Cours VI : Electromagnétisme

5 Equations de Maxwell dans le vide

5.1 Principe de conservation de la charge

5.1.1 Densités de charges et courants

5.1.1.1 Distributions de charges

A l'échelle microscopique, les charges électriques peuvent être représentées par une distribution discrète (q), mais quand la distance entre les charges électriques devient très petite par rapport aux autres longueurs considérées, on préfère utiliser des densités de charges :

- la charge élémentaire dq contenue dans un volume élémentaire dτ centré en M devient la **densité volumique de charge** ρ(M,t) en $C.m^{-3}$: $\rho(M,t)=\frac{dq}{d\tau}$

- la charge élémentaire dq contenue dans une surface élémentaire dS centrée en M devient la **densité surfacique de charge** σ(M,t) en $C.m^{-2}$: $\sigma(M,t)=\frac{dq}{dS}$

- la charge élémentaire dq contenue dans une longueur élémentaire dl centrée en M devient la **densité linéique de charge** λ(M,t) en $C.m^{-1}$: $\lambda(M,t)=\frac{dq}{dl}$

5.1.1.2 Distributions de courants

Les courants circulant dans un matériau sont dus à un mouvement d'ensemble des charges :

- le **vecteur densité volumique de courant** $\vec{j}$ (en $A.m^{-2}$) associé à un mouvement d'ensemble d'une densité volumique de charges mobiles ρ_m à la vitesse $\vec{v}$ est : $\vec{j}=\rho_m\vec{v}$

- le **vecteur densité surfacique de courant** $\vec{j_s}$ (en $A.m^{-1}$) associé à un mouvement d'ensemble d'une densité surfacique de charges mobiles σ_m à la vitesse $\vec{v}$ est : $\vec{j_s}=\sigma_m\vec{v}$

L'intensité I du courant électrique à travers une surface S est liée à la charge δQ_m qui traverse S entre les instants t et t + δt : $\delta Q_m = I\delta t$

L'intensité du courant électrique traversant une surface S est égale au flux du vecteur densité volumique de courant $\vec{j}(M,t)$ à travers cette surface : $I=\iint \vec{j}(M,t)\cdot\vec{dS}$

L'intensité du courant électrique traversant une ligne L de A à B de la surface est égale à la circulation du vecteur densité surfacique de courant $\vec{j_s}(M,t)$ le long de cette ligne : $I_{AB}=\int_A^B \vec{j}_s(M,t)\cdot dl\vec{u}$

<u>Remarque</u> :

Il n'existe pas de densité linéique de courant.

La densité volumique de charges ρ ne s'identifie pas nécessairement à celle des charges mobiles ρ_m.

Un métal globalement neutre (ρ = 0) peut être le siège de courants créés par les déplacements des électrons de conduction.

5.1.2 Principe de conservation de la charge

Soit un volume fini V de l'espace délimité par une surface fermée S, à un instant t la charge contenue dans ce volume est : $Q(t)=\iiint_V \rho d\tau \quad \Rightarrow \quad \frac{dQ}{dt}(t)=\frac{d}{dt}\left(\iiint_V \rho d\tau\right)=\iiint_V \frac{\partial\rho}{\partial t}d\tau$

En utilisant la définition du courant : $\frac{dQ}{dt}(t)=I=-\oint\!\!\oint_S \vec{j}\cdot\overrightarrow{dS}$

La conservation de la charge électrique se traduit par l'équation intégrale : $\iiint_V \frac{\partial\rho}{\partial t}d\tau=-\oint\!\!\oint_S \vec{j}\cdot\overrightarrow{dS}$

Par le théorème de Green-Ostrogradsky : $\oint\!\!\oint_S \vec{j}\cdot\overrightarrow{dS}=\iiint_V \left(div\,\vec{j}\right)d\tau \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial\rho}{\partial t}=-div\,\vec{j}$

<u>Principe de conservation de la charge électrique</u> :
La charge électrique est une **grandeur conservative**. Ce principe se traduit par l'équation locale :

$$div\,\vec{j}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0 \tag{1}$$

5.2 Equations de Maxwell dans le vide

L'objet de l'électromagnétisme est de décrire les interactions qui s'exercent à l'intérieur d'un système de particules chargées. Le premier postulat est :

La force agissant sur une charge ponctuelle q située à l'instant au point M et animée d'une vitesse v où règne un champ électromagnétique $\{\vec{E},\vec{B}\}$ est donnée par la force de Lorentz :

$$\vec{F}=q\left(\vec{E}(M,t)+\vec{v}\wedge\vec{B}(M,t)\right) \tag{2}$$

5.2.1 Formes locales

Le **champ électromagnétique** est caractérisé par un couple de vecteurs noté $\{\vec{E},\vec{B}\}$ où $\vec{E}$ est le vecteur **champ électrique** (V.m^{-1}) et $\vec{B}$ est le vecteur **champ magnétique** (T).
Ce champ électromagnétique est créé au point M à l'instant t par la distribution $\{\rho,\vec{j}\}$. Il est régi par les quatre **équations de Maxwell dans le vide** :

- **Equation de Maxwell-Gauss** (MG):

$$div\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{3}$$

- **Equation de Maxwell-Ampère** (MA):

$$\overrightarrow{rot}\vec{B}=\mu_0\vec{j}+\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \tag{4}$$

- **Equation de Maxwell-Thomson** (ou flux) (MT):

$$div\vec{B}=0 \tag{5}$$

- **Equation de Maxwell-Faraday** (MF):

$$\overrightarrow{rot}\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \tag{6}$$

Remarque :

Les équations MG et MA expriment le lien entre le champ $\left\{\vec{E},\vec{B}\right\}$ et sa source $\left\{\rho,\vec{j}\right\}$.

Les équations de Maxwell forment un système d'équations couplées vis-à-vis des champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$.

Les équations de Maxwell sont linéaires par rapport aux sources $\left\{\rho,\vec{j}\right\}$. Le champ $\left\{\vec{E},\vec{B}\right\}$ obéit donc au théorème de superposition.

On retrouve l'équation locale de conservation de la charge :

$$div\left(\overrightarrow{rot}\vec{B}\right)=\mu_0 div\vec{j}+\mu_0\varepsilon_0 div\left(\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)\underset{MA}{=}\mu_0 div\vec{j}+\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial div\vec{E}}{\partial t}\underset{MG}{=}\mu_0 div\vec{j}+\mu_0\frac{\partial\rho}{\partial t}=0$$

Exercice : 5.6.1

5.2.2 Formes intégrales et interprétation

5.2.2.1 Equation de Maxwell-Gauss

L'équation de Maxwell-Gauss exprime la validité générale du théorème de Gauss :

$$div\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}\quad\Leftrightarrow\quad\oiint_{\Sigma}\vec{E}\cdot\overrightarrow{dS}=\frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_{V}\rho d\tau=\frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

5.2.2.2 Equation de Maxwell-Ampère

En régime permanent, on a introduit le théorème d'Ampère, ainsi que sa formulation locale :

$$\oint_{\Gamma}\vec{B}\cdot\overrightarrow{dl}=\mu_0 I_{\text{int}}\quad\Leftrightarrow\quad\overrightarrow{rot}\vec{B}=\mu_0\vec{j}$$

La conservation de la charge à partir de cette équation locale nous donne : $div\vec{j}=0$

Mais il y a contradiction avec la conservation de la charge en régime variable : $div\vec{j}=-\frac{\partial\rho}{\partial t}$

On introduit donc un courant fictif nommé densité de courant de déplacement $\overrightarrow{j_D}$ tel que :

$$\overrightarrow{rot}\vec{B}=\mu_0\left(\vec{j}+\overrightarrow{j_D}\right)\quad avec\quad\overrightarrow{j_D}=\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

Sa signification physique est la suivante : un champ électrique dépendant du temps est, au même titre qu'un courant, une source de champ magnétique.

L'équation de Maxwell-Ampère exprime la forme généralisée du théorème d'Ampère :

$$\overrightarrow{rot}\vec{B}=\mu_0\vec{j}+\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\quad\Leftrightarrow\quad\oint_{\Gamma}\vec{B}\cdot\overrightarrow{dl}=\mu_0\iint_{S}\left(\vec{j}+\overrightarrow{j_D}\right).\overrightarrow{dS}\quad avec\quad\overrightarrow{j_D}=\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

Exemple :

Considérons un condensateur au cours de sa charge (ou décharge), un courant traverse le condensateur. Cependant, entre ses deux armatures, aucun courant de conduction ne passe. Mais il existe un champ électrique variant dans le temps (donc de dérivée non nulle). On peut donc considérer que le passage du courant dans le condensateur lui est dû. C'est le courant de déplacement. Il est donc présente particulièrement dans les milieux non conducteurs.

5.2.2.3 Equation de Maxwell-Thomson

L'équation de Maxwell-Thomson exprime le caractère conservatif du flux magnétique en régime variable : $div\vec{B}=0\quad\Leftrightarrow\quad\oiint_{S}\vec{B}\cdot\overrightarrow{dS}=0$

5.2.2.4 *Equation de Maxwell-Faraday*

L'équation de Maxwell-Faraday exprime qu'un champ magnétique dépendant du temps donne naissance à un champ électrique à circulation non conservative. Cette équation rend compte du phénomène d'induction électromagnétique : $\overrightarrow{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Leftrightarrow \oint_C \vec{E}\cdot\vec{dl} = -\frac{d}{dt}\iint_S \vec{B}\cdot\vec{dS}$

En régime permanent, on retrouve bien le fait que le champ électrique est à circulation conservative.

5.3 Existence des potentiels $\left(\vec{A},V\right)$

5.3.1 Liens entre potentiels et champs

L'équation de Maxwell-Thomson assure l'existence d'un potentiel vecteur pour $\vec{B}$:

$$div\vec{B} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{B} = \overrightarrow{rot}\left(\vec{A}\right)$$

L'équation de Maxwell-Faraday donne :

$$\overrightarrow{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial \overrightarrow{rot}\vec{A}}{\partial t} = -\overrightarrow{rot}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{rot}\left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\overrightarrow{grad}V$$

Les équations de Maxwell-Thomson et de Maxwell-Faraday assurent l'existence d'un potentiel scalaire V et d'un potentiel vecteur $\vec{A}$ tel que :

$$\vec{B} = \overrightarrow{rot}\left(\vec{A}\right) \quad et \quad \vec{E} = -\overrightarrow{grad}V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \tag{7}$$

5.3.2 Non unicité des potentiels

Les potentiels ne sont pas uniques :
- un champ de rotationnel est défini à un gradient près
- un champ de gradient est défini à une constante près.

Soit $\left(\vec{A_0},V_0\right)$un couple de potentiel pour le champ électromagnétique $\left\{\vec{E},\vec{B}\right\}$; pour toute fonction scalaire φ des coordonnées d'espace et du temps, le couple $\left(\vec{A_0} + \overrightarrow{grad}\varphi, V_0 - \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)$ convient également.

5.4 Approximation des régimes quasi-stationnaires (ARQS)

5.4.1 Conditions de validité

Définition :
On appelle **approximation des régimes quasi-stationnaires** (ARQS) l'étude de l'électromagnétisme dans le cas où les temps de propagation sont négligeables devant la période des signaux.
Si l'on note τ le temps de propagation du signal et T la période, alors l'ARQS est applicable si $\tau \ll T$.

Exemple :
Lors de TP d'électrocinétique, la fréquence de signaux est en général inférieure à 1 MHz et les dimensions des circuits inférieures à 50 cm. La période est signaux est alors très supérieure aux temps de propagation : $T \gg \frac{d}{c} \quad \Leftrightarrow \quad 1\mu s \gg 1{,}5ns$

5.4.2 Equations de Maxwell dans le cadre de l'ARQS

Dans un **conducteur** et dans le cadre de **l'ARQS**, les équations de Maxwell s'écrivent :

$$
\begin{aligned}
&(MG) \quad div\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\
&(MA) \quad \overrightarrow{rot}\vec{B} = \mu_0 \vec{j} \\
&(MT) \quad div\vec{B} = 0 \\
&(MF) \quad \overrightarrow{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Dans les conducteurs, le courant de déplacement est négligeable devant le courant de conduction :

$$\left\| \overrightarrow{j_D} \right\| \ll \left\| \vec{j} \right\| \tag{9}$$

<u>Remarque</u> :

Les équations MA et MT sont les mêmes qu'en régime permanent, cela confirme que le champ magnétique est bien le même en régime permanent et dans le cas de l'ARQS.

Les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont toujours couplés (MF).

L'équation de conservation de la charge se simplifie en : $div\,\vec{j} = 0$

On retrouve la loi des nœuds que l'on utilise en électrocinétique.

<u>Exercice</u> : 5.6.2

5.4.3 Cas particulier des régimes stationnaires (ou permanents)

Dans le cadre des régimes stationnaires (ou permanents), les dérivées temporelles s'annulent. Les équations de Maxwell s'écrivent :

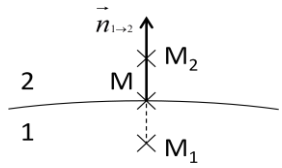
$$
\begin{aligned}
&(MG) \quad div\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\
&(MA) \quad \overrightarrow{rot}\vec{B} = \mu_0 \vec{j} \\
&(MT) \quad div\vec{B} = 0 \\
&(MF) \quad \overrightarrow{rot}\vec{E} = \vec{0}
\end{aligned}
\tag{10}
$$

<u>Remarque</u> :

Les équations précédentes sont découplées, il est possible d'étudier séparément le champ électrostatique $\vec{E}$ et le champ magnétostatique $\vec{B}$. On retrouve toutes les expressions étudiées en chapitres 1 et 2.

5.5 Relations de passage

Les relations de passage suivantes se substituent aux équations de Maxwell dans le cas d'une modélisation surfacique des sources.



A la traversée d'une nappe, séparant deux milieux 1 et 2, portant les charges σ et les courants surfaciques $\vec{j_s}$ le champ électromagnétique présente une discontinuité finie :

$$\vec{E}(M_2)-\vec{E}(M_1)=\frac{\sigma(M)}{\varepsilon_0}\vec{n}_{1\to 2}$$
$$\vec{B}(M_2)-\vec{B}(M_1)=\mu_0\vec{j_s}(M)\wedge\vec{n}_{1\to 2} \qquad (11)$$

Il y a toujours continuité de la composante tangentielle pour $\vec{E}$ et continuité de la composante normale pour $\vec{B}$. La composante normale de $\vec{E}$ et la composante tangentielle de $\vec{B}$ peuvent présenter une discontinuité en présence de charges ou de courants superficiels.

<u>A retenir et savoir faire :</u>

- Connaître les distributions de charges et de courants.
- Connaître la loi de la conservation de la charge
- Connaître les équations de Maxwell (formes locales et intégrales) en général, dans l'ARQS et en régime permanent.
- Connaître les conditions de validité de l'ARQS.
- Connaître les potentiels scalaires et vecteurs dérivés des champs.
- Connaître les relations de passage à une interface.