Cours VI : Electromagnétisme

7 Propagation d'ondes électromagnétiques dans le vide

7.1 Equations de propagation des champs électrique et magnétique dans une région sans charges ni courants

Dans le vide, en absence de charges et courants, on peut simplifier les équations de Maxwell tel que :

$$\begin{aligned} &(MG) \quad div\vec{E} = 0 \quad (MA) \quad \overrightarrow{rot}\vec{B} = \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ &(MT) \quad div\vec{B} = 0 \quad (MF) \quad \overrightarrow{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{aligned} \qquad (1)$$

Alors, pour le champ électrique, en utilisant l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\left.\begin{aligned} &\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}\vec{E}\right) = \overrightarrow{rot}\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) \\ &\overrightarrow{grad}\Big(\underbrace{div\vec{E}}_{0}\Big) - \vec{\Delta}\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\overrightarrow{rot}\vec{B}\right) \\ &\vec{\Delta}\vec{E} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) \end{aligned}\right\} \quad \vec{\Delta}\vec{E} - \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

Et pour le champ magnétique, en utilisant l'équation de Maxwell-Ampère :

$$\left.\begin{aligned} &\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}\vec{B}\right) = \overrightarrow{rot}\left(\mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) \\ &\overrightarrow{grad}\Big(\underbrace{div\vec{B}}_{0}\Big) - \vec{\Delta}\vec{B} = \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(\overrightarrow{rot}\vec{E}\right) \\ &\vec{\Delta}\vec{B} = \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) \end{aligned}\right\} \quad \vec{\Delta}\vec{B} - \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

Propriété :
Dans le vide, dans une région sans charges ni courants, les champs électrique et magnétique satisfont la même équation de propagation ou équation d'onde, appelée **équation de d'Alembert** :

$$\vec{\Delta}\vec{E} - \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \quad et \quad \vec{\Delta}\vec{B} - \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0} \qquad (2)$$

Remarque :
La grandeur $\mu_0\varepsilon_0$ est homogène à l'inverse d'une vitesse au carré. On l'appelle la célérité de l'onde ou la vitesse de propagation de l'onde. Dans le vide, est elle égale à : $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} = 3.10^8 m.s^{-1}$

L'onde électromagnétique se propage donc dans le vide à la vitesse de la lumière. On retiendra :

$$\mu_0\varepsilon_0 c^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \vec{\Delta}\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \quad et \quad \vec{\Delta}\vec{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0} \qquad (3)$$

Cette équation intervient souvent en physique : en électromagnétisme, en mécanique (cordes vibrantes), en acoustique (ondes sonores), en mécanique des fluides (phénomènes de houle), en électricité (lignes électriques), en thermodynamique (transferts de chaleurs), …

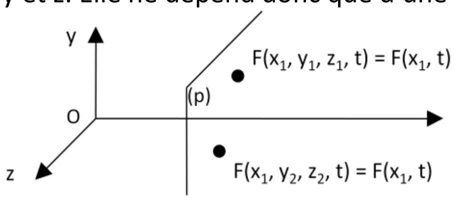
7.2 Structure de l'onde plane progressive transversale

7.2.1 Onde plane progressive (OPP)

Soit la fonction F décrivant la propagation d'une onde, elle est solution de l'équation d'onde (3).

Définition :
On dit qu'une onde est **plane** si, à chaque instant, la fonction F a la même valeur en tout point d'un plan perpendiculaire à une direction fixe définie par un vecteur unitaire $\vec{n}$ et appelée **direction de propagation**.

Exemple :
En coordonnées cartésiennes, la fonction F décrit une onde plane si, par exemple, elle se propage selon x et est indépendante de y et z. Elle ne dépend donc que d'une coordonnée, x et du temps, t.



Si F est une fonction scalaire, on peut alors simplifier l'équation d'onde sous la forme :

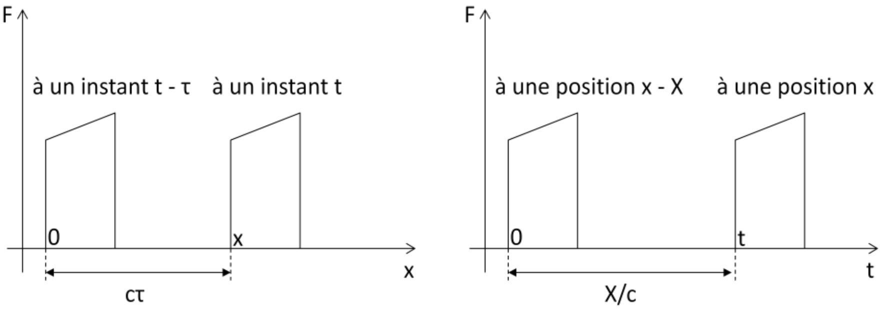
$$\Delta F - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = 0$$

Si F est une fonction vectorielle, on peut simplifier l'équation d'onde sous la forme :

$$\vec{\Delta}\vec{F} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{F}}{\partial t^2} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 F_x}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 F_x}{\partial t^2} = 0 \\ \frac{\partial^2 F_y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 F_y}{\partial t^2} = 0 \\ \frac{\partial^2 F_z}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 F_z}{\partial t^2} = 0 \end{cases}$$

Définition :
L'onde plane est de plus **progressive** quand le signal se propage dans un sens déterminé.

Exemple :
En coordonnées cartésiennes, l'onde plane précédente est progressive si elle se propage selon les x croissants. Supposons qu'elle se propage à la vitesse constante, c.



La durée de propagation entre 0 et x est de τ : $F(x,t) = F(0,t-\tau) = F\left(0,t-\dfrac{x}{c}\right)$

Ou bien entre 0 et t, l'onde se propage de x-X à x : $F(x,t) = F(x-X,0) = F(x-ct,0)$

Ce signal est donc déterminé par une fonction d'une seule variable : t-x/c ou x-ct.
Si le signal se propage suivant les x décroissants à la vitesse constante c, la variable devient x+ct.

7.2.2 Solution de l'équation de propagation

En reprenant l'exemple précédent, on vérifie ici qu'une solution de l'équation d'onde est du type :

$$F(x,t) = f(x+ct) + g(x-ct) \quad ou \quad F(x,t) = \phi\left(t-\frac{x}{c}\right) + \psi\left(t+\frac{x}{c}\right)$$

Posons $u = t - \dfrac{x}{c}$ $\quad et \quad$ $v = t + \dfrac{x}{c}$, alors :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{c} \quad \frac{\partial u}{\partial t} = 1 \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{c} \quad \frac{\partial v}{\partial t} = 1$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \phi}{\partial u} \quad et \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{1}{c}\frac{\partial \phi}{\partial u}\right) = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial \phi}{\partial u}\right).\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial u^2}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{c}\frac{\partial \psi}{\partial v} \quad et \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{c}\frac{\partial \psi}{\partial v}\right) = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial \psi}{\partial v}\right).\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial u} = -c\frac{\partial \phi}{\partial x} \quad et \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \phi}{\partial u}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial \phi}{\partial u}\right).\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial u^2}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial \psi}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial \psi}{\partial v} = c\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad et \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \psi}{\partial v}\right) = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial \psi}{\partial v}\right).\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2}$$

Alors : $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \dfrac{1}{c^2}\left(\dfrac{\partial^2 \phi}{\partial u^2} + \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial v^2}\right) \quad et \quad \dfrac{\partial^2 F}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \left(\dfrac{\partial^2 \phi}{\partial u^2} + \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial v^2}\right)$

Or, la fonction F doit vérifier l'équation d'onde :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2}\right) - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2}\right) = 0$$

Propriété :
Les solutions de l'équation de propagation unidimensionnelle selon x peuvent s'écrire comme la superposition de deux ondes planes progressives :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad F(x,t) = \phi\left(t-\frac{x}{c}\right) + \psi\left(t+\frac{x}{c}\right)$$

Remarque :

$\phi\left(t-\frac{x}{c}\right)$: propagation à la vitesse c suivant les x décroissants

$\psi\left(t+\frac{x}{c}\right)$: propagation à la vitesse c suivant les x croissants

Exercice : 7.8.1

7.2.3 Transversalité des champs

On suppose que les champs électrique et magnétique ne dépendent que de x et t et se propagent suivant x croissant, on a donc :

$$\vec{E}=\vec{E}\left(t-\frac{x}{c}\right)=\begin{pmatrix} E_x\left(t-\frac{x}{c}\right) \\ E_y\left(t-\frac{x}{c}\right) \\ E_z\left(t-\frac{x}{c}\right) \end{pmatrix} \quad et \quad \vec{B}=\vec{B}\left(t-\frac{x}{c}\right)=\begin{pmatrix} B_x\left(t-\frac{x}{c}\right) \\ B_y\left(t-\frac{x}{c}\right) \\ B_z\left(t-\frac{x}{c}\right) \end{pmatrix}$$

Dans une région sans charges, le champ électrique est à flux conservatif : $(MG) \quad div\vec{E}=0$

Alors : $\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}=0 \;\Rightarrow\; \frac{\partial E_x}{\partial x}=0 \quad or \quad \frac{\partial E_x}{\partial x}=-\frac{1}{c}\frac{\partial E_x}{\partial t}=0 \;\Rightarrow\; E_x=cte$

On suppose qu'il n'y a pas de champ statique, alors $E_x = 0$. Le champ électrique n'a pas de composantes suivant la direction de propagation, on dit que le champ est transverse.

De même, on a d'après l'équation de Maxwell-Thomson :

$$(MT) \quad div\vec{B}=0 \;\Rightarrow\; \frac{\partial B_x}{\partial x}=-\frac{1}{c}\frac{\partial B_x}{\partial t}=0 \;\Rightarrow\; B_x=cte=0$$

Propriété :
Les champs électrique et magnétique n'ont pas de composantes suivant la direction de propagation.
Les vecteurs sont perpendiculaires à la direction de propagation, on les qualifie de **transverses**.

D'après l'équation de Maxwell-Faraday, on a :

$$\overrightarrow{rot}\vec{E}=\begin{pmatrix} \frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial z}=0 \\ \frac{\partial E_x}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial x}=-\frac{\partial E_z}{\partial x} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}=\frac{\partial E_y}{\partial x} \end{pmatrix}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=\begin{pmatrix} -\frac{\partial B_x}{\partial t}=0 \\ -\frac{\partial B_y}{\partial t} \\ -\frac{\partial B_z}{\partial t} \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; -\frac{\partial E_z}{\partial x}=-\frac{\partial B_y}{\partial t}=c\frac{\partial B_y}{\partial x} \; et \; \frac{\partial E_y}{\partial x}=-\frac{\partial B_z}{\partial t}=c\frac{\partial B_z}{\partial x}$$

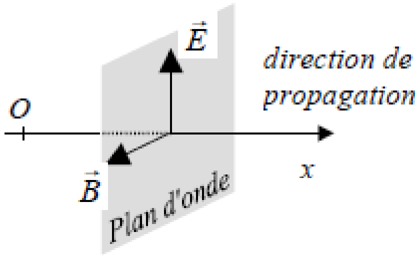
Alors, en intégrant : $E_z=-cB_y+cte=-cB_y \quad et \quad E_y=cB_z+cte=cB_z \;\Rightarrow\; \begin{pmatrix} 0 \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix}=\frac{1}{c}\begin{pmatrix} 0 \\ -E_z \\ E_y \end{pmatrix}$

On peut traduire ces deux expressions par une seule expression vectorielle :

$$\vec{B}=\frac{1}{c}\left(-E_z\overrightarrow{u_y}+E_y\overrightarrow{u_z}\right)$$

Propriété :
Pour une onde plane progressive (suivant Ox) les champs électrique et magnétique sont **transverses**. Ils forment avec la direction de propagation un trièdre direct.

$$\vec{B}\left(t-\frac{x}{c}\right)=\frac{1}{c}\vec{u}_x \wedge \vec{E}\left(t-\frac{x}{c}\right) \quad (4)$$



7.3 Cas particulier de l'onde plane progressive monochromatique (ou harmonique)

7.3.1 Définition et notation

Cas particulier : propagation selon x croissant

L'onde plane progressive monochromatique s'écrit sous la forme : $F(x,t)=F_0\cos\left(\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)+\varphi_0\right)$

La phase est définie par le terme en : $\phi=\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)+\varphi_0=\omega t-kx+\varphi_0$

On appelle vecteur d'onde : $\vec{k}=\frac{\omega}{c}\vec{u}_x=k\vec{u}_x$

On voit alors apparaître une double-périodicité de la phase :

- en fonction du temps :

Pour un x donné, la fonction F est une fonction sinusoïdale du temps de période T = 2π/ω

- en fonction de l'espace :

Pour un t donné, la fonction F est une fonction sinusoïdale de la coordonnée x de période spatiale, λ, appelée la longueur d'onde telle que : $\lambda=\frac{2\pi}{k}=\frac{c}{f}$

Exemple :
Pour une propagation selon les x croissants, le champ électrique s'écrit :

$$\vec{E}=\begin{cases} 0 \\ E_y=E_{0y}\cos\left(\omega t-kx+\varphi_{0y}\right) \\ E_z=E_{0z}\cos\left(\omega t-kx+\varphi_{0z}\right)\end{cases}$$

Définition :
Une onde plane progressive est dite **monochromatique** si c'est une fonction sinusoïdale de fréquence f (ou pulsation ω). Une OPPM (ou OPPH) se propageant à la célérité c selon la direction donnée par un vecteur unitaire $\vec{n}$ s'écrit sous la forme :

$$F(x,y,z,t)=F_0\cos\left(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{r}+\varphi_0\right) \quad (5)$$

La phase de l'OPPH est donnée par :

$$\phi = \omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_0 \quad (6)$$

Elle est caractérisée par : - sa **fréquence**, f, ou **pulsation**, ω :

$$\omega = 2\pi f \quad (7)$$

- son **vecteur d'onde**, k

$$\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda}\vec{n} = \frac{\omega}{c}\vec{n} \quad (8)$$

- sa **longueur d'onde**, λ, ou **nombre d'onde**, σ :

$$\lambda = \frac{c}{f} \quad et \quad \sigma = \frac{1}{\lambda} \quad (9)$$

Elle présente une double-périodicité temporelle de période T et spatiale de période λ.

Remarque :
Les termes F_0 et φ_0 sont des constantes. φ_0 est appelée phase à l'origine.
$\vec{r}$ représente le vecteur position tel que : $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z$ en coordonnées cartésiennes.

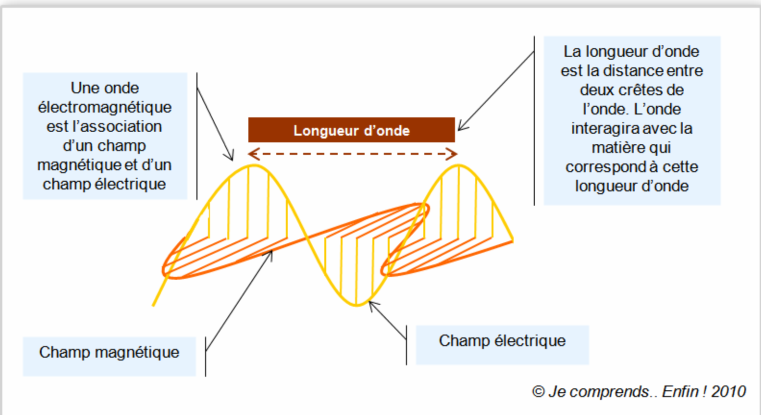
L'OPPH est un modèle. Il est très intéressant car toute onde plane peut être exprimée comme la somme d'OPPH. Une onde plane progressive harmonique représente donc la composante élémentaire d'un paquet d'ondes.

Les relations établies pour les OPP sont toujours valables pour les OPPH, en particulier :

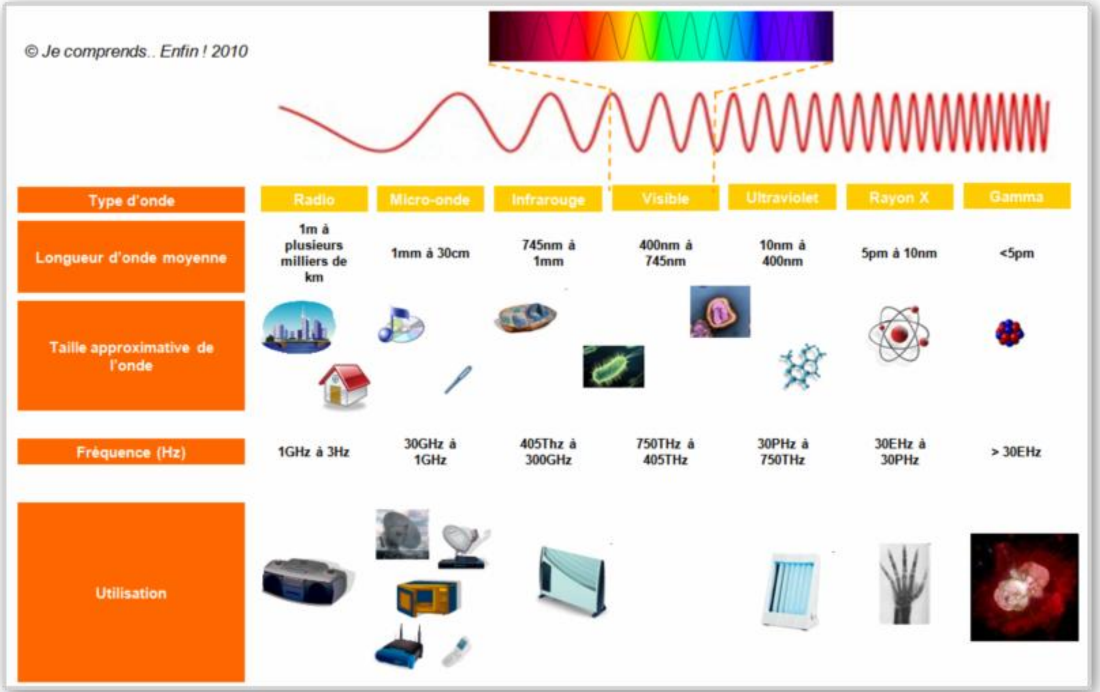
- les champs électrique et magnétique sont transverses
- on peut écrire d'après (4) : $\vec{B} = \frac{1}{c}\vec{n} \wedge \vec{E} = \frac{1}{\omega}\frac{\omega}{c}\vec{n} \wedge \vec{E} = \frac{1}{\omega}\vec{k} \wedge \vec{E}$: le trièdre $(\vec{k}, \vec{E}, \vec{B})$ est direct

$$\vec{B} = \frac{1}{\omega}\vec{k} \wedge \vec{E} \quad (10)$$

Exercice : 7.8.3



Quelques valeurs de fréquence et de longueur d'onde pour les ondes électromagnétiques :



7.3.2 Vitesse de phase

7.3.2.1 Dans le vide

A un instant t donné, la phase de l'OPPM est constante dans tout plan perpendiculaire au vecteur d'onde (et donc à la direction de propagation). Ces plans sont appelés **plans d'onde** ou **équiphases**. On recherche la vitesse à laquelle se déplacent ces plans dans le cas d'une propagation selon les x croissants :

$$\phi = cte \quad \Rightarrow \quad d\phi = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega dt - kdx = 0 \quad \Rightarrow \quad v_\varphi = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k} = \omega \Big/ \frac{\omega}{c} = c$$

<u>Définition</u> :
La vitesse de phase, v_φ, donne la vitesse de déplacement des plans équiphases selon :

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k} \qquad (11)$$

Pour une OPPM se propageant dans le vide, elle s'identifie à la vitesse c de propagation de l'onde :

$$v_\varphi = c$$

7.3.2.2 Dans un milieu diélectrique linéaire, homogène, isotrope (LHI), transparent

<u>Définition</u> :
On appelle **milieu diélectrique**, un milieu isolant où il n'y a pas de charges libres mais où des charges liées peuvent tout de même se déplacer légèrement. Ce milieu est de plus :

- **linéaire** : si ses propriétés obéissent à des équations linéaires
- **homogène** : si ses propriétés sont les mêmes en tout point
- **isotrope** : si ses propriétés sont les mêmes dans toutes les directions
- **transparent** : si aucune longueur d'onde n'est absorbée

Exemple :
Le verre est un milieu LHI transparent pour la lumière visible mais opaque pour les rayons infrarouges.

Dans un tel milieu, il faut remplacer la permittivité du vide ε_0 par la **permittivité du milieu** ε qui s'exprime en fonction de la permittivité relative ε_r : $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$

On a ainsi les **équations de Maxwell** suivantes :

$$(MG) \quad div\vec{E} = 0 \quad (MA) \quad \overrightarrow{rot}\vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$(MT) \quad div\vec{B} = 0 \quad (MF) \quad \overrightarrow{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Et les **équations de propagation** suivantes :

$$\vec{\Delta}\vec{E} - \mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \quad ou \quad \vec{\Delta}\vec{E} - \frac{\varepsilon_r}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

$$\vec{\Delta}\vec{B} - \mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0} \quad ou \quad \vec{\Delta}\vec{B} - \frac{\varepsilon_r}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

La **vitesse de propagation** de l'onde électromagnétique dans un tel milieu est alors définie par :

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}} \quad tel\ que \quad \vec{\Delta}\vec{E} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

Le **vecteur d'onde** est alors défini en fonction de cette vitesse de propagation : $k = \frac{\omega}{v} = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_r}$

Définition :
L'indice d'un milieu, n, est défini comme la racine carrée de la permittivité relative ε_r du milieu :

$$n^2 = \varepsilon_r \quad \Rightarrow \quad k = n\frac{\omega}{c} \tag{12}$$

Remarque :
On se place ici dans un milieu transparent, la permittivité du milieu ainsi que son indice sont donc réels. Dans un milieu LHI non transparent, ils possèdent une partie imaginaire qui caractérise l'absorption du milieu.
La partie réelle de l'indice du milieu est appelé **indice de réfraction** et est utilisé en optique. On peut alors définir la **vitesse de phase** comme :

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}} = \frac{c}{n} \tag{13}$$

L'indice de réfraction d'un milieu est supérieur à 1 alors la vitesse de phase égale à la vitesse de propagation de l'onde électromagnétique est toujours inférieur à la vitesse de propagation dans le vide, c.

7.3.3 Notation complexe

Nous avons montré que l'on pouvait mettre la fonction F représentant une OPPM sous la forme :

$$F = F_0 \cos\left(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} + \varphi_0\right)$$

Cette fonction peut être mise sous forme complexe telle que F=Re(<u>F</u>) : $\underline{F} = F_0 e^{j\omega t} e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}} e^{j\varphi_0}$

Ainsi, lorsque le champ électrique se propage suivant les x croissants, il peut se mettre sous la forme d'un champ complexe :

$$\underline{\vec{E}} = \begin{cases} 0 \\ \underline{E_y} = E_{0y} e^{j\omega t} e^{-jkx} e^{j\varphi_y} \\ \underline{E_z} = E_{0z} e^{j\omega t} e^{-jkx} e^{j\varphi_z} \end{cases}$$

Ou encore : $\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E_0}} e^{j(\omega t - kx)}$ *avec* $\underline{\vec{E_0}} = E_{0y} e^{j\varphi_y} \vec{u_y} + E_{0z} e^{j\varphi_z} \vec{u_z}$

On peut alors simplifier les équations de Maxwell en utilisant les propriétés suivantes :

$$\frac{\partial \underline{\vec{E}}}{\partial t} = j\omega \underline{\vec{E}} \quad \frac{\partial^2 \underline{\vec{E}}}{\partial t^2} = -\omega^2 \underline{\vec{E}} \quad \frac{\partial \underline{\vec{E}}}{\partial x} = -jk_x \underline{\vec{E}} \quad \frac{\partial^2 \underline{\vec{E}}}{\partial x^2} = -k_x^2 \underline{\vec{E}}$$

Ce qui donne pour les opérateurs différentiels sans faire aucune hypothèse sur le champ électrique :

$$div \underline{\vec{E}} = \frac{\partial \underline{E_x}}{\partial x} + \frac{\partial \underline{E_y}}{\partial y} + \frac{\partial \underline{E_z}}{\partial z} = -jk_x \underline{E_x} - jk_y \underline{E_y} - jk_z \underline{E_y} = -j\vec{k} \cdot \underline{\vec{E}}$$

$$\overrightarrow{rot} \underline{\vec{E}} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \underline{E_z}}{\partial y} - \dfrac{\partial \underline{E_y}}{\partial z} \\ \dfrac{\partial \underline{E_x}}{\partial z} - \dfrac{\partial \underline{E_z}}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \underline{E_y}}{\partial x} - \dfrac{\partial \underline{E_x}}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -jk_y \underline{E_z} + jk_z \underline{E_y} \\ -jk_z \underline{E_x} + jk_x \underline{E_z} \\ -jk_x \underline{E_y} + jk_y \underline{E_x} \end{pmatrix} = -j \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \underline{E_x} \\ \underline{E_y} \\ \underline{E_z} \end{pmatrix} = -j\vec{k} \wedge \underline{\vec{E}}$$

$$\vec{\Delta} \underline{\vec{E}} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 \underline{E_x}}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \underline{E_x}}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 \underline{E_x}}{\partial z^2} \\ \dfrac{\partial^2 \underline{E_y}}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \underline{E_y}}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 \underline{E_y}}{\partial z^2} \\ \dfrac{\partial^2 \underline{E_z}}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \underline{E_z}}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 \underline{E_z}}{\partial z^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k_x^2 \underline{E_x} - k_y^2 \underline{E_x} - k_z^2 \underline{E_x} \\ -k_x^2 \underline{E_y} - k_y^2 \underline{E_y} - k_z^2 \underline{E_y} \\ -k_x^2 \underline{E_z} - k_y^2 \underline{E_z} - k_z^2 \underline{E_z} \end{pmatrix} = -\left(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2\right) \begin{pmatrix} \underline{E_x} \\ \underline{E_y} \\ \underline{E_z} \end{pmatrix} = -k^2 \underline{\vec{E}}$$

Alors les équations de Maxwell se simplifient en :

$$\begin{bmatrix} (MG) & div\vec{E} = 0 \\ (MA) & \overrightarrow{rot}\vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ (MT) & div\vec{B} = 0 \\ (MF) & \overrightarrow{rot}\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} (MG) & -j\vec{k} \cdot \underline{\vec{E}} = 0 \\ (MA) & -j\vec{k} \wedge \underline{\vec{B}} = j\omega \mu_0 \varepsilon_0 \underline{\vec{E}} \\ (MT) & -j\vec{k} \cdot \underline{\vec{B}} = 0 \\ (MF) & -j\vec{k} \wedge \underline{\vec{E}} = -j\omega \underline{\vec{B}} \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\begin{matrix} (MG) \quad \vec{k} \cdot \underline{\vec{E}} = 0 \quad (MA) \quad \vec{k} \wedge \underline{\vec{B}} = -\dfrac{\omega}{c^2} \underline{\vec{E}} \\ (MT) \quad \vec{k} \cdot \underline{\vec{B}} = 0 \quad (MF) \quad \vec{k} \wedge \underline{\vec{E}} = \omega \underline{\vec{B}} \end{matrix}} \qquad (14)$$

La structure d'une OPPM s'en déduit immédiatement :

$$\begin{aligned}
&\vec{k}\cdot\underline{\vec{E}}=0 &&\Rightarrow \quad \vec{k}\ \textit{est perpendiculaire à}\ \underline{\vec{E}}\\
&\vec{k}\cdot\underline{\vec{B}}=0 &&\Rightarrow \quad \vec{k}\ \textit{est perpendiculaire à}\ \underline{\vec{B}}\\
&\vec{k}\wedge\underline{\vec{E}}=\omega\underline{\vec{B}} &&\Rightarrow \quad \vec{B}=\frac{\vec{k}}{\omega}\wedge\vec{E}
\end{aligned}$$

L'équation de propagation se met sous la forme :

$$\vec{k}\wedge\left(\vec{k}\wedge\underline{\vec{E}}\right)=\vec{k}\wedge\left(\omega\underline{\vec{B}}\right) \quad\Rightarrow\quad \underbrace{\left(\vec{k}\cdot\underline{\vec{E}}\right)}_{=0}\vec{k}-\left(\vec{k}\cdot\vec{k}\right)\underline{\vec{E}}=\omega\left(\vec{k}\wedge\underline{\vec{B}}\right)$$

$$-k^2\underline{\vec{E}}=\omega\left(-\frac{\omega}{c^2}\underline{\vec{E}}\right) \quad\Rightarrow\quad \left(k^2-\frac{\omega^2}{c^2}\right)\underline{\vec{E}}=\vec{0} \quad\Leftrightarrow\quad \Delta\vec{E}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=\vec{0}$$

Propriété :
Dans le vide, dans une région sans charges ni courants, le modèle de l'OPPH conduit à la **relation de dispersion** :

$$k=\frac{\omega}{c} \tag{15}$$

7.4 Etats de polarisation d'une onde plane progressive monochromatique

7.4.1 Polarisation elliptique

Définition :
La **polarisation** d'une OPPH est définie à partir de son vecteur $\vec{E}$, comme la nature de la courbe décrite par l'extrémité de $\vec{E}$ dans un plan d'onde. Par convention, l'observateur est supposé faire face au champ électromagnétique qui progresse donc vers lui.

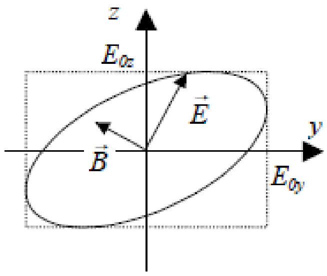
Pour une propagation selon les x croissants, il est commode de se placer dans le plan x = 0 et de décrire l'évolution du vecteur $\vec{E}$ dans ce plan. Les composantes du champ électrique sont alors :

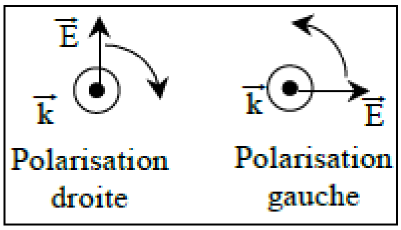
$$\vec{E}=\begin{cases} 0\\ E_y=E_{0y}\cos\left(\omega t+\varphi_y\right)\\ E_z=E_{0z}\cos\left(\omega t+\varphi_z\right)\end{cases}$$

En choisissant convenablement, une origine des temps, on peut se ramener aux expressions suivantes :

$$\vec{E}=\begin{cases} 0\\ E_y=E_{0y}\cos\left(\omega t\right)\\ E_z=E_{0z}\cos\left(\omega t-\varphi\right)\end{cases} \quad \textit{avec} \quad \varphi=\varphi_y-\varphi_z$$

On reconnait la représentation paramétrique d'une ellipse qui donne l'état de polarisation le plus général d'une OPPM.



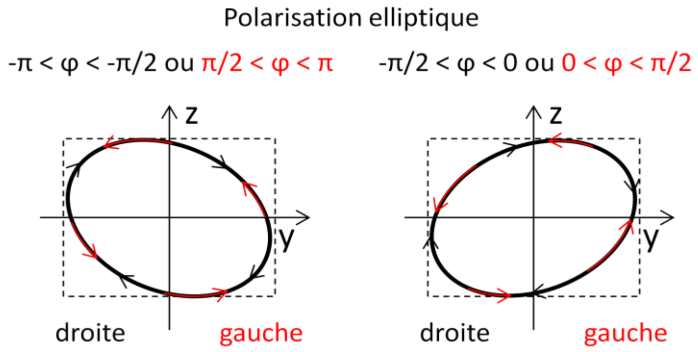


On peut alors chercher le sens de rotation sur l'ellipse. Il dépend de sinφ.

En effet : $E_y = E_{0y}\cos(\omega t)$ *est maximal pour* $t = 0\left[\dfrac{2\pi}{\omega}\right] \Rightarrow \left(\dfrac{\partial E_z}{\partial t}\right)_{t=0} = \omega E_{0z}\sin(\varphi)$

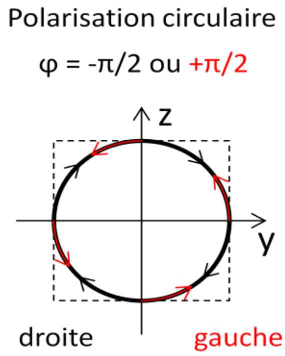
Donc si sinφ est positif : $\left(\dfrac{\partial E_z}{\partial t}\right)_{t=0} > 0 \Rightarrow E_z \nearrow$: on tourne dans le sens trigonométrique.

L'observateur voit l'extrémité du vecteur champ électrique parcourir l'ellipse dans le sens trigonométrique si sinφ est positif : la polarisation est dite elliptique gauche. A l'inverse, dans le sens horaire, la polarisation est dite elliptique droite.



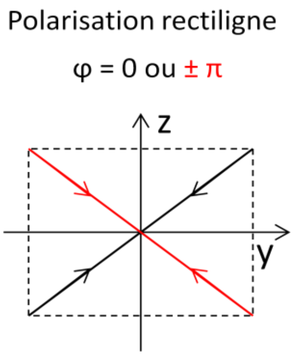
7.4.2 Polarisation circulaire

L'ellipse précédente devient un cercle si les vibrations sur les deux axes ont la même amplitude et sont en quadrature l'une par rapport à l'autre : $\varphi = \pm \pi/2$ et $E_{0y} = E_{0z}$



7.4.3 Polarisation rectiligne

L'ellipse précédente devient une droite si les vibrations sur les deux axes sont en phase ou en opposition de phase l'un par rapport à l'autre : $\varphi = 0$ ou π.



Remarque :

Une OPPH de polarisation elliptique quelconque peut toujours s'écrire comme la superposition de deux OPPH polarisées rectilignement suivant deux directions orthogonales. C'est la brique de base.

Exercice : 7.8.2

7.5 Réflexion sous incidence normale d'une OPPM sur un plan conducteur parfait

7.5.1 Modèle du conducteur parfait

Un milieu est dit conducteur si sous l'action d'un champ électrique, un courant de conduction se met en place. Le conducteur satisfait la loi d'Ohm locale dans une large gamme de fréquence ($f < 10^{14}$ Hz). Soit ϒ sa conductivité : $\vec{j} = \gamma \vec{E}$

Exemple :
Un bon conducteur comme le cuivre possède une conductivité de l'ordre de :

$$\gamma = 10^7\, S.m^{-1}$$

Définition :
Dans un conducteur parfait, la conductivité est très grande et on la considère infinie :

$$\gamma \to +\infty \quad \Rightarrow \quad \vec{E} \to \vec{0}, \quad \rho \to 0, \quad \vec{B} \to \vec{0}, \quad \vec{j} = \vec{0}$$

D'après l'équation de Maxwell-Gauss : $div\vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \rho = 0$

Mais rien n'empêche que des charges soient localisées en surface. A la surface du conducteur, on satisfait les relations de passages d'où : $\vec{E}_{surf} = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{n}_{1\to 2}$

D'après l'équation de Maxwell-Faraday : $\overrightarrow{rot}\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \vec{B}\ stationnaire$

Donc, pour un régime variable dans le temps : $\vec{B} \to \vec{0}$

Enfin, d'après l'équation de Maxwell-Ampère : $\overrightarrow{rot}\vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \vec{j} = \vec{0}$

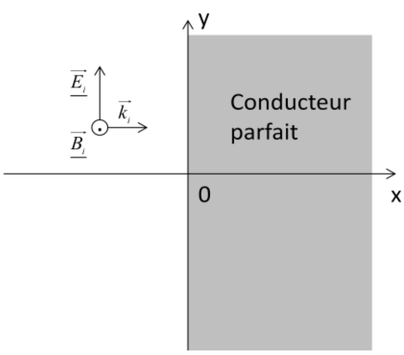
Mais rien n'empêche que des courants soient localisés en surface. A la surface du conducteur, on satisfait les relations de passages d'où : $\vec{B}_{surf} = \mu_0 \vec{j_s} \wedge \vec{n}_{1\to 2}$

Enfin, concernant la puissance volumique cédée aux porteurs de charge, on a : $p = \vec{j} \cdot \vec{E} = 0$

Il n'y a pas de pertes par effet Joule.

7.5.2 Onde incidente

Soit une onde électromagnétique incidente se propageant dans le vide dans une région sans charges ni courants selon l'axe Ox croissant dans le demi-espace x < 0. En x = 0, dans le plan Oyz, se trouve un conducteur parfait. Pour simplifier l'étude, on suppose l'onde polarisée rectilignement et sa phase à l'origine nulle. Le champ électromagnétique au voisinage du conducteur est la somme de l'onde incidente et de l'onde réfléchie.



En utilisant la notation complexe, l'onde incidente se met sous la forme :

$$\underline{\vec{E}_i} = E_{0i} e^{j(\omega t - k_i x)} \overrightarrow{u_y} \quad et \quad \underline{\vec{B}_i} = B_{0i} e^{j(\omega t - k_i x)} \overrightarrow{u_z} = \frac{\vec{k}_i}{\omega} \wedge E_{0i} e^{j(\omega t - k_i x)} \overrightarrow{u_y} = \frac{E_{0i}}{c} e^{j(\omega t - k_i x)} \overrightarrow{u_z}$$

7.5.3 Onde réfléchie

L'onde réfléchie s'écrit sous la forme :

$$\underline{\overrightarrow{E_r}} = E_{0r}e^{j(\omega t - k_r x)}\overrightarrow{u_y} \quad et \quad \underline{\overrightarrow{B_r}} = B_{0r}e^{j(\omega t - k_r x)}\overrightarrow{u_z} = \frac{\overrightarrow{k_r}}{\omega} \wedge E_{0r}e^{j(\omega t - k_r x)}\overrightarrow{u_y}$$

Que ce soit l'onde incidente ou l'onde réfléchie, les champs se propagent à la même vitesse dans le vide avec la même pulsation et possèdent donc le même module du vecteur d'onde. L'onde réfléchie se propage selon les x décroissants, on a donc :

$$\overrightarrow{k_r} = -\overrightarrow{k_i} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \underline{\overrightarrow{E_r}} = E_{0r}e^{j(\omega t + k_i x)}\overrightarrow{u_y} \\ \underline{\overrightarrow{B_r}} = -\dfrac{\overrightarrow{k_i}}{\omega} \wedge E_{0r}e^{j(\omega t + k_i x)}\overrightarrow{u_y} = -\dfrac{E_{0r}}{c}e^{j(\omega t + k_i x)}\overrightarrow{u_z} \end{cases}$$

Pour trouver les relations entre les amplitudes des champs incidents et réfléchis, il faut utiliser les relations de passage en x = 0. Le champ électrique étant nul dans le conducteur parfait, on a :

$$\left(\underline{\overrightarrow{E_r}}(x=0) + \underline{\overrightarrow{E_i}}(x=0)\right) - \vec{0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\left(-\overrightarrow{u_x}\right)$$

On retrouve donc la continuité de la composante tangentielle des champs électrique. De plus, ces champs sont transverses, ils n'ont donc pas de composante suivant la direction de propagation et donc :

$$\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\left(-\overrightarrow{u_x}\right) = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \underline{\overrightarrow{E_r}}(x=0) = -\underline{\overrightarrow{E_i}}(x=0)$$

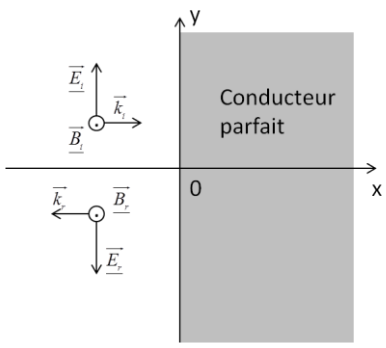
Le champ électrique est donc entièrement réfléchi avec un déphasage de π :

$$E_{0r}e^{j(\omega t)}\overrightarrow{u_y} = -E_{0i}e^{j(\omega t)}\overrightarrow{u_y} \quad \Rightarrow \quad E_{0r} = -E_{0i} \quad \Rightarrow \quad \underline{\overrightarrow{E_r}} = -E_{0i}e^{j(\omega t + k_i x)}\overrightarrow{u_y}$$

Alors, on a pour le champ magnétique : $\underline{\overrightarrow{B_r}} = -\dfrac{E_{0r}}{c}e^{j(\omega t + k_i x)}\overrightarrow{u_z} = \dfrac{E_{0i}}{c}e^{j(\omega t + k_i x)}\overrightarrow{u_z} = B_{0i}e^{j(\omega t + k_i x)}\overrightarrow{u_z}$

Soit pour une onde dont on ne connait pas la polarisation :

$$\begin{cases} \underline{\overrightarrow{E_i}} = \underline{\overrightarrow{E_{0i}}}e^{j(\omega t - k_i x)} \quad et \quad \underline{\overrightarrow{B_i}} = \dfrac{\overrightarrow{k_i}}{\omega} \wedge \underline{\overrightarrow{E_{0i}}}e^{j(\omega t - k_i x)} \\ \underline{\overrightarrow{E_r}} = -\underline{\overrightarrow{E_{0i}}}e^{j(\omega t + k_i x)} \quad et \quad \underline{\overrightarrow{B_r}} = \dfrac{\overrightarrow{k_i}}{\omega} \wedge \underline{\overrightarrow{E_{0i}}}e^{j(\omega t + k_i x)} \end{cases}$$



Propriété :
La réflexion d'une onde électromagnétique sous incidence normale sur un conducteur parfait est une réflexion totale avec un déphasage de π du champ électrique et un déphasage nul pour le champ magnétique. Il n'y a pas de charges surfaciques.

7.5.4 Superposition des ondes incidente et réfléchie

Pour l'onde polarisée rectilignement et de phase à l'origine nulle, la superposition des deux ondes incidentes et réfléchies donne :

$$\underline{\vec{E}} = \underline{\overrightarrow{E_i}} + \underline{\overrightarrow{E_r}} = E_{0i}e^{j(\omega t - k_i x)}\overrightarrow{u_y} - E_{0i}e^{j(\omega t + k_i x)}\overrightarrow{u_y} = E_{0i}e^{j(\omega t)}\left(e^{-j(k_i x)} - e^{j(k_i x)}\right)\overrightarrow{u_y} = -2jE_{0i}e^{j(\omega t)}\sin(k_i x)\overrightarrow{u_y}$$

D'où en notation réelle : $\vec{E} = 2E_{0i}\sin(\omega t)\sin(k_i x)\overrightarrow{u_y}$

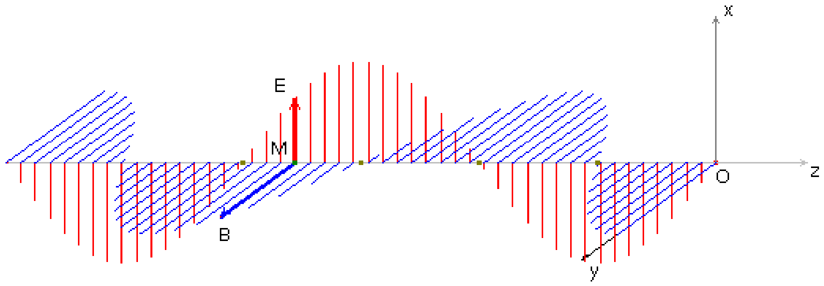
Et pour le champ magnétique :

$$\underline{\vec{B}} = \underline{\vec{B_i}} + \underline{\vec{B_r}} = \frac{\vec{k_i}}{\omega} \wedge E_{0i} e^{j(\omega t - k_i x)} \vec{u_y} + \frac{\vec{k_i}}{\omega} \wedge E_{0i} e^{j(\omega t + k_i x)} \vec{u_y} = \frac{\vec{k_i}}{\omega} \wedge \left(E_{0i} e^{j(\omega t)} \left(e^{-j(k_i x)} + e^{j(k_i x)} \right) \right) \vec{u_y}$$

$$= 2\frac{\vec{k_i}}{\omega} \wedge \left(E_{0i} e^{j(\omega t)} \cos(k_i x) \right) \vec{u_y} = 2\frac{\vec{u_x}}{c} \wedge \left(E_{0i} e^{j(\omega t)} \cos(k_i x) \right) \vec{u_y} = 2\frac{E_{0i}}{c} e^{j(\omega t)} \cos(k_i x) \vec{u_z}$$

D'où en notation réelle : $\vec{B} = 2\frac{E_{0i}}{c} \cos(\omega t) \cos(k_i x) \vec{u_z}$

Les dépendances spatiale et temporelle sont séparées : l'onde résultante est une onde stationnaire. Les champs électrique et magnétiques restent orthogonaux mais sont en quadrature spatiale et temporelle (déphasage de π/2).



En certains points (appelés nœuds de vibrations), le champ est toujours nul. Ainsi, pour le champ électrique : $\|\vec{E}\| = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin(k_i x) = 0 \quad \Rightarrow \quad k_i x_n = n\pi \quad n \in \mathbb{Z}$

Or, d'après la relation entre le vecteur d'onde et la longueur d'onde :

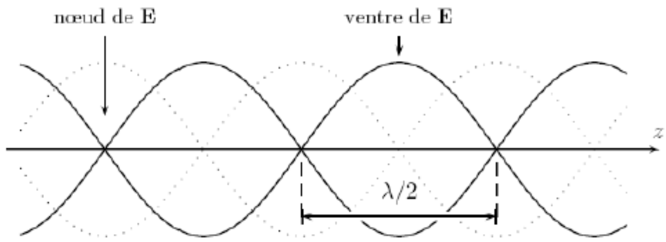
$$k_i = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad \frac{2\pi}{\lambda} x_n = n\pi \quad \Rightarrow \quad x_n = n\frac{\lambda}{2}$$

La distance entre deux nœuds successifs est λ/2.

En d'autres points (appelés ventres de vibrations), l'amplitude de vibration est maximale. Ainsi, pour le champ électrique : $\|\vec{E}\| = \max \quad \Rightarrow \quad \sin(k_i x) = \pm 1 \quad \Rightarrow \quad k_i x_v = (2n+1)\frac{\pi}{2} \quad n \in \mathbb{Z}$

$$\frac{2\pi}{\lambda} x_v = (2n+1)\frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad x_v = (2n+1)\frac{\lambda}{4}$$

La distance entre deux ventres successifs est λ/2 et la distance entre un nœud et un ventre successif est λ/4. Les nœuds du champ électrique sont les ventres du champ magnétique et vice-versa.



7.5.5 Courant surfacique

En utilisant les relations de passage en x = 0 pour le champ magnétique, on trouve :

$$\left(\underline{\vec{B_r}}(x=0)+\underline{\vec{B_i}}(x=0)\right)-\vec{0}=\mu_0\vec{j_s}\wedge\left(-\vec{u_x}\right) \Rightarrow \left(\frac{\vec{k_i}}{\omega}\wedge\underline{\vec{E_{0i}}}e^{j(\omega t)}+\frac{\vec{k_i}}{\omega}\wedge\underline{\vec{E_{0i}}}e^{j(\omega t)}\right)=\mu_0\vec{j_s}\wedge\left(-\vec{u_x}\right) \Rightarrow$$

$$2\frac{\vec{u_x}}{c}\wedge\underline{\vec{E_{0i}}}e^{j(\omega t)}=\mu_0\vec{u_x}\wedge\vec{j_s} \Rightarrow \vec{j_s}=\frac{2\underline{\vec{E_{0i}}}}{\mu_0 c}e^{j(\omega t)}$$

La réflexion d'une onde plane progressive monochromatique sous incidence normale sur un plan conducteur parfait induit ainsi un courant surfacique non nul de même direction que le champ incident. On rappelle que la charge surfacique est nulle.

7.6 Aspect énergétique

7.6.1 Densité volumique d'énergie électromagnétique

Le champ électromagnétique transporte une densité volumique d'énergie égale à :

$$u=\frac{1}{2}\varepsilon_0E^2+\frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0}$$

Or, d'après (4) : $\|\vec{B}\|=\frac{\|\vec{E}\|}{c} \Rightarrow u=\frac{1}{2}\varepsilon_0E^2+\frac{1}{2\mu_0}\left(\frac{E}{c}\right)^2=\frac{1}{2}\varepsilon_0E^2+\frac{1}{2}\varepsilon_0E^2=\varepsilon_0E^2$

La densité volumique d'énergie électromagnétique est équirépartie entre terme électrique et terme magnétique.

7.6.2 Puissance volumique cédée par le champ aux porteurs de charge

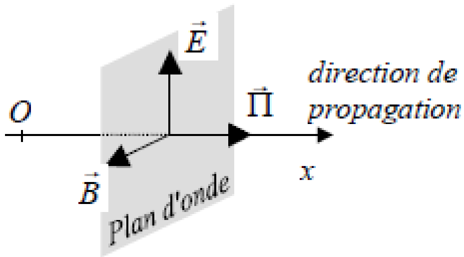
La puissance volumique cédée par le champ aux porteurs de charge est nulle car on se trouve dans une région sans charges ni courants.

7.6.3 Vecteur de Poynting

Le vecteur de Poynting s'écrit alors pour une OPP se propageant selon les x croissants:

$$\vec{\Pi}=\frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0}=\frac{\vec{E}\wedge\left(\frac{1}{c}\vec{u_x}\wedge\vec{E}\right)}{\mu_0}=\frac{1}{\mu_0 c}\vec{E}\wedge\left(\vec{u_x}\wedge\vec{E}\right)=\frac{1}{\mu_0 c}\left(\left(\vec{E}\cdot\vec{E}\right)\vec{u_x}-\underbrace{\left(\vec{E}\cdot\vec{u_x}\right)}_{=0}\vec{E}\right) \Rightarrow \vec{\Pi}=c\varepsilon_0E^2\vec{u_x}=cu\vec{u_x}$$

Le vecteur de Poynting est dirigé dans la direction de propagation de l'onde plane.



Le flux du vecteur de Poynting à travers une surface perpendiculaire à la direction de propagation est la puissance traversant cette surface : $P_{rayonnée}=\iint_S\vec{\Pi}\cdot\vec{dS}=\iint_S cu\vec{u_x}\cdot\vec{dS}=(cu)S=u(cS)$

L'énergie δU traversant cette surface S pendant la durée dt vaut donc : $\delta U=P_{rayonnée}dt=u(cSdt)$

δU représente donc l'énergie contenue dans un cylindre de base S et de hauteur dh = cdt, ce qui montre que l'énergie s'est propagée à la vitesse c.

Propriété :
Le vecteur de Poynting, représentant la densité surfacique de puissance rayonnée, est dirigé dans la direction de propagation de l'onde plane donnée par $\vec{n}$. Ainsi, l'énergie d'une OPP dans le vide se propage à la célérité, c.

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = c\varepsilon_0 E^2 \vec{n} = cu\vec{n} \qquad (16)$$

7.6.4 Retour sur la réflexion sous incidence normale d'une OPPM sur un plan conducteur parfait

Le vecteur de Poynting associé à l'onde incidente est : $\vec{\Pi_i} = c\varepsilon_0 E_i^2 \vec{u_x}$

Le vecteur de Poynting associé à l'onde réfléchie est : $\vec{\Pi_r} = -c\varepsilon_0 E_r^2 \vec{u_x} = -c\varepsilon_0 E_i^2 \vec{u_x}$

Toute l'énergie véhiculée par l'onde incidente se retrouve dans l'onde réfléchie. Le métal parfait ne dissipe pas d'énergie et la réfléchit totalement : c'est un miroir idéal.
En particulier, l'onde stationnaire résultante ne transporte pas d'énergie :

$$\vec{\Pi} = \frac{1}{\mu_0}\left(2E_{0i}\sin(\omega t)\sin(k_i x)\vec{u_y}\right) \wedge \left(2\frac{E_{0i}}{c}\cos(\omega t)\cos(k_i x)\vec{u_z}\right) = \frac{E_{0i}}{\mu_0 c}\sin(2\omega t)\sin(2k_i x)\vec{u_x}$$

$$\Rightarrow \quad \left\langle \vec{\Pi} \right\rangle = \vec{0}$$

Exercices : 7.8.3, 7.8.4

A retenir et savoir faire :
- Connaître les équations de Maxwell.
- Savoir démontrer les équations de propagation.
- Connaître le cas de l'onde plane progressive monochromatique (ou harmonique).
- Savoir les relations entre k, ω, λ, f, T, c, …
- Savoir calculer la vitesse de phase d'une onde et l'exprimer dans un milieu LHI.
- Savoir utiliser la notation complexe.
- Savoir faire un bilan énergétique d'une OPPM.
- Savoir déterminer l'état de polarisation d'une OPPM.
- Savoir déterminer le sens de parcours d'une ellipse.
- Savoir retrouver la structure de l'onde réfléchie dans le cas d'une réflexion sur un métal parfait.
- Savoir retrouver la structure de l'onde stationnaire dans le cas d'une réflexion sur un métal parfait.

7.7 Effet de peau (HP)

On s'intéresse maintenant au champ électromagnétique au sein d'un bon conducteur ohmique mais qui n'est plus parfait dans le cadre de l'ARQS. On peut alors négliger le courant de déplacement par rapport au courant de conduction. Comme précédemment, le conducteur occupe l'espace x > 0. Le courant surfacique précédent devient un courant volumique tel que : $\vec{j} = j_y(x,t)\overrightarrow{u_y}$

La densité volumique de charge dans le conducteur est toujours nul, on a donc les équations de Maxwell suivantes :

$$div\vec{E} = 0 \quad et \quad \overrightarrow{rot}\vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$
$$div\vec{B} = 0 \quad et \quad \overrightarrow{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

On a de plus la loi d'Ohm locale : $\vec{j} = \gamma \vec{E}$

Ainsi, en utilisant l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}\vec{E}\right) = \overrightarrow{rot}\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) \Rightarrow \underbrace{\overrightarrow{grad}\left(div\vec{E}\right)}_{=\vec{0}} - \vec{\Delta}\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\overrightarrow{rot}\vec{B}\right) \Rightarrow \vec{\Delta}\vec{E} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\mu_0 \vec{j}\right)$$

$$\Rightarrow \vec{\Delta}\vec{E} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\mu_0 \gamma \vec{E}\right) \Rightarrow \vec{\Delta}\vec{E} - \mu_0\gamma\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{0}$$

On trouve de la même manière les deux équations suivantes :

$$\vec{\Delta}\vec{B} - \mu_0\gamma\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0} \quad et \quad \vec{\Delta}\vec{j} - \mu_0\gamma\frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = \vec{0}$$

On recherche alors des solutions à ces équations de diffusion sous la forme :

$$\vec{E}(x,t) = E(x)\cos\left(\omega t - \phi(x)\right)\overrightarrow{u_y}$$
$$\vec{B}(x,t) = B(x)\cos\left(\omega t - \phi(x)\right)\overrightarrow{u_z}$$
$$\vec{j}(x,t) = j(x)\cos\left(\omega t - \phi(x)\right)\overrightarrow{u_y}$$

En utilisant la notation complexe, avec J²=-1, on a :

$$\underline{\vec{E}}(x,t) = \underline{E}(x)e^{-J\omega t}\overrightarrow{u_y} \quad \underline{\vec{B}}(x,t) = \underline{B}(x)e^{-J\omega t}\overrightarrow{u_z} \quad \underline{\vec{j}}(x,t) = \underline{j}(x)e^{-J\omega t}\overrightarrow{u_y}$$

Pour le champ électrique, l'équation de diffusion devient :

$$\vec{\Delta}\vec{E} - \mu_0\gamma\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{0} \Rightarrow \frac{\partial^2 E(x,t)}{\partial x^2} - \mu_0\gamma\frac{\partial E(x,t)}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 \underline{E}(x)}{\partial x^2} + J\omega\mu_0\gamma\underline{E}(x) = 0$$

La solution à cette équation est alors :

$$\underline{E}(x) = \alpha\exp\left(\sqrt{-J\omega\mu_0\gamma}x\right) + \beta\exp\left(-\sqrt{-J\omega\mu_0\gamma}x\right) = \alpha\exp\left(\sqrt{e^{-J\frac{\pi}{2}}\omega\mu_0\gamma x}\right) + \beta\exp\left(-\sqrt{e^{-J\frac{\pi}{2}}\omega\mu_0\gamma x}\right)$$

$$= \alpha\exp\left(e^{-J\frac{\pi}{4}}\sqrt{\omega\mu_0\gamma}x\right) + \beta\exp\left(-e^{-J\frac{\pi}{4}}\sqrt{\omega\mu_0\gamma}x\right) = \alpha\exp\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(1-J)\sqrt{\omega\mu_0\gamma}x\right) + \beta\exp\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}(1-J)\sqrt{\omega\mu_0\gamma}x\right)$$

$$= \alpha\exp\left((1-J)\sqrt{\frac{\omega\mu_0\gamma}{2}}x\right) + \beta\exp\left(-(1-J)\sqrt{\frac{\omega\mu_0\gamma}{2}}x\right)$$

On pose : $\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu_0\gamma}}$

On a alors :

$$\underline{E}(x,t)=\underline{E}(x)e^{-J\omega t}\overrightarrow{u_y}=\underbrace{\alpha e^{\frac{x}{\delta}}\exp\left(-J\left(\frac{x}{\delta}+\omega t\right)\right)}_{non\ physique}+\beta e^{-\frac{x}{\delta}}\exp\left(J\left(\frac{x}{\delta}-\omega t\right)\right)=\beta e^{-\frac{x}{\delta}}\exp\left(J\left(\frac{x}{\delta}-\omega t\right)\right)$$

En revenant à la grandeur réelle, on a : $\vec{E}(x,t)=E_0e^{-\frac{x}{\delta}}\cos\left(\omega t-\frac{x}{\delta}\right)\overrightarrow{u_y}$

De la même manière, on trouve :

$$\vec{j}(x,t)=j_0e^{-\frac{x}{\delta}}\cos\left(\omega t-\frac{x}{\delta}\right)\overrightarrow{u_y}\quad et\quad \vec{B}(x,t)=B_0e^{-\frac{x}{\delta}}\cos\left(\omega t-\frac{x}{\delta}-\frac{\pi}{4}\right)\overrightarrow{u_z}$$

Le terme en $\cos\left(\omega t-\frac{x}{\delta}\right)$ nous indique que l'onde se propage à la pulsation ω et la vitesse V = ωδ. La vitesse dépendant de la fréquence, on dit qu'il y a dispersion. Toutes les fréquences ne se propagent pas à la même vitesse.
La grandeur δ est homogène à une longueur et s'appelle l'épaisseur de peau. Cette épaisseur diminue avec la fréquence.

Le terme en $\exp\left(-\frac{x}{\delta}\right)$ nous indique que la propagation de l'onde s'accompagne d'une atténuation. Elle augmente avec la fréquence. A haute fréquence, l'onde ne propage qu'en surface du conducteur. On pourra alors adopter un modèle surfacique pour le courant.

Exemple : Cuivre

Fréquence υ	**Longueur d'onde λ**	**Epaisseur de peau δ**
50 Hz	6000 km	$9,3$ mm
1 kHz	300 km	$6,5$ mm
1 MHz	300 m	$0,21$ mm
1 GHz	30 cm	$6,5$ μm
1 THz	300 μm	$0,21$ μm