

Cours IV : Electrocinétique

3 Oscillateur quasi-sinusoidal

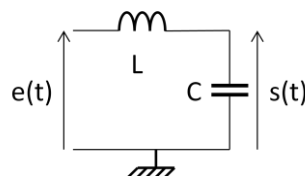
Les oscillateurs sont utilisés dans de nombreux circuits pour créer une tension périodique à partir d'alimentations continues. C'est la brique de base de tout circuit intégré électronique (montres digitales, horloge de microcontrôleur, ...). Sa fonction est en générale réalisée par un générateur basse fréquence (GBF) en travaux pratiques, mais peut aussi être réalisée par des circuits plus petits, transportables.

3.1 Retour sur l'oscillateur harmonique

3.1.1 Description

En électronique, l'oscillateur harmonique est le plus simplement réalisé d'une bobine d'inductance L et d'un condensateur de capacité C . Son équation différentielle se met sous la forme suivante, ce qui donne une tension aux bornes du condensateur sinusoïdale.

$$\ddot{s} + \omega_0^2 s = 0 \Rightarrow s(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) \text{ avec } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$



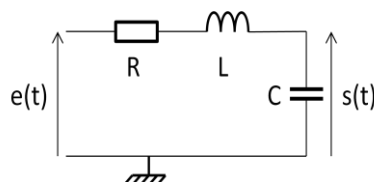
Il est donc possible en théorie d'arriver à générer une tension périodique sinusoïdale à partir d'une alimentation continue. En pratique, ces deux composants ne sont pas parfaits et possèdent des résistances parasites, qui mènent donc à l'étude de l'oscillateur amorti.

3.1.2 Oscillateur amorti

On peut ici considérer que la bobine possède une résistance série non nulle, on va donc étudier un circuit RLC série. Son équation différentielle se met sous la forme suivante, ce qui donne une tension aux bornes du condensateur qui dépend de la valeur des composants choisis. Cependant, pour une résistance faible, on peut supposer le facteur de qualité du circuit suffisamment important pour que l'on se trouve en régime pseudo-périodique.

$$\ddot{s} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{s} + \omega_0^2 s = 0 \text{ avec } Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$\Rightarrow s(t) = e^{-\lambda t} (A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)) \text{ avec } \lambda = \frac{\omega_0}{2Q} \quad \omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$$

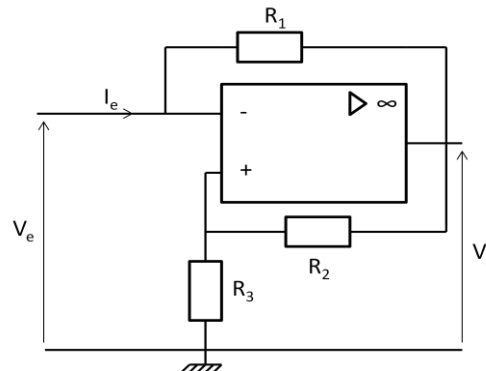


La tension est périodique et faiblement amortie. Pour éliminer totalement cet amortissement, il est nécessaire d'annuler la résistance totale R du circuit. Cela peut être réalisé par un dipôle équivalent à une résistance négative.

3.2 Oscillateur à résistance négative

3.2.1 Dipôle à résistance négative

Différents dipôles possèdent une partie de leur caractéristique (I, U) possédant une pente négative et peuvent donc être utilisés comme résistance négative. Nous allons ici étudier le cas d'un montage utilisant un amplificateur opérationnel idéal.



En régime linéaire :

$$|V_s| < V_{sat} \Rightarrow V_e - V_s = R_1 I_e \quad \text{et} \quad V^+ = \frac{R_3}{R_2 + R_3} V_s = V_e \Rightarrow V_e = -R_3 \frac{R_1}{R_2} I_e \Rightarrow I_e = -\frac{V_e}{R'}$$

En régime saturé :

$$V_s = V_{sat} \Rightarrow V_e - V_{sat} = R_1 I_e \Rightarrow I_e = \frac{V_e - V_{sat}}{R_1}$$

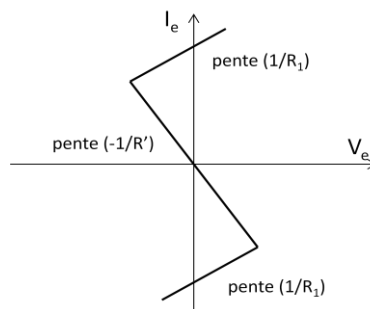
$$V_s = -V_{sat} \Rightarrow V_e + V_{sat} = R_1 I_e \Rightarrow I_e = \frac{V_e + V_{sat}}{R_1}$$

Il faut maintenant trouver la condition de saturation de l'amplificateur opérationnel :

$$|\mathcal{E}| = |V^+ - V^-| > 0 \Rightarrow \left| \frac{R_3}{R_2 + R_3} V_{sat} - V_e \right| > 0 \Rightarrow -\frac{R_3}{R_2 + R_3} V_{sat} < V_e < \frac{R_3}{R_2 + R_3} V_{sat}$$

$$\Rightarrow I_e < -\frac{R_2 V_{sat}}{R_1 (R_2 + R_3)} \quad \text{ou} \quad I_e > \frac{R_2 V_{sat}}{R_1 (R_2 + R_3)}$$

On a donc la caractéristique suivante (I_e, V_e) :



Dans le domaine de fonctionnement linéaire de l'amplificateur opérationnel, ce montage se comporte comme une résistance négative de valeur $-R'$.

3.2.2 Réalisation de l'oscillateur

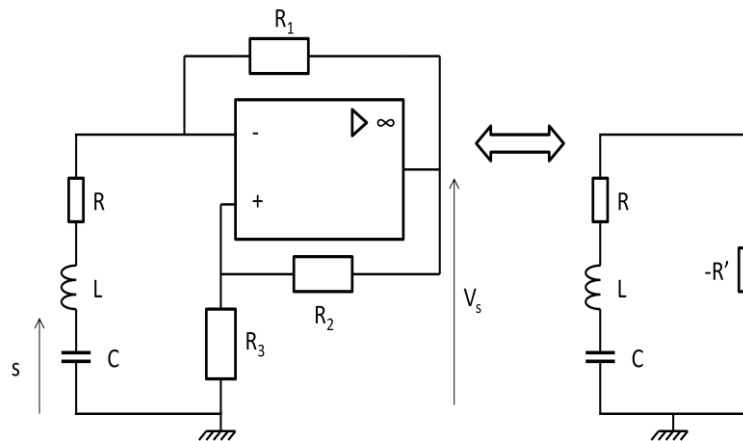
On branche en série le circuit RLC et le dipôle à résistance négative. L'équation différentielle dont la tension V_c est solution devient :

$$\ddot{s} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{s} + \omega_0^2 s = 0 \quad \text{avec} \quad Q = \frac{1}{R-R'} \sqrt{\frac{L}{C}} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{si } R > R' & s(t) = e^{-\lambda t} (A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)) \quad \text{avec} \quad \lambda = \frac{\omega_0}{2Q} > 0 \quad \omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} \\ \text{si } R = R' & s(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) \\ \text{si } R < R' & s(t) = e^{-\lambda t} (A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)) \quad \text{avec} \quad \lambda = \frac{\omega_0}{2Q} < 0 \quad \omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} \end{cases}$$

On peut donc envisager 3 cas :

- si $R > R'$: la tension aux bornes de C s'amortit
- si $R = R'$: la résistance totale du circuit est nulle et la tension est une fonction sinusoïdale du temps (cas difficilement réalisable)
- si $R < R'$: l'amplitude des oscillations croît au cours du temps, la non-linéarité des composants limitera leur amplitude et la tension est une fonction créneau entre $\pm V_{\text{sat}}$.

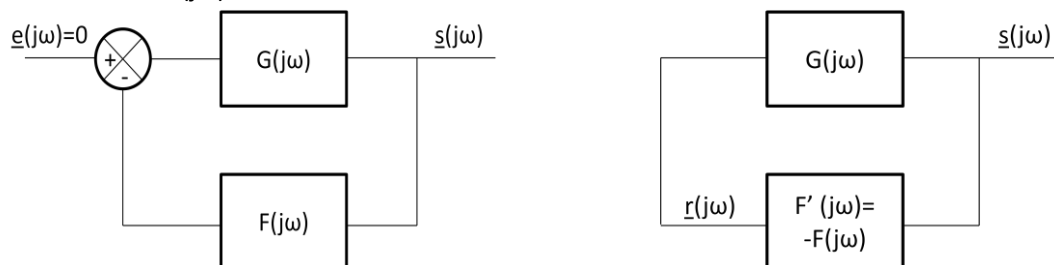


3.3 Oscillateur à réaction

3.3.1 Structure

Il s'agit d'un système bouclé qui génère un signal sinusoïdal en l'absence de signal d'entrée :

- la chaîne directe est constituée par un amplificateur (A), de fonction de transfert $G(j\omega)$
- la chaîne de retour est un filtre obtenu avec un quadripôle passif (B), de fonction de transfert $F(j\omega)$



3.3.2 Conditions d'oscillations

On suppose qu'à l'instant t , le signal $s(t)$ délivré par la chaîne directe est sinusoïdal. On utilise la notation complexe : $\underline{s} = s_m e^{j\omega t}$

Ce signal est filtré par la chaîne de retour (ou réaction) qui délivre :

$$\underline{r} = -F(j\omega) \underline{s} = |F'(j\omega)| s_m e^{j(\omega t + \text{Arg}[F'(j\omega)])}$$

Le signal est ensuite amplifié par la chaîne directe (ou d'action) qui fournit le signal $\underline{s}'$:

$$\underline{s}' = G(j\omega)\underline{r} = |G(j\omega)||F'(j\omega)|s_m e^{j(\omega t + \text{Arg}[F'(j\omega)] + \text{Arg}[G(j\omega)])}$$

L'entretien des oscillations, se traduit par $\underline{s} = \underline{s}'$ soit : $\underline{s}(1 - G(j\omega)F'(j\omega)) = 0$

Ceci impose : $G(j\omega)F'(j\omega) = 1$ et donc les deux conditions suivantes (**conditions de Barkhausen**) :

$$\begin{cases} |G(j\omega)||F'(j\omega)| = 1 \\ \text{Arg}[F'(j\omega)] + \text{Arg}[G(j\omega)] = 2n\pi \quad n \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad (1)$$

Pour modéliser l'apparition du signal il faut considérer qu'à un instant donné il apparaît une micro-tension dans le circuit.

Si le système est stable, le régime libre est transitoire et le micro-signal disparaît

Si le système est instable, deux situations peuvent se présenter :

- on observe une saturation permanente (état stable, domaine non-linéaire)
- on observe des oscillations (domaine non-linéaire sans état stable).

Pour distinguer ces deux situations, il faut observer le gain du système bouclé en régime permanent. On donne $G(0)$ et $F(0)$ les gains en régime permanent des deux fonctions de transfert. Soit S_{sat} la valeur du signal de sortie dans l'état de saturation atteint, cet état sera conservé si le gain de boucle est tel que : $-G(0)F(0)S_{\text{sat}} \geq S_{\text{sat}} \Rightarrow G(0)F'(0) \geq 1$

A contrario, un système instable oscillera si le gain de boucle en régime permanent satisfait la condition : $F'(0)G(0) < 1$

3.3.3 Oscillations quasi-sinusoïdales

On considère un circuit dont :

- la chaîne d'action est un amplificateur de fonction de transfert : $G(j\omega) = G_0$
- la chaîne de retour est un passe-bande de fonction de transfert :

$$F'(j\omega) = \frac{A_0}{1 + Q \left(\frac{j\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{j\omega} \right)}$$

Pour observer l'apparition des oscillations, il faut que $F'(0)G(0) < 1$, ce qui est vérifié car $F'(0)=0$.

Il faut aussi vérifier l'équation suivante :

$$\underline{s}(1 - G(j\omega)F'(j\omega)) = \underline{s} \left(1 - \frac{G_0 A_0}{1 + Q \left(\frac{j\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{j\omega} \right)} \right) = 0$$

Ceci est équivalent à l'équation différentielle suivante :

$$\frac{1}{\omega_0^2} \frac{d^2 s(t)}{dt^2} + \frac{1 - G_0 A_0}{Q} \frac{j\omega}{\omega_0} \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = 0$$

Pour obtenir l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique, il faut alors que :

- Q soit élevé
- $G_0 A_0 \geq 1$

Soit G_0 l'amplification de la chaîne directe et A_0 l'amplification maximale du passe-bande et Q son facteur de qualité alors :

- la condition d'oscillations est $G_0 A_0 > 1$
- la condition d'oscillations sinusoïdales est $G_0 A_0 = 1$ avec $Q \gg 1$

Alors f_0 , fréquence de résonance du filtre, est la fréquence des oscillations.