

Devoir Maison n°5

Durée : 2 heures

Instructions générales

Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction. La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non encadrés et non justifiés ne seront pas pris en compte.

Toute application numérique ne comportant pas d'unité ne donnera pas lieu à attribution de points.

Plusieurs parties des problèmes sont indépendantes. Elles peuvent être traitées dans l'ordre choisi par le candidat. Le candidat prendra soin de bien numéroter les questions.

Physique (au choix) :

Problème 1 (2 h) : Extrait CCP 2006

Problème 2 (2 h) : Extrait Centrale-Supélec 2011

Les calculatrices sont interdites.

N.B. : Si un candidat est appelé à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Ce sujet comporte deux problèmes indépendants qui portent sur des thèmes différents.

Chaque problème comporte plusieurs parties qui sont le plus souvent indépendantes les unes des autres.

Compte tenu des longueurs respectives des deux problèmes, il est conseillé au candidat de consacrer deux tiers de la durée de l'épreuve au premier problème et un tiers au deuxième problème.

PREMIER PROBLEME : Quelques effets des champs électriques et magnétiques...

Première partie : Préliminaires

1/ Donner l'expression de la force $\vec{f}$ qui s'exerce sur une particule de charge q se déplaçant à une vitesse $\vec{v}$ dans un référentiel galiléen lorsqu'elle est soumise simultanément à un champ électrique $\vec{E}$ et un champ magnétique $\vec{B}$.

2/ Action d'un champ magnétique :

En appliquant le théorème de l'énergie cinétique ou le théorème de la puissance cinétique, montrer qu'un champ magnétique $\vec{B}$ appliqué seul à une particule chargée ne peut pas lui communiquer d'énergie.

Deuxième partie : Accélération d'une particule soumise à un champ électrique

On se place en l'absence de champ magnétique et on négligera l'effet de la pesanteur sur la particule étudiée.

3./ Une particule de charge q est soumise à un champ électrique $\vec{E}$, stationnaire et uniforme, créé par deux plaques A et D parallèles et respectivement portées à un potentiel V_A nul et à un potentiel V_D non nul. La particule est initialement issue de la plaque A avec une vitesse nulle et se dirige vers la plaque D.

3.1/ Quel doit être le signe du potentiel V_D de la plaque D pour que la particule soit accélérée vers D dans le cas où la particule a une charge q négative ?

3.2/ Calculer en fonction de q , V_D et m , par rapport au référentiel d'étude considéré comme galiléen, la vitesse v_D de la particule lorsqu'elle atteint la plaque D.

3.3/ Citer quelques appareils dans lesquels on utilise un tel dispositif d'accélération de particules par un champ électrique.

3.4/ Quelle est l'énergie cinétique acquise par un électron (de charge $-e$) accéléré sous une différence de potentiel de 1V ? On exprimera le résultat en Joule et en électron-volt.

On donne : charge électrique élémentaire : $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C.

Troisième partie : Mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique

On étudie maintenant le mouvement d'une particule chargée de charge q et de masse m dans un champ magnétique $\vec{B}$ uniforme et stationnaire.

On se place dans un référentiel d'étude galiléen, rapporté à un repère orthonormé $Oxyz$.

Le champ magnétique $\vec{B} = B \vec{e}_z$ est dirigé suivant l'axe Oz (on considérera $B > 0$).

On considérera uniquement l'effet de la force magnétique et on négligera l'effet de la pesanteur.

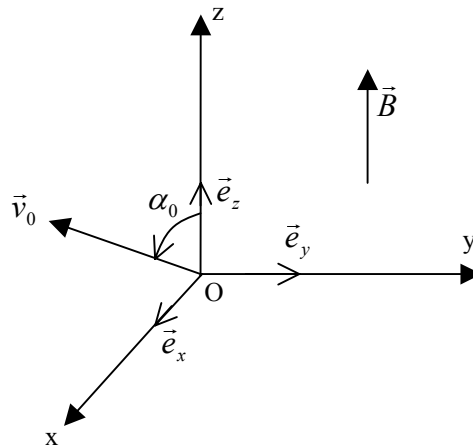
On pose : $\omega_0 = \frac{qB}{m}$.

4/ On se place dans un premier temps dans le cas où à l'instant initial ($t = 0$) la particule est à l'origine O du repère et la vitesse initiale de la particule est dirigée suivant l'axe Ox ($\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_x$ avec $v_0 > 0$).

4.1/ En prenant en compte les conditions initiales, montrer que la trajectoire de la particule est plane et contenue dans le plan Oxy .

4.2/ Montrer que le module de la vitesse de la particule est constant.

5/ On se place maintenant dans le cas où la vitesse initiale $\vec{v}_0$ fait un angle α_0 avec l'axe Oz et l'on choisit les deux axes Ox et Oy de telle façon que le vecteur $\vec{v}_0$ soit contenu dans le plan xOz .
 ($\vec{v}_0 = v_{0x}\vec{e}_x + v_{0z}\vec{e}_z$ avec $v_{0x} > 0$ et $v_{0z} > 0$).



5.1/ Par projection de l'équation vectorielle qui résulte de l'application du principe fondamental de la dynamique sur les trois axes du repère, déterminer les trois équations différentielles qui régissent les coordonnées x , y et z de la particule et leurs dérivées par rapport au temps.

5.2/ Dans deux des équations différentielles précédentes, les variables x et y sont couplées (x et y sont présentes simultanément dans chacune des deux équations).

Par intégration directe des équations différentielles couplées précédentes et en utilisant les conditions initiales, trouver une première équation liant $\frac{dx}{dt}$ et y et une deuxième équation liant $\frac{dy}{dt}$ et x .

5.3/ Dédire des deux questions précédentes les deux équations différentielles du second ordre découplées en x et en y .

5.4/ Par intégration des trois équations différentielles découplées en x , y et z , établir les équations horaires $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ (On détaillera le calcul pour chaque équation différentielle et notamment la prise en compte des conditions initiales).

5.5/ La trajectoire de la particule est une hélice : déterminer (en fonction de α_0 , ω_0 et v_0) son pas, le rayon du cylindre qui porte cette hélice ainsi que les coordonnées du point d'intersection de l'axe du cylindre qui porte l'hélice avec le plan Oxy .

Tracer l'hélice dans le cas où la charge q de la particule est positive, puis dans le cas où elle est négative. (Graphe à réaliser sur papier millimétré).

6/ Quel dispositif expérimental pourrait être utilisé pour créer un champ magnétique sensiblement uniforme dans un certain volume ? Décrire ce dispositif.

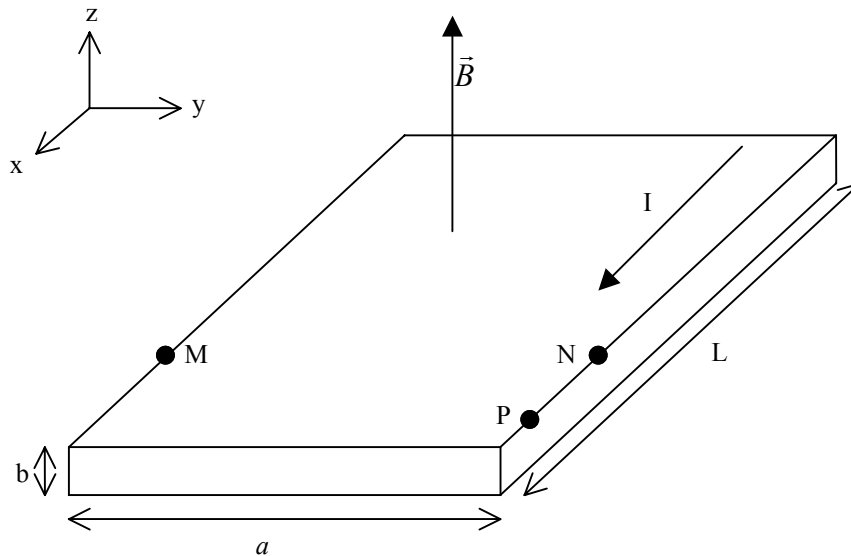
Citer des exemples d'applications utilisant de tels mouvements de particules chargées dans un champ magnétique.

Quatrième partie : Sonde à effet Hall : Mesure de champs magnétiques

Une plaquette conductrice parallélépipédique de longueur L , de largeur a et d'épaisseur b , est traversée dans le sens de la longueur par un courant continu d'intensité I . Les dimensions de la plaquette sont telles que $b \ll a$.

On note e la charge électrique élémentaire ($e > 0$).

On suppose que les porteurs de charge présents dans la plaquette sont des électrons, qu'ils ont tous la même vitesse $\vec{v}$ et qu'ils sont régulièrement répartis dans le conducteur.



La plaquette est plongée dans un champ magnétique $\vec{B} = B\vec{e}_z$ (avec $B > 0$) uniforme et permanent, orthogonal à la direction du courant et dirigé selon l'axe des z .

7/ Avant que le régime permanent ne soit atteint, les électrons qui arrivent dans la plaquette sont soumis à une force due à la présence du champ magnétique.

7.1/ Justifier de manière qualitative le fait qu'une des faces se chargera négativement alors que l'autre accumulera un défaut électronique et aura donc une charge positive.

7.2/ Refaire brièvement le schéma précédent et mentionner sur le schéma :

- la direction et le sens de la force magnétique $\vec{f}_{\text{magn}}$ qui s'exerce sur les électrons,
- les charges qui apparaissent sur les faces concernées,
- le champ électrique $\vec{E}_{\text{Hall}}$ (champ de Hall) qui apparaît du fait des charges surfaciques et qui agit à son tour sur les électrons de conduction.

8/ En plus des forces présentes en régime permanent et en l'absence de champ magnétique extérieur, lorsque le régime permanent est atteint les électrons sont soumis à une force magnétique due au champ $\vec{B}$ et à une force électrique due au champ électrique de Hall.

Que peut-on dire alors de la résultante de ces deux forces ?

9/ Exprimer, en régime permanent, la valeur du champ électrique de Hall E_{Hall} en fonction de I , B , b , a , de la valeur absolue de la charge de l'électron e et du nombre n de porteurs de charge par unité de volume.

On rappelle que l'intensité I traversant une surface (S) est donnée par :

$$I = \iint_{(S)} \vec{j} d\vec{S} = \iint_{(S)} nq\vec{v}d\vec{S}$$
 où q est la charge des porteurs de charge et $\vec{j}$ le vecteur densité volumique de courant.

10/ On mesure la différence de potentiel $V_{Hall} = V_{NM} = V_N - V_M$ (tension de Hall) entre deux points M et N situés sur les bords de la plaquette et sur une même perpendiculaire à Ox .
Déduire de la question précédente la valeur de V_{Hall} en fonction de B , I , n , e et b .

11/ On commet une erreur de positionnement du contact N lors de la mesure de la différence de potentiel. On mesure en fait la différence de potentiel $V_{PM} = V_P - V_M$ entre les points M et P tels que $NP = d$ (voir schéma).
On suppose que le matériau possède une conductivité γ et obéit à la loi d'Ohm locale.

11.1/ Déterminer la composante du champ électrique qui existe suivant la direction Ox en fonction de I , a , b et γ .

En déduire la différence de potentiel $V_{NP} = V_N - V_P$ qui existe entre les points N et P en fonction de I , a , b , d , γ .

En déduire enfin la différence de potentiel V_{PM} en fonction de I , a , b , d , γ et V_{Hall} .

11.2/ Ecrire l'expression de la différence de potentiel V_{PM} sous la forme $V_{PM} = V_{Hall}(1 - \varepsilon)$. Donner l'expression de ε en fonction de d , n , e , B , γ et a .

Les dimensions de la plaquette étant fixées, indiquer, en raisonnant sur ε , comment minimiser la différence entre la tension V_{PM} mesurée et la tension de Hall $V_{Hall} = V_{NM}$?

12/ Etude de l'influence de la direction du champ magnétique étudié

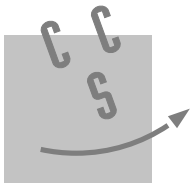
On se place maintenant entre les points M et N du schéma, mais le champ magnétique n'est plus dirigé suivant $\vec{e}_z$.

12.1/ Que devient l'expression de la tension de Hall (question 10) lorsque le champ magnétique $\vec{B} = B\vec{e}_y$ est dirigé suivant l'axe Oy ?

12.2/ Que devient la tension de Hall lorsque le champ magnétique $\vec{B} = B\vec{e}_x$ est dirigé suivant l'axe Ox ?

12.3/ En déduire la direction que doit avoir le champ magnétique pour que son intensité puisse être mesurée avec la sonde de Hall.

13/ Citer des applications possibles de l'effet Hall.



Les résultats numériques seront donnés avec un nombre de chiffres significatifs compatible avec celui utilisé pour les données.

À propos du champ magnétique

Dans notre environnement, de nombreux capteurs utilisent les propriétés du champ magnétique dans leur fonctionnement. Ce problème propose l'étude ou la mesure d'effets magnétiques.

- La première partie concerne le champ magnétique et ses propriétés.
- La deuxième partie montre un exemple d'application de l'effet Hall.
- La troisième partie s'intéresse au principe de la variation d'impédance due aux courants de Foucault dans une bobine parcourue par un courant variable dans laquelle on introduit un tube conducteur.

Ces trois parties sont indépendantes.

I Généralités sur le champ magnétique

I.A – Les propriétés du champ magnétique

I.A.1) Le champ magnétique est dit à flux conservatif. Écrire cette propriété sous forme locale, puis sous forme intégrale. Indiquer ce que cela signifie concrètement.

La figure 1 donne quatre cartes de champ qui représentent une coupe dans un plan perpendiculaire à l'axe Oz d'un champ de vecteur $\vec{A}$, invariant par translation suivant l'axe Oz . Parmi les cartes de champ proposées ci-dessous, lesquelles sont vraisemblablement celles d'un champ à flux conservatif?

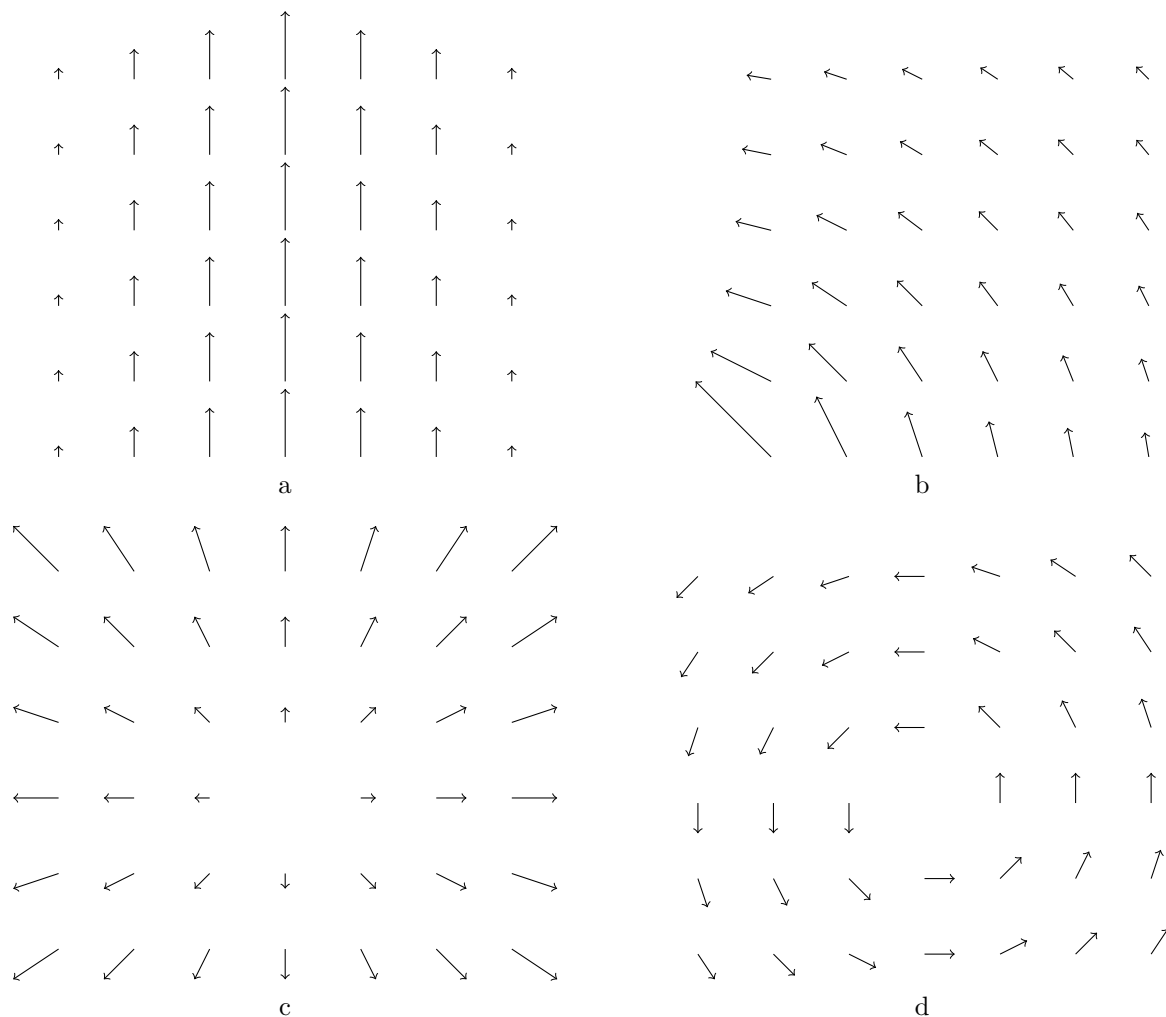


Figure 1

On rappelle que $\text{div } \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$ en coordonnées cartésiennes et que $\text{div } \vec{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial r A_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$ en coordonnées cylindriques.

I.A.2) Énoncer l'équation de Maxwell-Ampère puis le théorème d'Ampère dans le cadre de l'approximation des régimes quasi-stationnaires (ARQS). Parmi les cartes de champs proposées, lesquelles sont celles d'un champ à rotationnel nul ? Lesquelles pourraient être celles d'un champ magnétique ?

I.A.3) Définir très brièvement (5 lignes maximum) les notions de plan de symétrie et d'antisymétrie d'une distribution de courant et les propriétés du champ qui en résulte.

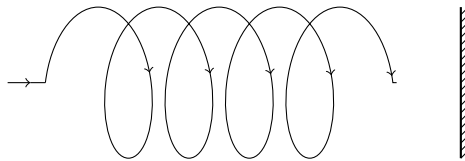


Figure 2

On s'intéresse à l'image dans un miroir d'un solénoïde (voir figure 2). Indiquer en la justifiant, la direction et le sens du champ magnétique dans le solénoïde image par rapport à celui du solénoïde initial.

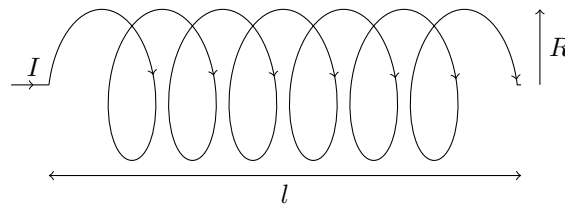


Figure 3

I.A.4) On s'intéresse à un solénoïde de longueur l et de rayon R comportant N spires (voir figure 3).

a) À quelle condition peut-on dire que ce solénoïde est infiniment long ? On admettra dans la suite que cette condition est réalisée.

b) Identifier les propriétés de symétrie et d'invariance du champ à l'intérieur du solénoïde.

En déduire la direction du champ et les variables dont il dépend.

c) En appliquant le théorème d'Ampère à un contour bien choisi, montrer que le champ est uniforme à l'intérieur du solénoïde. Donner alors sa valeur, sans calcul.

d) *Application numérique*

Calculer B pour : $N = 1000$ spires, $l = 1,00$ m, $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ (SI), $I = 1,00$ A.

Commenter. Comment faire pour obtenir un champ plus intense ? (faire une étude rapide et systématique des différents paramètres et critiquer).

I.B – L'effet Hall

Une plaquette parallélépipédique de grande longueur L , suivant Ox , de largeur a , d'épaisseur b , est parcourue par un courant d'intensité I réparti uniformément sur toute sa section droite (voir figure 4).

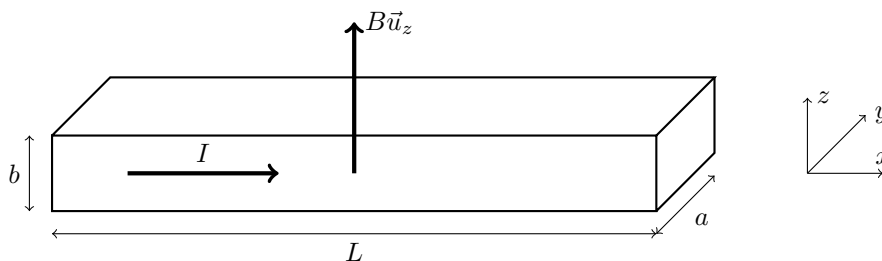


Figure 4

I.B.1) a) Quelle est l'action du champ sur un porteur de charge q supposée < 0 ?

b) Que se passe-t-il pendant le régime transitoire ?

Montrer qu'il apparaît alors une différence de potentiel entre les points A et C se situant sur les faces latérales parallèles au plan Oxz et tels que $\vec{AC} = a\vec{u}_y$. La différence de potentiel $V_C - V_A$ est nommée V_H . Quel est son signe ? Dépend-il de celui de q ?

I.B.2) On se place ensuite en régime permanent. En appliquant le principe fondamental de la dynamique à un porteur de charges, calculer le champ de Hall $\vec{E}_H$.

I.B.3) Donner la relation liant le vecteur densité de courant volumique $\vec{j}_H$ à la vitesse de déplacement des charges dans la plaquette et à n (nombre de porteurs de charge par unité de volume) et q . Calculer V_H . On montrera que $V_H b = R_H I B$ où R_H est la constante de Hall que l'on explicitera en fonction de n et q . Que peut-on dire du signe de R_H ?

I.B.4) Application numérique

Le matériau est un ruban conducteur de masse volumique ρ , de masse molaire M . Chaque atome met en jeu un électron libre pour la conduction.

Donner la valeur et l'expression de n . En déduire R_H . Calculer V_H si $B = 0,1 \text{ T}$, $M = 64 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$, $\rho = 8,92 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$, $I = 1,00 \text{ A}$, $N_A = 6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$, $b = 0,1 \text{ mm}$ et $q = -1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$. Commenter.

Les valeurs choisies pour I et B sont-elles réalistes ? Le signe des porteurs de charge, s'il est inconnu, peut-il être déterminé dans cette expérience ? Comment ?

I.B.5) L'apparition de matériaux semi-conducteurs comme l'arséniure d'indium InAs a permis d'obtenir des tensions de Hall plus élevées. Pourquoi ? On donne pour $I = 100 \text{ mA}$, $|V_H| = 126,7 \text{ mV}$, $n = 1,7 \times 10^{22} \text{ m}^{-3}$, $b = 0,1 \text{ mm}$, $a = 1 \text{ cm}$ et $L = 3 \text{ cm}$. Calculer la valeur du champ $\vec{B}$. Commenter.

I.B.6) La constante de Hall varie avec la température suivant la loi $R_H(T) = A \exp(\theta/T)$ où θ est une constante homogène à une température, T est la température exprimée en K. Quelles sont les raisons de cette variation ?

Connaissez-vous d'autres lois, dans d'autres domaines de la physique, similaires à celle-ci ?

Avec θ de l'ordre de 2000 K, calculer la variation relative de la constante de Hall lorsque la température s'élève de 10 K par rapport à la température ambiante prise égale à 300 K.

Quels sont les qualités et les défauts des capteurs à effet Hall ?

II Réalisation d'un wattmètre à effet Hall

II.A – Étude de l'appareil

La sonde à effet Hall, identique à celle décrite précédemment, est montée comme indiqué **figure 5**. Le courant i_H qui la traverse entre par la borne T_1 et sort par la borne T_2 . Elle est placée à l'intérieur d'un solénoïde infiniment long de n spires par mètre (c'est-à-dire de longueur L grande et comprenant N spires : $n = N/L$) créant un champ magnétique tel que : $\vec{B} = B_0 \vec{u}_z$.

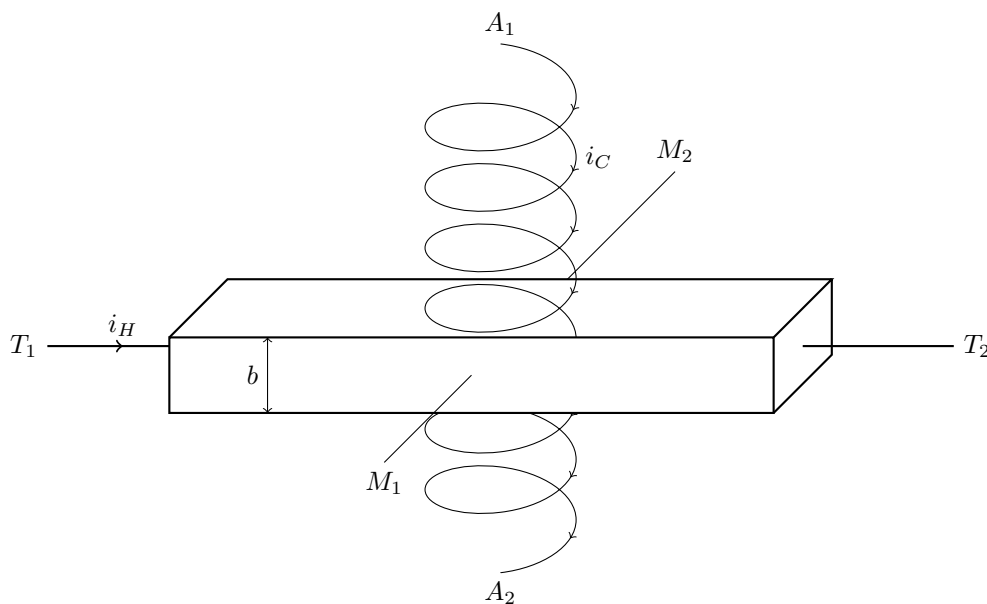


Figure 5

L'interruption du solénoïde par la sonde, peu épaisse sera négligée. i_H circule entre T_1 et T_2 et i_C circule dans le solénoïde entre A_1 et A_2 .

II.A.1) Exprimer B_0 en fonction de n et i_C .

II.A.2) En déduire $v_H = V_{M1} - V_{M2}$ en fonction de μ_0 , i_H , i_C , n , R_H et b .

II.A.3) Un récepteur électrique, constitué de l'association en série d'une résistance $R = 5 \Omega$ et d'une bobine d'inductance $L = 0,1 \text{ H}$, est alimenté par une source de tension alternative sinusoïdale de fréquence $f = 50 \text{ Hz}$ et de pulsation ω qui impose aux bornes du récepteur une tension $u_c = U_0 \cos \omega t$ avec $U_0 = 100 \text{ V}$. Le courant qui le traverse est : $i_c = I_0 \cos(\omega t + \varphi)$.

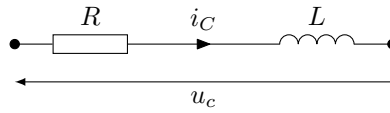


Figure 6

a) Calculer numériquement φ .

b) Exprimer la puissance instantanée consommée par ce récepteur. Calculer numériquement la puissance moyenne consommée.

II.A.4) On désire mesurer la puissance moyenne consommée par un récepteur. Le dispositif précédent est monté dans un circuit comme indiqué sur la figure 7.

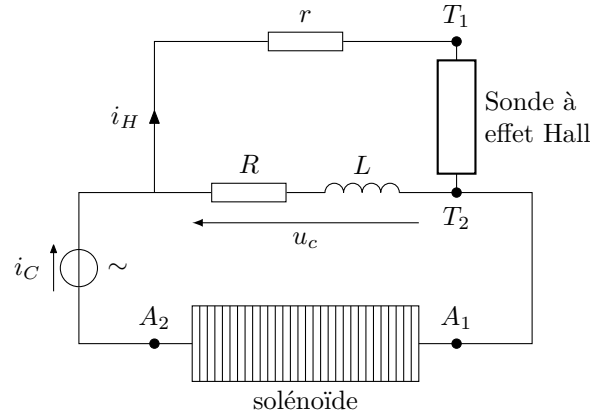


Figure 7

On admettra que i_H est faible devant i_C , R' est la résistance de la sonde entre T_1 et T_2 . On donne $r = 500 \, \Omega$ et $R' = 10 \, k\Omega$

Décrire le fonctionnement du dispositif. Montrer que V_H s'écrit : $V_H = k u_c i_c$. Exprimer k à l'aide des données.

II.A.5) On considère l'utilisation du wattmètre à effet Hall dans le cas où la tension u_c est sinusoïdale, $u_c = U_0 \cos \omega t$, et où le courant i_c comporte des harmoniques :

$$i_c = \sum_{n=1}^{\infty} I_{cn} \cos(n\omega t + \varphi_n)$$

a) Calculer V_H .

b) Montrer que la valeur moyenne $\langle V_H \rangle$ ne fait intervenir que le fondamental du courant. Calculer $\langle V_H \rangle$.

c) Pour calculer la valeur moyenne $\langle V_H \rangle$, on filtre la tension V_H . Montrer que la valeur moyenne s'obtient après un filtrage passe-bas convenable.

On rappelle que $\cos a \cos b = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b))$.

II.B – Obtention de $\langle V_H \rangle$: étude du filtre

On supposera l'amplificateur opérationnel idéal.

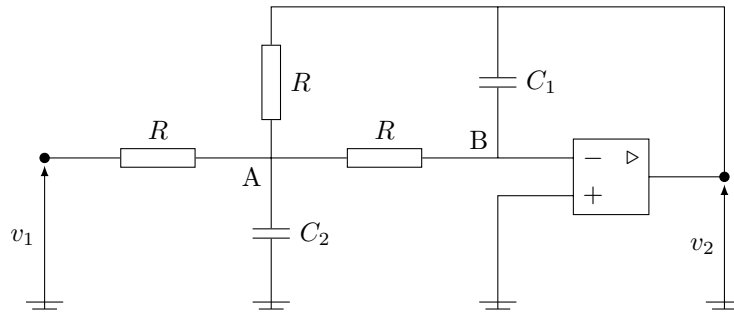


Figure 8

II.B.1) En utilisant le théorème de Millman au point A et au point B, déterminer la fonction de transfert :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{V_2}{V_1}$$

II.B.2) Mettre la fonction de transfert sous forme canonique et montrer qu'elle s'écrit alors sous la forme

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{H_0}{1 + 2\varepsilon j \frac{\omega}{\omega_0} - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

Calculer H_0 . Donner 2 relations entre ε , ω_0 et les éléments du circuit.

II.B.3) On souhaite obtenir une fréquence propre $f_0 = 10$ Hz et un coefficient d'amortissement $\varepsilon = \frac{\sqrt{2}}{2}$. On choisit $R = 47$ k Ω . Calculer C_1 et C_2 .

II.B.4) Tracer le diagramme de Bode asymptotique.

II.B.5) En déduire que ce filtre convient pour déterminer $\langle V_H \rangle$.

III Tube métallique dans un solénoïde

Une bobine, d'axe Oz , de longueur l et de section S , assimilée à un solénoïde infiniment long, est alimentée par un courant sinusoïdal de la forme : $i_L(t) = I_0 \cos(\omega t)$. Sa résistance est R_0 , son inductance est L_0 . On introduit dans cette bobine un cylindre conducteur creux, de rayon a , d'épaisseur b petite devant le rayon, de même longueur et de conductivité σ (cf figure 9).

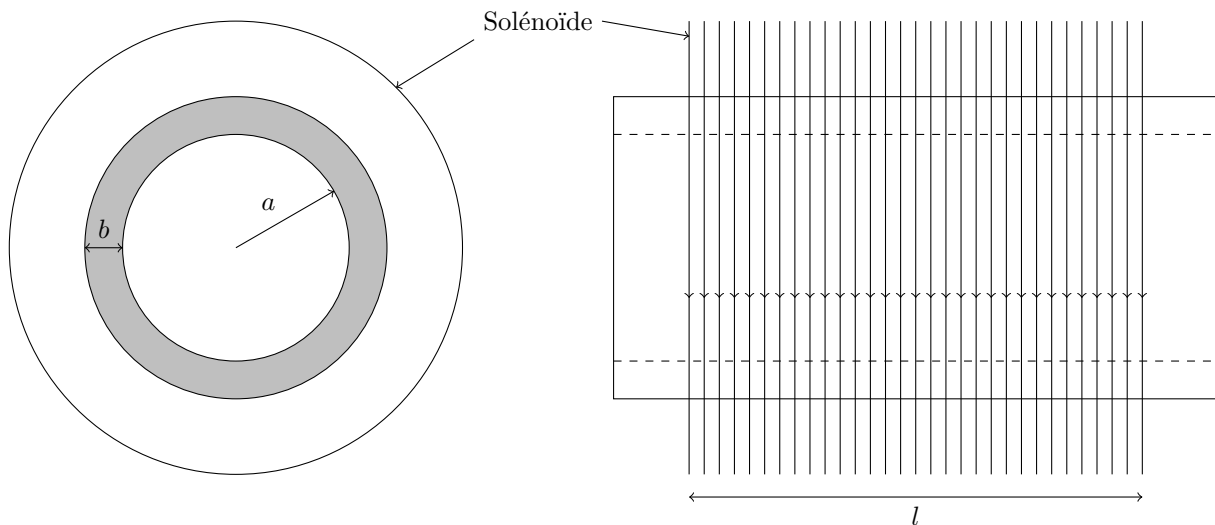


Figure 9

III.A – III.A.1) On appelle $\vec{B}_0$ le champ magnétique à l'intérieur du solénoïde créé par le courant $i(t)$. Rappeler l'expression de $\vec{B}_0$.

III.A.2) Calculer l'inductance du solénoïde en l'absence du cylindre. On donne N le nombre total de spires et S la section du solénoïde.

III.B – III.B.1) Il apparaît sur le tube un vecteur densité de courant induit $\vec{j}$. Avec des arguments de symétrie, donner la géométrie de $\vec{j}$ et du champ $\vec{B}_1$ qu'il crée.

III.B.2) a) Justifier, en faisant une analogie avec un solénoïde infiniment long, que $B_1 = \mu_0 b j$ à l'intérieur du cylindre et que $\vec{B}_1$ est nul à l'extérieur.

b) Exprimer $\vec{j}$ en fonction du champ $\vec{E}$ et de la conductivité σ .

III.C – III.C.1) Écrire l'équation de Maxwell Faraday.

III.C.2) Le champ total $\vec{B}$ est égal à $\vec{B}_0 + \vec{B}_1$. En utilisant l'équation de Maxwell-Faraday sous sa forme intégrale, en déduire l'expression de $\vec{B}_1$ en fonction de $\vec{B}_0$.

On trouve (i désigne le nombre complexe tel que $i^2 = -1$) :

$$\vec{B}_1 = \frac{1}{-1 + \frac{2i}{\mu_0 \omega a b \sigma}} \vec{B}_0$$

III.C.3) Calculer le flux du champ total en distinguant 2 zones d'application. Calculer la fem d'induction.

III.D – Écrire alors la loi d'Ohm généralisée pour le solénoïde sous la forme : $\underline{u} = \underline{Z} \underline{I}$ avec $\underline{Z} = R(\omega) + j\omega L(\omega)$

où $R(\omega) = R_0 + \frac{\pi a^2}{S} \frac{\frac{2L_0}{\mu_0 \sigma a b}}{1 + \left(\frac{2}{\mu_0 \sigma \omega a b}\right)^2}$ et $L(\omega) = L_0 \left(1 - \frac{\pi a^2}{S} \frac{1}{1 + \left(\frac{2}{\mu_0 \sigma \omega a b}\right)^2}\right)$.