

## **Devoir Maison n°6**

### **Instructions générales**

Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction. La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non encadrés et non justifiés ne seront pas pris en compte.

Toute application numérique ne comportant pas d'unité ne donnera pas lieu à attribution de points.

Plusieurs parties des problèmes sont indépendantes. Elles peuvent être traitées dans l'ordre choisi par le candidat. Le candidat prendra soin de bien numéroter les questions.

### **Physique (au choix) :**

**Problème 1 (1 h 30) : Extrait CCP 2012**

**Problème 2 (3 h) : Extrait Centrale-Supélec 2005**

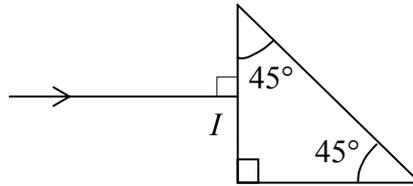


Figure 10 : prisme du périscope

On considère le rayon incident arrivant sous incidence normale sur la face d'entrée de l'un des prismes. Refaire sur la copie le schéma de la figure 10 en le complétant (dessiner la « suite » du rayon). Justifier soigneusement par un calcul les constructions au niveau de chaque interface.

5.2/ Dans la suite et par souci de simplification, nous remplacerons les prismes par des miroirs plans inclinés à  $45^\circ$ . Le schéma équivalent du périscope est fourni dans le document réponse 2. Représenter sur ce schéma l'image  $A_1B_1$  de l'objet  $AB$  par le miroir  $M_1$ , puis l'image  $A_2B_2$  de  $A_1B_1$  par la lentille  $L_1$  de centre  $O_1$ , puis l'image  $A_3B_3$  de  $A_2B_2$  par la lentille  $L_2$  de centre  $O_2$  et enfin l'image  $A'B'$  de  $A_3B_3$  par le miroir  $M_2$ . On rappelle que le document réponse 2 doit être joint à la copie.

5.3/ On donne les longueurs algébriques (ces longueurs ne correspondent pas au schéma du document réponse 2) :

$\overline{AM_1} = 100 \text{ m}$  ;  $\overline{O_1M_1} = -30 \text{ cm}$  ;  $f'_1 = 50 \text{ cm}$  ;  $\Delta = \overline{F'_1F_2} = 20 \text{ cm}$  ;  $f'_2 = 40 \text{ cm}$  ;  $\overline{O_2M_2} = 90 \text{ cm}$ .  
 $M_1$  et  $M_2$  sont les centres des miroirs.

Calculer les positions des images :  $\overline{O_1A_2}$ ,  $\overline{O_2A_3}$  et  $\overline{M_2A'}$  ainsi que le grandissement du périscope

$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$ . L'image finale est-elle de même sens que l'objet ou renversée ?

5.4/ Citer une méthode expérimentale pour mesurer la distance focale d'une lentille convergente et expliquer rapidement son principe.

## Deuxième problème : machine asynchrone

Aucune connaissance préalable du principe de fonctionnement de la machine asynchrone n'est nécessaire pour traiter ce problème.

Cette machine se compose principalement de deux parties :

- le stator réalisé à l'aide d'un ensemble de bobines fixes destinées à engendrer dans une zone limitée de l'espace un champ magnétique tournant  $B(t)$ ,
- le rotor modélisé ici par un cadre conducteur rectangulaire de surface  $S$  mobile autour d'un axe.

### Première partie : étude du stator

6/ Soit un ensemble de trois bobines (figure 11), dont les axes sont perpendiculaires à  $Oz$  et régulièrement décalés de  $\frac{2\pi}{3}$ . Ces bobines sont parcourues par des courants sinusoïdaux de pulsation  $\omega_s$  dont les intensités sont les suivantes :

$$i_1(t) = I_0 \cos(\omega_s t) ; i_2(t) = I_0 \cos\left(\omega_s t - \frac{2\pi}{3}\right) ; i_3(t) = I_0 \cos\left(\omega_s t - \frac{4\pi}{3}\right).$$

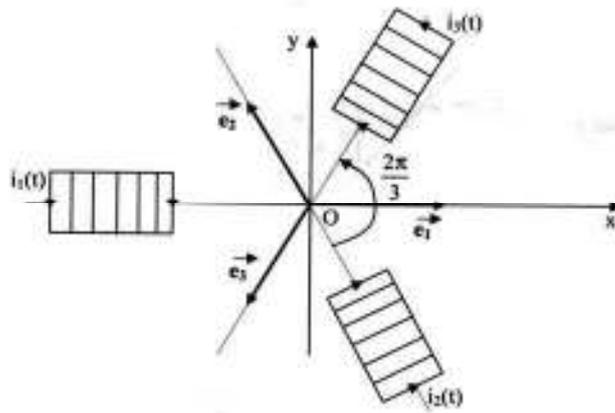


Figure 11 : bobinages statoriques

La fréquence d'alimentation de ces bobinages statoriques est égale à  $f_s = \frac{\omega_s}{2\pi} = 50$  Hz. Chaque bobine crée en  $O$  un champ magnétique qui peut se mettre sous la forme :  $\vec{B}_k = K i_k(t) \vec{e}_k$  ( $K$  est une constante qui s'exprime en  $\text{H.m}^{-2}$  et  $\vec{e}_k$  est le vecteur unitaire de l'axe de la  $k^{\text{ème}}$  bobine).

6.1/ Justifier l'unité de  $K$  par une analyse dimensionnelle.

6.2/ On donne le théorème de Ferraris :

$$\sum_{k=0}^{p-1} \cos\left(\omega_s t - \frac{2k\pi}{p}\right) \vec{e}_{k+1} = \frac{p}{2} (\cos(\omega_s t) \vec{e}_x + \sin(\omega_s t) \vec{e}_y).$$

En déduire que les 3 bobines créent au point  $O$  un champ tournant  $\vec{B}$  dont on donnera l'expression dans la base  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$ . Donner la norme du champ  $B_0 = \|\vec{B}\|$  en fonction de  $K$  et  $I_0$ . Préciser la vitesse angulaire de rotation du champ et calculer sa valeur numérique en tours par minutes (tour/min).

## Deuxième partie : entraînement du rotor

7/ Le rotor, modélisé par un cadre conducteur rectangulaire de surface  $S$  orientée selon la normale  $\vec{n}$  tourne autour d'un axe ( $Oz$ ) avec une vitesse angulaire  $\omega$  ( $\omega \geq 0$ ) (figure 12).

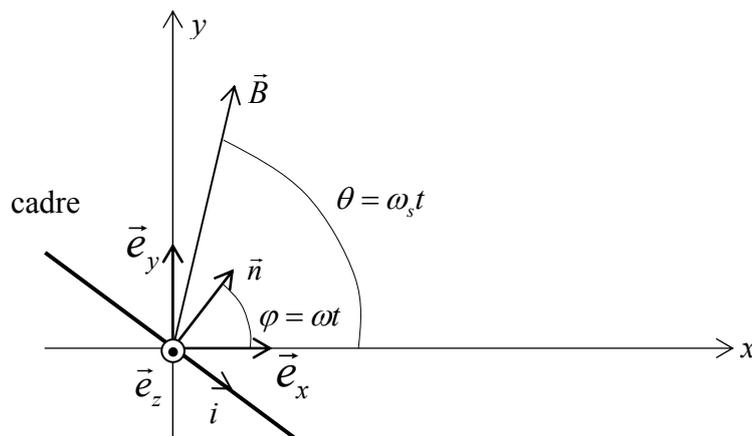


Figure 12 : modélisation du rotor

7.1/ Exprimer le flux  $\Phi$  du champ magnétique  $\vec{B}$  généré par le stator à travers le cadre en fonction de  $B_0$ ,  $S$ ,  $\omega$ ,  $\omega_s$  et  $t$ . En déduire la force électromotrice d'induction  $e(t)$  qui apparaît dans le cadre en fonction du flux maximum  $\Phi_0 = B_0 S$ , de la vitesse angulaire de glissement  $\Omega = \omega_s - \omega$  et de  $t$ .

7.2/ Le cadre constitue un circuit série de résistance  $R$  et d'inductance  $L$ .

7.2.1/ Etablir l'équation différentielle vérifiée par le courant  $i(t)$  induit dans le cadre. L'orientation de l'intensité du courant induit est indiquée sur la figure 12 sur laquelle la spire est vue de dessus.

7.2.2/ On se place en régime permanent sinusoïdal ; l'intensité dans le cadre s'écrit alors  $i(t) = I_M \sin(\Omega t - \psi)$ . En utilisant la notation complexe, montrer que :

$$\underline{i}(t) = I_M e^{j\left(\Omega t - \psi - \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{\Phi_0 \Omega}{R + jL\Omega} e^{j\left(\Omega t - \frac{\pi}{2}\right)}$$

7.2.3/ En déduire l'expression de  $I_M$  en fonction de  $\Phi_0$ ,  $\Omega$ ,  $R$  et  $L$ . Exprimer  $\cos(\psi)$  en fonction de  $\Omega$ ,  $R$  et  $L$  et préciser le signe de  $\sin(\psi)$ . Préciser si  $i(t)$  est en avance ou en retard par rapport à  $e(t)$ .

7.2.4/ On donne  $\Phi_0 = 10^{-3} \text{ T.m}^2$  et  $L = 100 \text{ mH}$ . Donner la valeur numérique de la valeur efficace de  $i(t)$  dans le cas où  $R \ll L\Omega$ .

7.2.5/ Comment mesure-t-on en pratique une intensité efficace ? Quelles différences y-a-t-il entre les positions AC et DC d'un multimètre numérique ? La signification des positions AC et DC est-elle la même sur l'oscilloscope ?

7.3/ On rappelle l'expression du moment magnétique  $\vec{M}$  du rotor :  $\vec{M} = i(t)S\vec{n}$ .

En déduire le couple électromagnétique  $\vec{\Gamma}$  des forces de Laplace s'exerçant sur le cadre puis sa projection  $\Gamma = \vec{\Gamma} \cdot \vec{e}_z$  sur l'axe de rotation en fonction de  $S$ ,  $B_0$ ,  $I_M$ ,  $\psi$ ,  $\Omega$  et  $t$ .

7.4/ On donne la relation de trigonométrie suivante :  $\sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b))$ .

Montrer que la valeur moyenne de  $\Gamma$ , notée  $\Gamma_m$ , est donnée par :

$$\Gamma_m = \left(\frac{\Phi_0^2}{2L}\right) \frac{RL\Omega}{R^2 + (L\Omega)^2}$$

7.5/ On peut tracer l'allure de  $\Gamma_m$  en fonction de  $\omega$  (figure 13) :

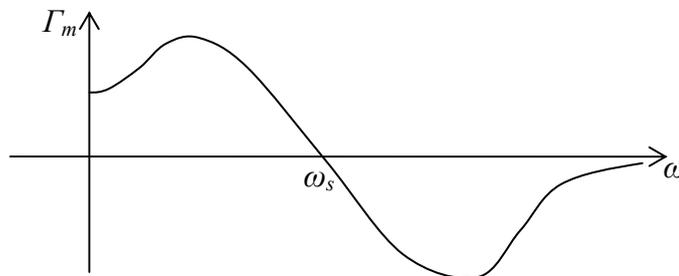


Figure 13 : allure de  $\Gamma_m$  en fonction de  $\omega$

A quoi correspond physiquement la limite de  $\Gamma_m$  quand  $\omega$  tend vers 0 ?

Dans quelles conditions le couple est-il moteur ou au contraire résistant ?

### Troisième partie : puissance et rendement d'un moteur

On considère maintenant un moteur du type précédent relié à une charge par un arbre (figure 14) :

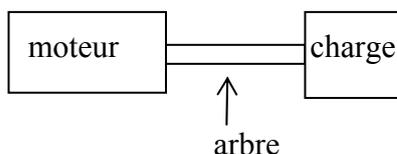


Figure 14 : moteur en charge

Le moment d'inertie de l'arbre est noté  $J$ . On notera  $\Gamma$  le couple délivré par le moteur,  $\Gamma_r$  le couple résistant dû à la charge ( $\Gamma$  et  $\Gamma_r$  positifs).

8/ En appliquant le théorème du moment cinétique en projection sur l'axe de rotation, relier la dérivée de la vitesse angulaire  $\Omega_m$  de l'arbre à  $J$ ,  $\Gamma$  et  $\Gamma_r$ .

9/ On considère les courbes suivantes correspondant à trois moteurs différents (figure 15) reliés à la même charge exerçant un couple résistant  $\Gamma_r$  constant.

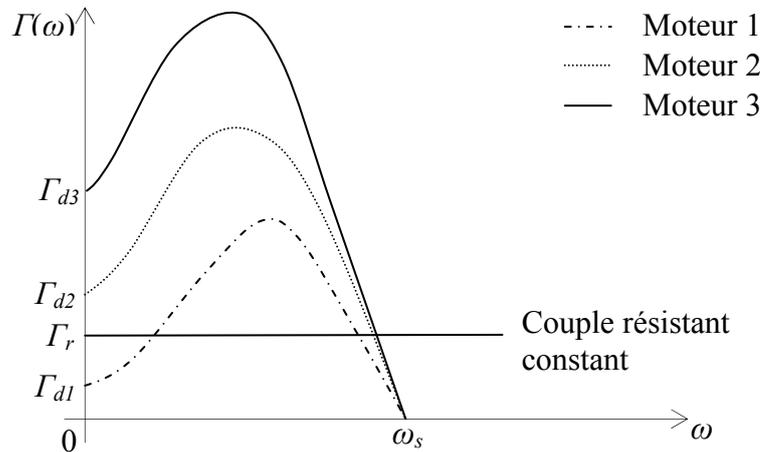


Figure 15 : comparaison de 3 moteurs

Expliquer de façon précise quel(s) moteur(s) est (sont) susceptible(s) de démarrer.

10/ On se place maintenant en régime permanent ; on a alors  $\Gamma(\omega) = \Gamma_r$ .

10.1/ En utilisant les résultats de la deuxième partie, donner l'expression de la puissance mécanique moyenne fournie par le moteur  $\langle P_{méca} \rangle = \Gamma_m \omega$  en fonction de  $\Phi_0$ ,  $\omega$ ,  $\omega_s$ ,  $R$  et  $L$ .

10.2/ En utilisant à nouveau les résultats de la deuxième partie, donner l'expression de la puissance moyenne  $\langle P_J \rangle$  dissipée par effet Joule dans les conducteurs du rotor en fonction de  $\Phi_0$ ,  $\omega$ ,  $\omega_s$ ,  $R$  et  $L$ .

10.3/ En déduire la puissance électrique moyenne  $\langle P_{el} \rangle$  fournie au moteur en fonction de  $\Phi_0$ ,  $\omega$ ,  $\omega_s$ ,  $R$  et  $L$ .

10.4/ On introduit maintenant la grandeur  $g = \frac{(\omega_s - \omega)}{\omega_s}$ , appelée glissement, qui caractérise l'écart

relatif entre la vitesse angulaire de synchronisme et la vitesse angulaire de rotation de l'arbre du moteur. Exprimer le rendement du moteur en fonction de  $g$ .

La vitesse de rotation  $\omega$  des moteurs asynchrones s'écarte rarement de plus de 5 % de la vitesse de rotation  $\omega_s$  du champ tournant. Lorsqu'elle s'en écarte de 5 %, calculer le rendement du moteur asynchrone.

**Fin de l'énoncé**

# PHYSIQUE II

On se propose d'examiner quelques principes de fonctionnement de deux types de moteurs électriques, à la fois sous les aspects électromagnétique et dynamique. Les trois parties de ce problème sont indépendantes. L'étude est réalisée dans un référentiel galiléen  $\mathcal{R}$  auquel on associe un repère  $Oxyz$  (de vecteurs unitaires respectifs  $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ ).

## Partie I - Moteur à aimant inducteur

Un segment conducteur filiforme rectiligne  $AD$ , de résistance négligeable, parcouru par un courant  $i$  (dirigé de  $A$  vers  $D$ ), est astreint à tourner autour de l'axe  $Oz$  à la vitesse angulaire constante  $\omega$ , dans un champ magnétique uniforme et indépendant du temps :  $\vec{B} = -B\vec{e}_z$  ( $B > 0$ ).

Les points  $O, A$ , et  $D$  sont toujours alignés et on appelle  $\vec{e}_r$  le vecteur unitaire radial dirigé selon  $OA$  : on pose  $\theta = (\vec{e}_x, \vec{e}_r)$  et donc  $\omega = d\theta/dt$ .

Les deux extrémités  $A$  et  $D$  du segment glissent sur deux conducteurs circulaires fixes, de centre  $O$ , de rayons respectifs  $r_1$  et  $r_2$  ( $r_1 < r_2$ ), de résistance négligeable, qui permettent de collecter le courant  $i$  (figure 1).

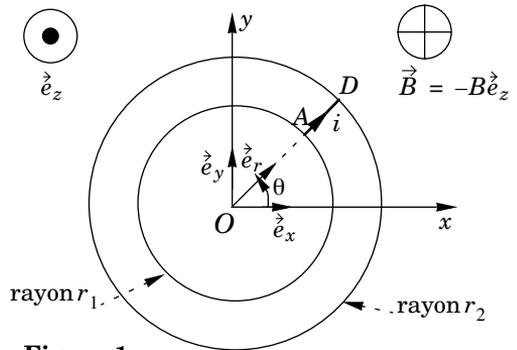


Figure 1

**I.A** - Calculer la f.e.m.  $e_{AD}$  induite qui apparaît aux extrémités du segment  $AD$  en fonction de  $B, r_1, r_2$  et  $\omega$ .

**I.B** - Calculer le moment en  $O$  de la force de Laplace, soit  $\vec{\Gamma}_1 = \Gamma_1 \vec{e}_z$ , qui s'exerce sur  $AD$  en fonction de  $B, r_1, r_2$  et  $i$ .

**I.C** - À présent, on considère une nappe conductrice formée de  $N$  segments conducteurs identiques à  $AD$ , placés dans le plan  $Oxy$  et régulièrement

# Filière TSI

distribués autour de l'axe  $Oz$ . Le système rigide ainsi constitué tourne autour de l'axe  $Oz$  avec la vitesse angulaire uniforme  $\omega = d\theta/dt$ .

I.C.1) Quelle est l'expression de la f.e.m  $e_{1 \rightarrow 2}$  qui apparaît entre les deux conducteurs circulaires ?

I.C.2) Chaque segment conducteur étant parcouru par un courant électrique  $i_N = I/N$ , donner l'expression du moment total en  $O$  des forces de Laplace,  $\vec{\Gamma} = \Gamma e_z$  qui s'exerce sur la nappe par rapport à l'axe  $Oz$ .

I.D - On branche entre les deux conducteurs circulaires, un générateur de f.e.m.  $U_0$  constante et de résistance interne  $R$ , la borne positive étant reliée au conducteur circulaire intérieur.

I.D.1) Donner l'expression du courant total  $I$  débité par le générateur et qui traverse le moteur (on néglige l'inductance propre du circuit).

I.D.2) Montrer que le moment  $\Gamma$  peut s'écrire sous la forme suivante  $\Gamma = M_1 U_0 - M_2 \omega$  et exprimer  $M_1$  et  $M_2$  en fonction de  $B$ ,  $R$ ,  $r_1$  et  $r_2$ .

I.D.3) *Application numérique :*

On donne  $U_0 = 45 \text{ V}$ ,  $R = 1,2 \Omega$ ,  $B = 1 \text{ T}$ ,  $r_1 = 1 \text{ cm}$ ,  $r_2 = 4 \text{ cm}$ ,  $\omega = 4\pi \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ . Calculer  $\Gamma$ .

## Partie II - Moteur asynchrone à courant alternatif

II.A - On considère le circuit électrique de la figure 2 qui comporte un générateur idéal de tension sinusoïdale  $u(t) = U_0 \cos(\omega t + \varphi_0)$ , ou encore :

$$u(t) = U_{eff} \sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi_0)$$

un condensateur de capacité  $C$  et deux bobines identiques ( $b_1$ ) et ( $b_2$ ), d'inductance propre  $L$  et de résistance

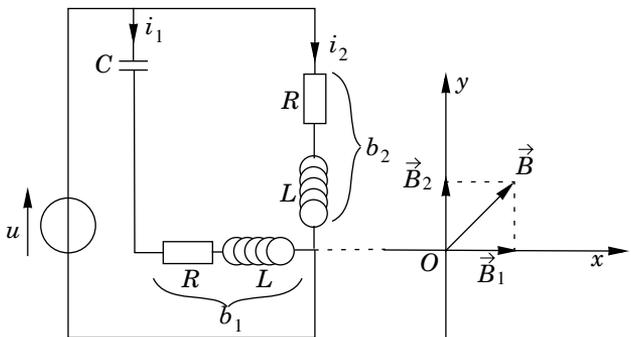


Figure 2

Figure 3

$R$  (on néglige l'inductance mutuelle entre les deux bobines).

Les bobines ( $b_1$ ) et ( $b_2$ ) sont disposées de manière à ce que leurs axes soient perpendiculaires en  $O$  : ( $b_1$ ) crée ainsi en  $O$  un champ magnétique colinéaire à l'axe  $Ox$ , soit  $\vec{B}_1 = B_1 \vec{e}_x$ , et ( $b_2$ ) un champ colinéaire à l'axe  $Oy$ , soit  $\vec{B}_2 = B_2 \vec{e}_y$  (figure 3). Les mesures algébriques  $B_1$  et  $B_2$  des champs sont proportionnelles aux intensités qui traversent chaque bobine :  $B_1(t) = k i_1(t)$  et  $B_2(t) = k i_2(t)$  ( $k$  constante positive donnée).

II.A.1) Déterminer les intensités  $i_1(t)$  et  $i_2(t)$  et les mettre sous la forme :  $i_1(t) = I_{01} \cos(\omega t + \varphi_0 - \varphi_1)$  et  $i_2(t) = I_{02} \cos(\omega t + \varphi_0 - \varphi_2)$ . Exprimer  $I_{01}$ ,  $I_{02}$ ,  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  en fonction de  $R$ ,  $L$ ,  $C$  et  $\omega$  (on suppose  $\varphi_1, \varphi_2 \in [-\pi/2, \pi/2]$ ).

II.A.2) Quelle doit être la relation entre  $L$ ,  $C$  et  $\omega$  pour que les amplitudes  $I_{01}$  et  $I_{02}$  des courants soient égales ? Quelle relation lie alors les déphasages  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  ? Quel est le signe de  $\varphi_1$  ? Quel est celui de  $\varphi_2$  ?

II.A.3) Quelle doit être la relation entre  $R$ ,  $L$  et  $\omega$  si l'on souhaite en outre que  $\varphi_2 - \varphi_1 = \pi/2$  ?

II.A.4) Les deux conditions précédentes étant réunies, montrer que par un choix judicieux de  $\varphi_0$  que l'on précisera,  $B_1$  et  $B_2$  peuvent se mettre sous la forme  $B_1 = B_0 \cos(\omega t)$  et  $B_2 = B_0 \sin(\omega t)$ . Exprimer  $B_0$  en fonction de  $k$ ,  $U_0$  et  $R$ . Préciser les caractéristiques du champ total  $\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$  créé par les deux bobines en  $O$ .

II.A.5) Application numérique :

On donne  $k = 10^{-3} \text{T} \cdot \text{A}^{-1}$ ,  $L = 100 \text{ mH}$ ,  $\omega = 100\pi \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ ,  $U_{eff} = 220 \text{ V}$ .

Calculer  $B_0$ .

II.B - Le champ magnétique  $\vec{B}$  ci-dessus agit sur une petite bobine plate, de  $n$  spires de section  $S$ , fermée sur elle même, d'inductance propre  $L_1$  et de résistance  $R_1$  (on suppose que le champ  $\vec{B}$

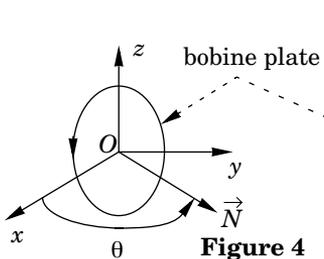


Figure 4

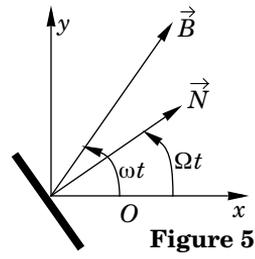


Figure 5

est uniforme sur toute la bobine). Le centre de la bobine coïncide avec le point  $O$  et la bobine tourne autour de l'axe  $Oz$  à la vitesse  $\Omega$  que l'on suppose constante : le vecteur unitaire  $\vec{N}$  normal au plan de la bobine en  $O$  reste

constamment dans le plan  $Oxy$  ; l'angle  $\theta = (\vec{e}_x, \vec{N})$  s'écrit donc  $\theta = \Omega t$  en supposant  $\theta = 0$  à l'instant initial (figures 4 et 5).

II.B.1) Déterminer la f.e.m. induite par le champ  $\vec{B}$  dans la petite bobine et en déduire que cette bobine est parcourue par un courant  $i$  de la forme :  $i(t) = I_0 \sin((\omega - \Omega)t - \psi)$ . Exprimer  $I_0$  et  $\psi$  en fonction de la constante  $\Phi_0 = nSB_0$  et de  $R_1, L_1, \omega, \Omega$ .

II.B.2) Exprimer le moment  $\vec{\Gamma} = \Gamma \vec{e}_z$  du couple électromagnétique subi par la petite bobine en fonction de  $\Phi_0, R_1, L_1, \omega, \Omega$  et  $t$ .

II.B.3) Calculer la valeur moyenne  $\Gamma_m$  de  $\Gamma$  en fonction de  $\Phi_0, R_1, L_1, \omega, \Omega$  ; tracer le graphe de  $\Gamma_m$  en fonction de  $\Omega$  pour  $\Omega \in [0, \omega]$  (on suppose  $R_1 < L_1 \omega$ ). Pourquoi restreint-on l'étude à l'intervalle  $[0, \omega]$  ?

II.B.4) *Application numérique :*

On donne  $\Phi_0 = 10^{-3} \text{ T} \cdot \text{m}^2, L_1 = 100 \text{ mH}, R_1 = 1 \Omega, \omega = 100\pi \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ .

Calculer la valeur maximale  $\Gamma_{m, \text{Max}}$  de  $\Gamma_m$  et la vitesse angulaire correspondante de la petite bobine.

II.B.5) Pour quelles valeurs de  $\Omega$  le moteur a-t-il un fonctionnement stable ? Justifiez brièvement votre réponse.

### Partie III - Étude dynamique

On considère un moteur à aimant inducteur du type de celui étudié en Partie I ; alimenté par une tension  $u$ , il exerce un couple moteur  $\vec{\Gamma} = \Gamma \vec{e}_z$ . L'ensemble des parties mobiles (rotor, arbre, pièces diverses) de ce moteur possède un moment d'inertie  $J$  par rapport à l'axe de rotation  $Oz$ .

Dans toute cette partie on suppose  $\omega > 0$ .

III.A - Le moteur tourne à vide à la vitesse  $\omega$  ;  $\Gamma$  s'écrit  $\Gamma = M_1 u - M_2 \omega$  ( $M_1$  et  $M_2$  étant deux constantes positives données).

III.A.1) En supposant que les parties mobiles ne soient soumises qu'au couple moteur, écrire l'équation du mouvement.

III.A.2) Quelle est l'expression de la vitesse  $\omega_0$  en régime permanent lorsque  $u = U_0 = \text{constante}$  ?

III.A.3) On suppose  $u = U_0$  et le régime permanent est établi. À un instant que l'on choisit comme instant initial,  $t = 0$ , la tension  $u$  passe de la valeur  $U_0$  à la valeur constante  $U_1$  ( $U_1 > U_0$ ).

Donner, pour  $t > 0$ , l'expression de la vitesse  $\omega$  en fonction du temps.

On pourra poser  $\tau = J/N$ . Quelle est la dimension de la constante  $\tau$  ? Justifier votre réponse.

**III.B -** On associe au moteur un dispositif électromécanique qui permet d'avoir  $\Gamma = \Gamma_0$  ( $\Gamma_0$  constante positive) lorsque le moteur est alimenté et  $\Gamma = 0$  lorsque le moteur ne l'est pas.

III.B.1) La partie mobile du moteur est soumise, en outre, à l'action d'un couple résistant de moment  $\vec{\Gamma}_R = \Gamma_R \vec{e}_z$  tel que  $\Gamma_R = -\Gamma_{R0}$  ( $\Gamma_{R0}$  constante positive) lorsque le moteur tourne et  $|\Gamma_R| \leq \Gamma_{R0}$  lorsque le moteur est immobile. Ce couple résistant ne peut évidemment pas entraîner la rotation du moteur et ne peut que ralentir celle-ci lorsque le moteur tourne.

- a) Le moteur est à l'arrêt. À l'instant que l'on choisit comme instant initial,  $t = 0$ , on alimente le moteur. À quelle condition le moteur peut-il démarrer ?
- b) La condition précédente étant réalisée, déterminer la vitesse  $\omega$  du moteur en fonction de  $\Gamma_0, \Gamma_{R0}, J$  et du temps  $t$ .
- c) On coupe l'alimentation du moteur à l'instant  $t_0$ . Soit  $t_1$  l'instant auquel le moteur s'arrête. Exprimer  $t_1$  en fonction de  $t_0, \Gamma_0$  et  $\Gamma_{R0}$ .
- d) *Application numérique :*

On donne  $\Gamma_0 = 4 \cdot 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{m}$ ,  $\Gamma_{R0} = 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{m}$ ,  $t_0 = 1 \text{ s}$ . Calculer  $t_1$ .

III.B.2) On associe au moteur un ensemble d'engrenages. Sur l'arbre du moteur est fixée une roue dentée  $D_1$  d'axe  $Oz$  et de rayon  $R_1$  ; le moment d'inertie de l'ensemble des parties mobiles (rotor, arbre,  $D_1$ , pièces diverses) par rapport à l'axe  $Oz$  est  $J_1$ . La roue dentée  $D_1$  entraîne à son tour, sans glissement, une roue dentée  $D_2$  d'axe  $Az$  (colinéaire à  $Oz$ ), de rayon  $R_2$  et de moment d'inertie  $J_2$  par rapport à  $Az$  (figure 6) : le seul mouvement de  $D_2$  est une rotation autour de l'axe  $Az$ .

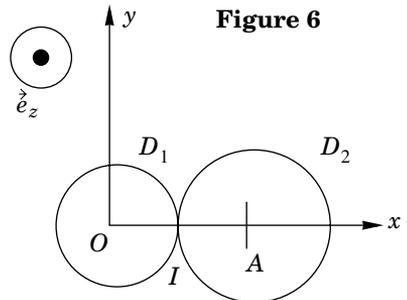


Figure 6

L'ensemble étant immobile, on alimente le moteur à partir d'un instant pris pour instant initial  $t = 0$ . La partie mobile du moteur et la roue  $D_1$  sont alors soumises au couple moteur  $\vec{\Gamma} = \Gamma_0 \vec{e}_z$  ( $\Gamma_0$  constante positive) et celui-ci est suffisamment intense pour que le moteur puisse démarrer. Partie mobile du moteur et roue  $D_1$  sont également soumises à l'action de la roue  $D_2$  : celle-ci peut être représentée par une force  $\vec{F}_1 = F_N \vec{e}_x - F_T \vec{e}_y$  s'appliquant au point de contact  $I$  entre les deux roues ( $F_T > 0$ ). La roue  $D_2$  est soumise à l'action d'un couple résistant de moment  $\vec{\Gamma}_R = \Gamma_{R0} \vec{e}_z$  ( $\Gamma_{R0}$  constante positive) et évidemment à la force  $\vec{F}_2 = -\vec{F}_1$ .

- a) Exprimer la vitesse de rotation  $\omega_2$  de la roue  $D_2$  autour de son axe en fonction de celle  $\omega$  du moteur et des rayons  $R_1$  et  $R_2$ . Justifier le signe de  $\Gamma_{R0}$ .

b) Appliquer le théorème du moment cinétique en projection sur les axes de rotation respectifs à l'ensemble (partie mobile du moteur + roue  $D_1$ ) puis à la roue  $D_2$ . On admettra qu'aucune autre action mécanique que celles précisées ci-dessus n'interviennent dans l'application de ce théorème.

c) En déduire les vitesses angulaires  $\omega$  et  $\omega_2$  en fonction de  $\Gamma_0$ ,  $\Gamma_{R0}$ ,  $J_1$ ,  $J_2$ ,  $R_1$ ,  $R_2$  et du temps  $t$ .

d) Exprimer la norme  $F_T$  de la composante tangentielle de la force de contact entre les roues  $D_1$  et  $D_2$  en fonction de  $\Gamma_0$ ,  $\Gamma_{R0}$ ,  $J_1$ ,  $J_2$ ,  $R_1$ ,  $R_2$ .

e) *Application numérique.*

On donne :

$$\Gamma_0 = 4 \cdot 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{m}, J_1 = 8 \cdot 10^{-4} \text{ kg m}^2, R_1 = 10^{-2} \text{ m}, \Gamma_{R0} = 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{m},$$

$$J_2 = 4 \cdot 10^{-4} \text{ kg m}^2, R_2 = 2 \cdot 10^{-2} \text{ m}.$$

Calculer  $F_T$  et les vitesses  $\omega$  et  $\omega_2$  atteintes respectivement par  $D_1$  et  $D_2$  au bout de  $t = 1 \text{ s}$ .

---

••• FIN •••

---