

Cours V : Mécanique du solide

2 Théorèmes d'énergétique du solide

2.1 Energie cinétique

2.1.1 Définition

Définition :

L'énergie cinétique d'un solide par rapport à un référentiel (R), notée, $EC_{(R)}$, est la somme continue des énergies cinétiques élémentaires des volumes mésoscopiques qui constituent le solide :

$$EC_{(R)} = \frac{1}{2} \iiint_{\tau} \left(\vec{v}(M)_{(R)} \right)^2 dm \quad (1)$$

2.1.2 Mouvements possibles d'un solide

2.1.2.1 Translation

Un solide en translation a les mêmes éléments cinétiques par rapport à (R) qu'un point matériel fictif confondu avec le centre de masse, G, où serait concentrée toute la masse du système.

$$EC_{(R)} = \frac{1}{2} m \left(\vec{v}(G)_{(R)} \right)^2 \quad (2)$$

Démonstration :

$$EC_{(R)} = \frac{1}{2} \iiint_{\tau} \left(\vec{v}(M)_{(R)} \right)^2 dm = \frac{1}{2} \iiint_{\tau} \left(\vec{v}(G)_{(R)} \right)^2 dm = \frac{1}{2} m \left(\vec{v}(G)_{(R)} \right)^2$$

2.1.2.2 Rotation autour d'un axe fixe

Soit un solide (S) en rotation autour d'un axe fixe Δ à la vitesse angulaire Ω .

$$EC_{(R)} = \frac{1}{2} J_{\Delta} \omega^2 \quad (3)$$

Démonstration :

$$\begin{aligned} EC_{(R)} &= \frac{1}{2} \iiint_{\tau} \left(\vec{v}(M)_{(R)} \right)^2 dm = \frac{1}{2} \iiint_{\tau} \left(\vec{\Omega}_{(R_S/R)} \wedge \overrightarrow{OM} \right)^2 dm = \frac{1}{2} \iiint_{\tau} \left(\underbrace{\vec{\Omega}_{(R_S/R)} \wedge \overrightarrow{OH}}_{=0} + \overrightarrow{\Omega_{(R_S/R)} \wedge HM} \right)^2 dm \\ &= \frac{1}{2} \iiint_{\tau} \left[\overrightarrow{HM} \wedge \left(\vec{\Omega}_{(R_S/R)} \wedge \overrightarrow{HM} \right) \right] dm \cdot \vec{\Omega}_{(R_S/R)} = \frac{1}{2} \iiint_{\tau} \left[\left(\overrightarrow{HM} \cdot \overrightarrow{HM} \right) \vec{\Omega}_{(R_S/R)} - \underbrace{\left(\overrightarrow{HM} \cdot \vec{\Omega}_{(R_S/R)} \right) \overrightarrow{HM}}_{=0} \right] dm \cdot \vec{\Omega}_{(R_S/R)} \\ &= \frac{1}{2} \iiint_{\tau} HM^2 dm \left(\vec{\Omega}_{(R_S/R)} \cdot \vec{\Omega}_{(R_S/R)} \right) = \frac{1}{2} J_{\Delta} \Omega^2 \end{aligned}$$

2.2 Energétique des solides

2.2.1 Puissance et travail

2.2.1.1 Définitions

Définition :

Soit un solide (S) en mouvement par rapport à un référentiel (R) quelconque et soumis à un champ de forces. On appelle **puissance**, P, par rapport à (R) de cette action mécanique la somme continue des puissances par rapport à (R) des forces élémentaires s'exerçant sur (S) :

$$P_{(R)} = \iiint_{\tau} \vec{f}_v(M) \cdot \vec{v}(M)_{(R)} d\tau \quad (4)$$

Remarque :

Si une action est motrice alors $P > 0$. Si une action est résistante alors $P < 0$.

Définition :

On appelle **travail élémentaire**, δW , d'une action mécanique par rapport au référentiel (R) entre les instants t et t + dt : $\delta W = P dt$

On appelle **travail**, W, d'une action mécanique par rapport au référentiel (R) entre les instants t_1 et

$$t_2 : W_{1 \rightarrow 2} = \int_{t_1}^{t_2} P dt$$

2.2.1.2 Applications

2.2.1.2.1 Comoment

Soit (S) un solide en mouvement par rapport au référentiel (R) avec $\vec{\Omega}$ vecteur de rotation instantanée et soumis à une action mécanique de résultante R et de moment M_A .

$$\begin{aligned} P_{(R)} &= \iiint_{\tau} \vec{f}_v(M) \cdot \vec{v}(M)_{(R)} d\tau = \iiint_{\tau} \vec{f}_v(M) \cdot \left[\vec{v}(A)_{(R)} + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{AM} \right] d\tau \\ &= \iiint_{\tau} \vec{f}_v(M) d\tau \cdot \vec{v}(A)_{(R)} + \iiint_{\tau} \vec{f}_v(M) \cdot \left[\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{AM} \right] d\tau = \vec{R} \cdot \vec{v}(A)_{(R)} + \iiint_{\tau} \left[\overrightarrow{AM} \wedge \vec{f}_v(M) \right] d\tau \cdot \vec{\Omega} \\ &= \vec{R} \cdot \vec{v}(A)_{(R)} + \overrightarrow{M_A} \cdot \vec{\Omega} \end{aligned}$$

La puissance est égale au comoment du torseur des actions et du torseur cinématique :

$$P_{(R)} = \vec{R} \cdot \vec{v}(A)_{(R)} + \overrightarrow{M_A} \cdot \vec{\Omega} \quad (5)$$

2.2.1.2.2 Applications

Couple Γ appliqué à un solide : $\vec{R} = \vec{0} \Rightarrow P_{(R)} = \overrightarrow{M_A} \cdot \vec{\Omega} = \vec{\Gamma} \cdot \vec{\Omega}$

Glisseur F appliqué à un solide en B : $\overrightarrow{M_B} = \vec{0} \Rightarrow P_{(R)} = \vec{R} \cdot \vec{v}(B)_{(R)} = \vec{F} \cdot \vec{v}(B)_{(R)}$

Solide en translation : $\vec{\Omega} = \vec{0} \Rightarrow P_{(R)} = \vec{R} \cdot \vec{v}(G)_{(R)}$ et $\delta W = P dt = \vec{R} \cdot d\vec{OG}$

Solide en rotation autour d'un axe fixe Δ dirigé par $\vec{u}_\Delta$ et de vitesse angulaire Ω , B appartenant à Δ :

$$\vec{v}(B)_{(R)} = \vec{0} \Rightarrow P_{(R)} = \overrightarrow{M_B} \cdot \vec{\Omega} = M_\Delta \Omega \quad \text{et} \quad \delta W = M_\Delta d\theta$$

2.2.1.2.3 Puissance des forces intérieures

On suppose dans ce cours que l'on a à faire à un solide indéformable. Le torseur des actions mécanique intérieures au solide est donc nul. Par conséquent, la puissance des actions intérieures à un solide sera nulle.

2.2.2 Théorèmes de la puissance et de l'énergie cinétique

2.2.2.1 Théorème de la puissance cinétique

Soit un solide (S) en mouvement par rapport au référentiel (R). L'énergie cinétique vérifie :

$$\left(\frac{dEc_{(R)}}{dt} \right)_{(R)} = P_{ext_{(R)}} + P_{int} \quad (6)$$

Remarque :

Le solide étant considéré indéformable, la puissance des actions intérieures est nulle.

Si le référentiel est non galiléen, il faut rajouter les puissances des forces d'entraînement. La force d'inertie de Coriolis a une puissance nulle.

Le théorème de la puissance cinétique est applicable dans le référentiel barycentrique bien que ce référentiel ne soit pas a priori galiléen.

2.2.2.2 Théorème de l'énergie cinétique

Soit un solide (S) en mouvement par rapport au référentiel (R). L'énergie cinétique vérifie entre les instants t et t + dt et entre deux instants :

$$dEc_{(R)} = \delta W_{ext_{(R)}} + \delta W_{int} \quad \text{ou} \quad \Delta Ec_{(R)} = W_{ext_{(R)}} + W_{int} \quad (7)$$

2.2.3 Energie potentielle

2.2.3.1 Définition

Définition :

Une action mécanique appliquée à un solide (S) est conservative ou dérive d'une énergie potentielle Ep , si son travail entre deux états 1 et 2 du système ne dépend pas des positions intermédiaires :

$$\delta W = -dEp \quad \text{ou} \quad W_{1 \rightarrow 2} = Ep_1 - Ep_2$$

Remarque :

Cette définition est valable pour les actions extérieures comme intérieures.

L'énergie potentielle est définie à une constante près.

2.2.3.2 Exemples

Exemple :

poids (glisseur) tel que : $\vec{R} = m\vec{g}$ en G $\Rightarrow Ep = mgz + cte$

force de rappel d'un ressort (glisseur) tel que : $\vec{F} = -k(l - l_0)\vec{u}$ $\Rightarrow Ep = \frac{1}{2}k(l - l_0)^2 + cte$

action d'un fil de torsion (couple) tel que : $\vec{\Gamma} = -C(\theta - \theta_0)\vec{u}_\Delta$ $\Rightarrow Ep = \frac{1}{2}C(\theta - \theta_0)^2 + cte$

2.2.4 Energie mécanique

2.2.4.1 Définition

Définition :

L'énergie mécanique, Em , est la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle par rapport à un référentiel (R) : $Em_{(R)} = Ec_{(R)} + Ep_{(R)}$

2.2.4.2 Théorèmes de la puissance et de l'énergie mécanique

Soit un solide (S) en mouvement par rapport au référentiel (R). L'énergie mécanique vérifie :

$$\left(\frac{dEm_{(R)}}{dt} \right)_{(R)} = P_{(R)}(\text{actions non conservatives}) \quad (8)$$

$$dEm_{(R)} = \delta W_{(R)}(\text{actions non conservatives}) \quad \text{ou} \quad \Delta Em_{(R)} = W_{(R)}(\text{actions non conservatives})$$

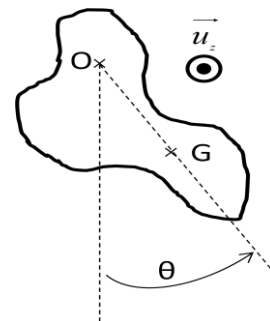
2.2.4.3 Système conservatif

Un système en mouvement dans le référentiel galiléen (R) est conservatif si toutes les actions mécaniques extérieures et intérieures appliquées à ce système sont conservatives, ou ont une puissance nulle : $Em_{(R)} = cte$

2.3 Solide en rotation autour d'un axe fixe

Exemple : pendule pesant

Soit un solide de masse m pouvant tourner autour d'un axe fixe en O dirigé suivant Oz . La liaison pivot est supposée parfaite. On désigne par J_{Oz} le moment d'inertie du solide par rapport à l'axe Oz , θ l'angle entre la verticale et la droite (OG), G le barycentre du solide. On note $OG = a$.



Théorème de la résultante cinétique : $m\vec{a}(G)_{(R)} = \vec{R}_{ext} = \vec{R}(\text{liaison}) + m\vec{g}$

Théorème du moment cinétique :

$$\left(\frac{dL_{Oz(R)}}{dt} \right)_{(R)} = M_{Oz,ext} = M_{Oz}(\text{liaison}) + (\overrightarrow{OG} \wedge m\vec{g}) \cdot \vec{u}_z = 0 - mga \sin \theta \Rightarrow J_{Oz} \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mga \sin \theta$$

Si on fait l'approximation des petites oscillations alors : $J_{Oz} \frac{d^2\theta}{dt^2} \approx -mga\theta$

On obtient des oscillations de période : $T = 2\pi \sqrt{\frac{J_{Oz}}{mga}}$

Théorème de l'énergie mécanique :

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{dEm_{(R)}}{dt} \right)_{(R)} &= P_{(R)}(\text{actions non conservatives}) = P(\text{liaison}) = \vec{R} \cdot \vec{v}(O)_{(R)} + \vec{M}_O \cdot \vec{\Omega} = 0 \\
 \left(\frac{dEm_{(R)}}{dt} \right)_{(R)} &= \left(\frac{d(Ec_{(R)} + Ep_{(R)})}{dt} \right)_{(R)} = \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} J_{Oz} \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] + \frac{d(mgx_G + cte)}{dt} \\
 &= \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} J_{Oz} \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] + \frac{d}{dt} [-mga \cos \theta + cte] = J_{Oz} \dot{\theta} \frac{d^2 \theta}{dt^2} + mga \dot{\theta} \sin \theta = 0 \\
 \Rightarrow J_{Oz} \frac{d^2 \theta}{dt^2} + mga \sin \theta &= 0
 \end{aligned}$$

On retrouve bien la même expression pour l'équation différentielle satisfaite par θ .

A retenir et savoir faire :

- Savoir exprimer l'énergie cinétique en fonction du mouvement du solide.
- Savoir exprimer la puissance, le travail des actions mécaniques
- Savoir utiliser les théorèmes de l'énergie cinétique et de l'énergie mécanique en fonction du mouvement du solide.