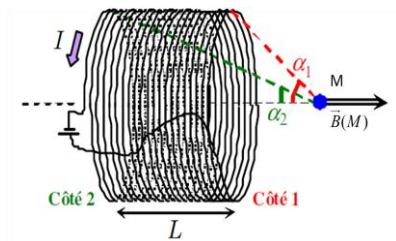
On peut aussi exprimer le champ magnétique en fonction de l'angle α entre $\vec{MO}$ et $\vec{MP}$, on obtient :

$$\sin \alpha = \frac{R}{(R^2 + z^2)^{1/2}} \Rightarrow \vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3 \alpha \vec{e}_z$$



2.8.3 Solénoïde circulaire parcouru par un courant I

On considère un solénoïde d'axe Oz et de centre O est de taille finie. Le solénoïde est constitué de spires jointives enroulées sur un cylindre : soit L sa longueur, R son rayon, N son nombre total de spires et n son nombre de spires par unité de longueur tel que $n = N/L$. Il est parcouru par un courant d'intensité I. Nous calculons ici le champ en un point M de l'axe du solénoïde. Le point M(r, θ, z) est repéré par ses coordonnées cylindriques.



2.8.3.1 Symétrie et invariance

Symétries :

Tout plan contenant l'axe Oz est plan d'antisymétrie de la distribution de courants.

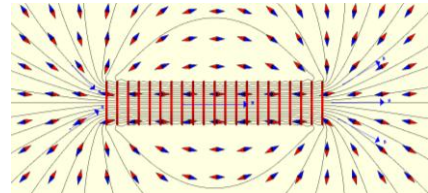
En tout point M, le champ magnétique est contenu dans le plan passant par M et contenant l'axe Oz :

$$\vec{B} = B_r(r, \theta, z)\vec{e}_r + B_z(r, \theta, z)\vec{e}_z$$

Invariances :

La distribution de courants étant invariante par rotation selon θ, on a : $\vec{B} = B_r(r, z)\vec{e}_r + B_z(r, z)\vec{e}_z$

Le plan xOy est plan de symétrie de la distribution de courants. Le champ magnétique est perpendiculaire à ce plan en tout point de xOy. De plus, xOy étant plan de symétrie, les composantes du champ sont des fonctions paires de z.



Simplification :

On cherche ici à calculer le champ magnétique sur l'axe du solénoïde qui fait partie des plans d'antisymétrie de la distribution de courant et de plus, r ne varie pas d'où : $\vec{B} = B_z(z)\vec{e}_z$

2.8.3.2 Loi de Biot et Savart

2.8.3.2.1 Champ magnétique élémentaire

Une tranche de solénoïde de longueur dz est équivalente à une bobine peu épaisse d'épaisseur dz et contenant dN spires : $dN = ndz$.

Elle produit en M un champ magnétique dirigé selon Oz et donné par :

$$d\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3 \alpha dN \vec{e}_z = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + z^2)^{3/2}} dN \vec{e}_z$$

En utilisant l'angle α : $\tan \alpha = \frac{R}{z} \Rightarrow z = R \cot \alpha \Rightarrow dz = -\frac{R}{\sin^2 \alpha} d\alpha$

$$d\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3 \alpha dN \vec{e}_z = \frac{\mu_0 n I}{2R} \sin^3 \alpha \left(-\frac{R}{\sin^2 \alpha} d\alpha \right) \vec{e}_z = -\frac{\mu_0 n I}{2} \sin \alpha d\alpha \vec{e}_z$$

2.8.3.2.2 Intégration

On intègre alors α de α₁ à α₂ : $\vec{B}(M) = -\frac{\mu_0 n I}{2} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin \alpha d\alpha \vec{e}_z = \frac{\mu_0 n I}{2} (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1) \vec{e}_z$

Pour le solénoïde infini, α₁ tend vers π et α₂ tend vers 0 d'où : $\vec{B} = \mu_0 n I \vec{e}_z$

2.8.3.3 Théorème d'Ampère

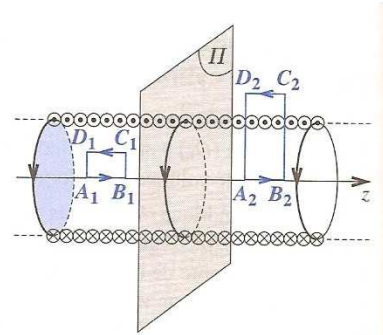
2.8.3.3.1 Symétrie et invariance

Cas du solénoïde infini :

Dans ce cas, les plans perpendiculaires à l'axe Oz (axe du solénoïde) sont plans de symétrie. En tout point M, le champ magnétique est donc normal au plan passant par M et perpendiculaire à l'axe du solénoïde. La distribution de courants ne dépend plus que de r. On en déduit l'expression générale du champ magnétique : $\vec{B} = B_z(r)\vec{e}_z$

2.8.3.3.2 Contour d'Ampère

Le contour d'Ampère permettant de déterminer l'expression du champ magnétique est un cadre ABCD dont un des côtés est placé sur l'axe Oz, de longueur l selon Oz.



2.8.3.3.3 Calcul du champ magnétostatique

La circulation sur les contours BC et DA est nulle car le champ magnétique est perpendiculaire du déplacement.

$$C = \oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_{\Gamma} B_z(r)\vec{e}_z \cdot dz\vec{e}_z = B_z(r=0) \int_A^B dz - B_z(r) \int_C^D dz = l(B_z(r=0) - B_z(r)) = l(\mu_0 nI - B_z(r))$$

Pour déterminer les courants enlacés par le contour d'Ampère, on distingue deux cas :

- $r < R$: le cadre est à l'intérieur du solénoïde ($A_1B_1C_1D_1$).

Il n'y a pas de courants enlacés et la circulation C est donc nulle. D'après le théorème d'Ampère, en tout point intérieur au solénoïde :

$$\mu_0 nI - B_z(r) = 0 \Rightarrow \vec{B} = \mu_0 nI \vec{e}_z$$

- $r > R$: le cadre chevauche le solénoïde ($A_2B_2C_2D_2$). $I_{\text{int}} = \int_0^l nI dz = nIl$

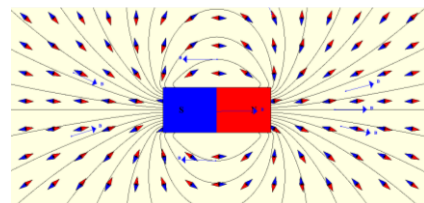
D'après le théorème d'Ampère, en tout point extérieur au solénoïde :

$$l(\mu_0 nI - B_z(r)) = \mu_0 nIl \Rightarrow \vec{B} = \vec{0}$$

Remarque :

Cas d'un aimant permanent

La distribution de courant et le champ produit loin de l'aimant sont alors équivalents à ceux d'un solénoïde.



2.9 Exemples de calcul de champ magnétostatique créée par des courants non filiformes

2.9.1 Cylindre parcouru par un courant volumique

Un cylindre infini de rayon R et d'axe Oz est parcouru par un courant volumique $\vec{j} = j_z \vec{e}_z$ ($j_z > 0$). On cherche à déterminer le champ magnétique en tout point.

Schéma

2.9.1.1 Symétrie et invariance

Symétries :

Le plan contenant l'axe Oz et le point M est plan de symétrie de la distribution de courant.

Le plan perpendiculaire à l'axe Oz et contenant le point M est plan d'antisymétrie de la distribution de courant.

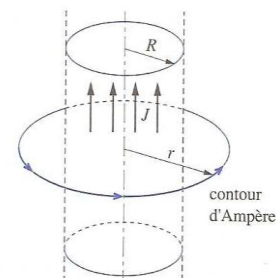
Invariances :

La distribution de courants étant invariante par translation selon z et rotation selon θ , on a :

$$\vec{B} = B_\theta(r) \vec{e}_\theta$$

2.9.1.2 Contour d'Ampère

On choisit un cercle d'axe Oz et de rayon r parcouru dans le sens trigonométrique.



2.9.1.3 Calcul du champ magnétostatique

$$C = \oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_{\Gamma} B(r) \vec{e}_\theta \cdot r d\theta \vec{e}_\theta = B(r) \int_0^{2\pi} r d\theta = 2\pi r B(r)$$

On a alors $I = \pi R^2 j_z$

Pour déterminer les courants enlacés par le contour d'Ampère, on distingue deux cas :

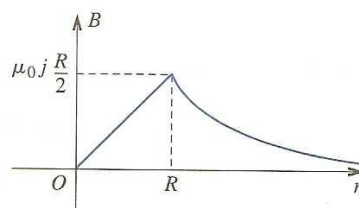
- $r > R$: le courant enlacé par le contour ne dépend pas de r . $I_{\text{int}} = \iint \vec{j} \cdot d\vec{S} = j_z \pi R^2$

D'après le théorème d'Ampère : $2\pi r B(r) = \mu_0 j_z \pi R^2 \Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 j_z R^2}{2r} \vec{e}_\theta$

- $r < R$: le courant enlacé par le contour dépend de r .

$$I_{\text{int}} = \iint \vec{j} \cdot d\vec{S} = \int_0^r \int_0^{2\pi} j_z \vec{e}_z \cdot r dr d\theta \vec{e}_z = j_z \pi r^2$$

D'après le théorème d'Ampère : $2\pi r B(r) = \mu_0 j_z \pi r^2 \Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 j_z r}{2} \vec{e}_\theta$



2.9.2 Cylindre parcouru par un courant surfacique

On peut envisager le cas où le courant ne circule pas en volume mais à la surface du cylindre de rayon R . On définit alors la densité de courant surfacique $\vec{j}_s = j_{s,z} \vec{e}_z$.

2.9.2.1 Symétrie et invariance

On a les mêmes symétries et invariances que précédemment.

2.9.2.2 Contour d'Ampère

On a la même circulation du champ B s'appuyant sur le même contour.

2.9.2.3 Calcul du champ magnétostatique

On a alors $I = 2\pi R j_{s,z}$.

Pour déterminer les courants enlacés par le contour d'Ampère, on distingue deux cas :

- $r > R$: le courant enlacé par le contour ne dépend pas de r .

$$I_{\text{int}} = \int \vec{j}_{s,z} \cdot d\vec{l} = \int_0^{2\pi} j_{s,z} \vec{e}_z \cdot R d\theta \vec{e}_z = j_{s,z} 2\pi R$$

D'après le théorème d'Ampère : $2\pi r B(r) = \mu_0 j_{s,z} 2\pi R \Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 j_{s,z} R}{r} \vec{e}_\theta$

- $r < R$: le courant enlacé par le contour est nul. $I_{\text{int}} = 0$

D'après le théorème d'Ampère : $\vec{B} = \vec{0}$

On peut noter la discontinuité du champ magnétique à la traversée d'une densité surfacique de courant.

2.9.3 Nappe parcourue par un courant volumique

On cherche à déterminer le champ magnétique créé par une plaque d'épaisseur e parcourue par une densité volumique de courant $\vec{j} = j_x \vec{e}_x$. Les densités de courants sont uniformes et orientées selon $\vec{e}_x$.

Schéma

2.9.3.1 Symétrie et invariance

Symétries :

La plaque d'épaisseur e , infinie selon Ox et Oy , est délimitée par les plans $z = e/2$ et $z = -e/2$:

Tous les plans parallèles à Oxz sont des plans de symétrie de la distribution de courant.

Tous les plans parallèles à Oyz sont des plans d'antisymétrie de la distribution de courant.

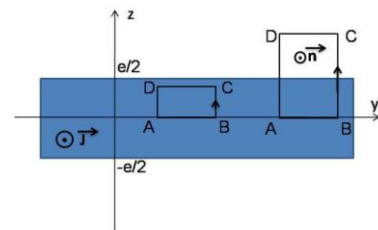
Invariances :

La distribution de courants étant invariante par translation selon x et y , on a : $\vec{B} = B_y(z) \vec{e}_y$

Au point $M'(x, y, -z)$, symétrique du point $M(x, y, z)$ par rapport au plan de symétrie Oxy , le champ magnétique est l'opposé du symétrique du champ magnétique au point M : la fonction $B_y(z)$ est impaire.

2.9.3.2 Contour d'Ampère

Le champ étant nul en $z = 0$, on choisit comme contour d'Ampère un rectangle ABCD de hauteur z et de longueur l contenu dans le plan Oyz .



2.9.3.3 Calcul du champ magnétostatique

La circulation du champ magnétique sur les côtés BC et DA est nulle car le champ magnétique est perpendiculaire à ces deux côtés. La circulation sur AB est également nulle puisque le champ magnétique est nul sur AB. Finalement, on obtient pour $z > 0$:

$$C = \oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_{\Gamma} B_y(z) \vec{e}_y \cdot dy \vec{e}_y = B_y(z) \int_C^D dy = -LB_y(z)$$

Pour déterminer les courants enlacés par le contour d'Ampère, on distingue deux cas :

- La hauteur z du cadre est supérieure à la demi épaisseur de la plaque ($z > e/2$)

$$I_{\text{int}} = \iint \vec{j} \cdot d\vec{S} = \int_0^L \int_0^{e/2} j_x \vec{e}_x \cdot dy dz \vec{e}_x = j_x \frac{Le}{2}$$

D'après le théorème d'Ampère : $-B_y(z)L = \mu_0 j_x \frac{Le}{2} \Rightarrow \vec{B} = -\frac{\mu_0 j_x e}{2} \vec{e}_y$

- La hauteur z du cadre est inférieure à la demi épaisseur de la plaque ($0 < z < e/2$)

$$I_{\text{int}} = \iint \vec{j} \cdot d\vec{S} = \int_0^L \int_0^z j_x \vec{e}_x \cdot dy dz \vec{e}_x = j_x Lz$$

D'après le théorème d'Ampère : $-B_y(z)L = \mu_0 j_x Lz \Rightarrow \vec{B} = -\mu_0 j_x z \vec{e}_y$

La fonction étant impaire, on obtient finalement :

$$\begin{cases} \vec{B} = -\mu_0 j_x z \vec{e}_y & \text{si } |z| < e/2 \\ \vec{B} = -\frac{\mu_0 j_x e}{2} \text{signe}(z) \vec{e}_y & \text{si } |z| > e/2 \end{cases}$$