Cours VI : Electromagnétisme

6 Energie électromagnétique

6.1 Densité volumique d'énergie électromagnétique

6.1.1 Cas particulier du condensateur plan

On rappelle l'expression de la densité volumique d'énergie électrique, déjà démontrée en 1.4.4.

En électrocinétique, l'énergie stockée dans un condensateur est donnée par : $U_E = \frac{1}{2}Cu^2$

La capacité d'un condensateur plan se met sous la forme : $C = \varepsilon_0 \frac{S}{d} \quad \Rightarrow \quad U_E = \frac{\varepsilon_0}{2}\frac{S}{d}u^2$

La tension aux bornes du condensateur, u, est directement liée au champ électrique :

$$u = V_1 - V_2 = E_0 d \quad \Rightarrow \quad U_E = \frac{\varepsilon_0}{2} SdE_0^2$$

On en déduit la densité volumique d'énergie électrique donnée par : $u_E = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2}$

6.1.2 Cas particulier du solénoïde infini

On rappelle l'expression de la densité volumique d'énergie magnétique, déjà démontrée en 4.2.3.

En électrocinétique, l'énergie emmagasinée dans une bobine est donnée par : $U_M = \frac{1}{2}Li^2$

L'inductance d'un solénoïde infini se met sous la forme : $L = \mu_0 N^2 \frac{S}{l} \quad \Rightarrow \quad U_M = \frac{1}{2}\mu_0 N^2 \frac{S}{l} i^2$

Or, le courant traversant le solénoïde est directement lié au champ magnétique propre :

$$B_0 = \mu_0 \frac{N}{l} i \quad \Rightarrow \quad U_M = \frac{1}{2}\frac{B_0^2}{\mu_0} Sl$$

On en déduit la densité volumique d'énergie magnétique est donnée par : $u_M = \frac{B_0^2}{2\mu_0}$

6.1.3 Densité volumique d'énergie électromagnétique

Définition :

Les champs électrique et magnétique régnant dans une portion de l'espace vide entraînent la localisation d'une énergie dont la densité volumique, u ($J.m^{-3}$), s'écrit :

$$u = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0} \qquad (1)$$

6.2 Puissance volumique cédée par le champ aux porteurs de charge

6.2.1 Expression générale

Une charge q plongée dans le champ électromagnétique $\{\vec{E},\vec{B}\}$ est soumise à la force de Lorentz. Si la modélisation de la charge est volumique, de densité volumique de charges ρ, la force élémentaire exercée sur un volume dτ s'écrit : $\overrightarrow{dF} = \rho d\tau\left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}\right)$

La puissance dP reçue par la charge dans le volume dτ est donc :

$$dP = \vec{v} \cdot \overrightarrow{dF} = \vec{v} \cdot \rho d\tau \vec{E} = \rho \vec{v} \cdot \vec{E} d\tau = \vec{j} \cdot \vec{E} d\tau$$

<u>Définition</u> :
La densité volumique de puissance, p ($W.m^{-3}$), cédée par le champ électromagnétique aux porteurs de charge est donnée par :

$$p = \frac{dP}{d\tau} = \vec{j} \cdot \vec{E} \qquad (2)$$

6.2.2 Cas particulier d'un conducteur ohmique

6.2.2.1 Loi d'Ohm locale

<u>Loi d'Ohm locale</u> :
Dans de nombreux cas, si le champ appliqué est suffisamment faible alors le vecteur densité de courant et le vecteur champ électrique sont liés par une relation empirique :

$$\vec{j} = \gamma \vec{E} \qquad (3)$$

Avec : ϒ = Conductivité du milieu en $S.m^{-1}$

<u>Remarque</u> :
La conductivité est une grandeur toujours positive.

6.2.2.2 Densité volumique de puissance cédée par effet Joule

On considère un conducteur cylindrique parcouru par une intensité I uniformément répartie et de conductivité ϒ uniforme. Il est de section S et longueur L.

D'après la loi d'Ohm locale, la puissance volumique cédée aux porteurs de charge se met sous la forme : $p = \vec{j} \cdot \vec{E} = \gamma \vec{E} \cdot \vec{E} = \gamma E^2$

Ou encore : $p = \vec{j} \cdot \vec{E} = \vec{j} \cdot \frac{\vec{j}}{\gamma} = \frac{1}{\gamma} j^2 = \frac{1}{\gamma}\left(\frac{I}{S}\right)^2$

En intégrant sur le volume : $P = pSL = \frac{1}{\gamma}\left(\frac{I}{S}\right)^2 SL = \frac{L}{\gamma S} I^2 = RI^2$

<u>Propriété</u> :
La puissance dissipée par effet Joule s'identifie donc à la puissance cédée par le champ aux porteurs de charge du conducteur. Sa densité volumique de puissance se met sous la forme :

$$p = \gamma E^2 \qquad (4)$$

Remarque :
La puissance apportée aux porteurs de charge est donc toujours positive, ce qui signifie qu'elle est réellement apportée : le champ cède toujours de la puissance à la matière.
En régime permanent, cette puissance ne peut pas être emmagasinée par les porteurs de charge, ils la cèdent au réseau au cours des chocs inélastiques, et le réseau la cède à son tour à l'atmosphère par conduction thermique ou rayonnement : c'est l'effet Joule.

6.3 Bilan d'énergie électromagnétique

6.3.1 Equation de conservation de l'énergie électromagnétique

On utilise un raisonnement similaire à celui utilisé pour la conservation de la charge électrique. Soit un volume fini V de l'espace délimité par une surface fermée S, à un instant t l'énergie électromagnétique contenue dans ce volume est : $U = \iiint_V u\,d\tau = \iiint_V \left(\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0} \right) d\tau$

La diminution de cette énergie se retrouve sous deux formes :
- puissance cédée à la matière, P (ou aux porteurs de charges)
- puissance évacuée à travers S sous forme de rayonnement, $P_{\text{rayonnée}}$

Ainsi : $-\frac{dU}{dt} = P + P_{rayonnée} = \iiint_V \left(\vec{j} \cdot \vec{E} \right) d\tau + P_{rayonnée}$

L'équation intégrale de conservation de la charge se met sous la forme : $\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau = -\oiint_S \vec{j} \cdot \overrightarrow{dS}$

Par analogie, on écrira l'équation de conservation de l'énergie sous la forme :

$$-\frac{dU}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(\iiint_V u\,d\tau \right) = -\iiint_V \frac{\partial u}{\partial t} d\tau = \iiint_V \left(\vec{j} \cdot \vec{E} \right) d\tau + \oiint_S \vec{\Pi} \cdot \overrightarrow{dS}$$

Où $\vec{\Pi}$ est le vecteur densité de courant d'énergie.
On a donc l'équation intégrale de conservation de l'énergie électromagnétique suivante :

$$\iiint_V \frac{\partial u}{\partial t} d\tau = -\iiint_V \left(\vec{j} \cdot \vec{E} \right) d\tau - \oiint_S \vec{\Pi} \cdot \overrightarrow{dS}$$

En utilisant le théorème de Green-Ostrogradsky :

$$\oiint_S \vec{\Pi} \cdot \overrightarrow{dS} = \iiint_V \left(div\vec{\Pi} \right) d\tau \quad \Rightarrow \quad \iiint_V \frac{\partial u}{\partial t} d\tau = -\iiint_V \left(\vec{j} \cdot \vec{E} \right) d\tau - \iiint_V \left(div\vec{\Pi} \right) d\tau$$

On obtient l'équation locale : $\frac{\partial u}{\partial t} = -\vec{j} \cdot \vec{E} - div\vec{\Pi}$

Principe de conservation de l'énergie électromagnétique :
L'énergie électromagnétique est une grandeur conservative. Ce principe se traduit par l'équation locale :

$$div\vec{\Pi} + \frac{\partial u}{\partial t} + \vec{j} \cdot \vec{E} = 0 \quad (5)$$

Avec : Π = Vecteur densité de courant d'énergie appelé **vecteur de Poynting** en $W.m^{-2}$

6.3.2 Vecteur de Poynting

Définition :
Le vecteur densité de courant d'énergie ou **vecteur de Poynting** représente la densité surfacique de puissance rayonnée et s'écrit :

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \tag{6}$$

Démonstration :

On multiplie l'équation de Maxwell-Ampère par le champ électrique : $\overrightarrow{rot}\vec{B} \cdot \vec{E} = \mu_0 \vec{j} \cdot \vec{E} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \vec{E}$

On a l'identité suivante : $div\left(\vec{E} \wedge \vec{B}\right) = \vec{B} \cdot \overrightarrow{rot}\vec{E} - \vec{E} \cdot \overrightarrow{rot}\vec{B}$

Alors : $\vec{B} \cdot \overrightarrow{rot}\vec{E} - div\left(\vec{E} \wedge \vec{B}\right) = \mu_0 \vec{j} \cdot \vec{E} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \vec{E}$

D'après l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\vec{B} \cdot \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) - div\left(\vec{E} \wedge \vec{B}\right) = \mu_0 \vec{j} \cdot \vec{E} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \vec{E} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{B} \cdot \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \vec{E} = \mu_0 \vec{j} \cdot \vec{E} + div\left(\vec{E} \wedge \vec{B}\right)$$

$$\frac{1}{\mu_0} \vec{B} \cdot \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) - \varepsilon_0 \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{j} \cdot \vec{E} + \frac{1}{\mu_0} div\left(\vec{E} \wedge \vec{B}\right) \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0} + \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2\right) = \vec{j} \cdot \vec{E} + div\left(\frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}\right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \vec{j} \cdot \vec{E} + div\left(\frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}\right) = 0$$

On retrouve l'équation locale de conservation de l'énergie électromagnétique. Le vecteur de Poynting a donc pour expression : $\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$

Définition :
La puissance rayonnée, $P_{rayonnée}$, par le champ électromagnétique à travers une surface S est :

$$P_{rayonnée} = \oiint_S \vec{\Pi} \cdot \vec{dS} \tag{7}$$

6.3.3 Interprétation physique

L'équation de conservation de l'énergie électromagnétique est donnée par :

$$div\vec{\Pi} + \frac{\partial u}{\partial t} + \vec{j} \cdot \vec{E} = 0$$

Elle est composée de trois termes :

- Le premier terme correspond à la puissance rayonnée à travers la surface (S)
- Le second terme fait intervenir l'énergie électromagnétique contenue dans le volume (V)
- Le troisième terme correspond à la puissance cédée par le champ aux porteurs de charge.

On peut faire l'analogie avec un bilan de population :

- Le premier terme est analogue du flux migratoire par unité de temps (en comptant positivement l'émigration)

- Le second terme est analogue à la variation de population
- Le troisième terme est analogue au bilan naissances/décès par unité de temps (à condition de compter positivement les décès).

On a ainsi : $\Delta_{population} = -\left(décès - naissance\right) - émigration$

<u>Exemple</u> : Cas d'un conducteur ohmique

On considère un conducteur cylindrique parcouru par une intensité I uniformément répartie et de conductivité ϒ uniforme. Il est de section S, de longueur L et dirigé selon Oz. La puissance cédée aux porteurs de charge était due à l'effet Joule et égale à : $P = RI^2$

On cherche maintenant à calculer la puissance rayonnée. On a montré que le champ magnétique crée par un cylindre parcouru par un courant I était : $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\vec{e_\theta}$

D'après la loi d'Ohm locale : $\vec{E} = \frac{\vec{j}}{\gamma} = \frac{I}{\gamma S}\vec{e_z}$

Alors le vecteur de Poynting se met sous la forme : $\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{1}{\mu_0}\left(\frac{I}{\gamma S}\vec{e_z}\right) \wedge \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\vec{e_\theta} = -\frac{I^2}{2\pi\gamma S r}\vec{e_r}$

On constate que le vecteur de Poynting est radial et dirigé vers l'intérieur du cylindre. L'apport énergétique se fait latéralement. Or, la surface latérale du cylindre est donnée par 2πrL d'où :

$$P_{rayonnée} = \oiint_S \vec{\Pi} \cdot \vec{dS} = -\frac{I^2}{2\pi\gamma S r} 2\pi r L = -\frac{L}{\gamma S} I^2 = -RI^2$$

Donc la puissance entrant par rayonnement dans le cylindre est entièrement convertie en puissance transférée aux porteurs (ou effet Joule). Aucune énergie n'est stockée dans un conducteur ohmique. Ce résultat est bien celui attendu.

<u>A retenir et savoir faire :</u>

- Connaître l'expression de l'énergie électromagnétique et savoir la calculer.
- Connaître l'expression du vecteur de Poynting, savoir le calculer ainsi que son flux et connaître la signification physique de ce flux.
- Savoir faire un bilan d'énergie.