Devoir Maison n°7

Instructions générales

Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction. La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non encadrés et non justifiés ne seront pas pris en compte.

Toute application numérique ne comportant pas d'unité ne donnera pas lieu à attribution de points.

Plusieurs parties des problèmes sont indépendantes. Elles peuvent être traitées dans l'ordre choisi par le candidat. Le candidat prendra soin de bien numéroter les questions.

Physique :

Problème 1 (1 h 30) : Extrait CCP 2007

L'usage des calculatrices est interdit.

N.B. : Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Ce sujet comporte trois problèmes indépendants qui portent sur des thèmes différents.

Chaque problème comporte plusieurs parties qui sont le plus souvent indépendantes les unes des autres.

Données mathématiques :

Opérateurs mathématiques en coordonnées cartésiennes :

Divergence : $\mathrm{div}\vec{A} = \dfrac{\partial A_x}{\partial x} + \dfrac{\partial A_y}{\partial y} + \dfrac{\partial A_z}{\partial z}$

Rotationnel : $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{A} = \left(\dfrac{\partial A_z}{\partial y} - \dfrac{\partial A_y}{\partial z}\right)\vec{e}_x + \left(\dfrac{\partial A_x}{\partial z} - \dfrac{\partial A_z}{\partial x}\right)\vec{e}_y + \left(\dfrac{\partial A_y}{\partial x} - \dfrac{\partial A_x}{\partial y}\right)\vec{e}_z$

Laplacien d'un champ scalaire : $\Delta U = \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 U}{\partial z^2}$

Laplacien d'un champ vectoriel : $\Delta\vec{A} = \left|\begin{array}{l} \Delta A_x = \dfrac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} \\ \Delta A_y = \dfrac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} \\ \Delta A_z = \dfrac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \end{array}\right.$

Relations concernant les opérateurs mathématiques :

$\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}\,\vec{Z}\right) = \overrightarrow{grad}\left(div\ \vec{Z}\right) - \Delta\vec{Z}$

$\Delta U = div\left(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,U\right)$

Trigonométrie :

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$

$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$

Deuxième problème :

Ondes électromagnétiques

On veillera, dans toute cette partie, à utiliser les notations et opérateurs vectoriels de manière rigoureuse.

On désignera par ε_0 la permittivité diélectrique du vide et par μ_0 la perméabilité magnétique du vide.

Première partie : préliminaires

Propagation d'ondes électromagnétiques dans le vide

On considère un champ électromagnétique ($\vec{E}, \vec{B}$) où $\vec{E}$ désigne le champ électrique et $\vec{B}$ le champ magnétique.

1/ Ecrire les quatre équations de Maxwell en présence de charges et de courants en précisant bien la signification de tous les termes intervenant dans ces équations.
Que deviennent ces équations dans le vide ?

2/ Déterminer les équations de propagation des champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ dans une région sans charges ni courants.

3/ Onde plane progressive monochromatique

Montrer qu'une onde électromagnétique dont les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont donnés par les expressions ci-dessous satisfait aux équations de propagation précédentes à condition que c soit lié à ε_0 et μ_0 par une relation que l'on démontrera.

$$\begin{cases} \vec{E}(x,t) = \vec{E}_0 \cos(\omega(t - \frac{x}{c})) \\ \vec{B}(x,t) = \vec{B}_0 \cos(\omega(t - \frac{x}{c})) \end{cases} \quad \text{où } \vec{E}_0 \text{ et } \vec{B}_0 \text{ sont des vecteurs constants}$$

Quelle est la signification physique de c ?

4/ Structure de l'onde plane progressive monochromatique

Soit une onde plane progressive monochromatique, de pulsation ω et de vecteur d'onde $\vec{k}$ se propageant dans le vide. Son champ électrique $\vec{E}$ et son champ magnétique $\vec{B}$ en un point M de l'espace repéré par le vecteur $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$ peuvent s'écrire sous la forme :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega\, t - \vec{k}.\vec{r}) \text{ où } \vec{E}_0 \text{ est un vecteur constant,}$$

$$\text{et } \vec{B} = \vec{B}_0 \cos(\omega\, t - \vec{k}.\vec{r}) \text{ où } \vec{B}_0 \text{ est un vecteur constant.}$$

En utilisant les équations de Maxwell et le formulaire donné en début d'énoncé, démontrer que :

- le champ électrique $\vec{E}$ est perpendiculaire à la direction de propagation donnée par le vecteur d'onde $\vec{k}$,

- le champ magnétique $\vec{B}$ est perpendiculaire à la direction de propagation donnée par le vecteur d'onde $\vec{k}$,
- le champ électrique $\vec{E}$ et le champ magnétique $\vec{B}$ sont perpendiculaires entre eux,
- les normes du champ électrique et du champ magnétique sont telles que : $\|\vec{B}\| = \dfrac{\|\vec{E}\|}{c}$.

On pourra éventuellement, pour simplifier les notations lors des calculs, décomposer les vecteurs $\vec{E}_0$, $\vec{B}_0$ et $\vec{k}$ sur les trois axes d'un repère orthonormé ($Oxyz$) :

$$\vec{E}_0\left|\begin{matrix}E_{0x}\\E_{0y}\\E_{0z}\end{matrix}\right. \qquad \vec{B}_0\left|\begin{matrix}B_{0x}\\B_{0y}\\B_{0z}\end{matrix}\right. \qquad \vec{k}\left|\begin{matrix}k_x\\k_y\\k_z\end{matrix}\right.$$

5/ Vecteur de Poynting

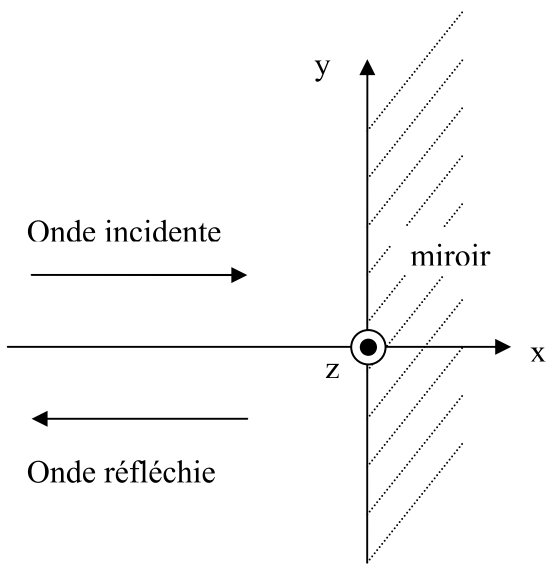
5.1/ Donner l'expression du vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$ associé à une onde électromagnétique ($\vec{E}$, $\vec{B}$). Quelle est la signification physique de ce vecteur ? Quelle est l'unité du système international qui lui correspond ?

5.2/ Déterminer l'expression du vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$ relatif à une onde plane progressive monochromatique du type de l'onde décrite précédemment dans la question 4/. On donnera l'expression de $\vec{\Pi}$ en fonction de c, ε_0, d'un vecteur unitaire que l'on précisera et de E (norme du vecteur champ électrique).

Deuxième partie : réflexion d'une onde plane progressive monochromatique sur un conducteur parfait

On se place dans l'espace rapporté à un repère cartésien (O, $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$).
Une onde plane progressive monochromatique à polarisation rectiligne de pulsation ω et de vecteur d'onde $\vec{k}$ se propage dans le vide dans la direction (Ox), dans le sens des x croissants :
$\vec{E}_i = E_0 \cos(\omega t - k\,x)\vec{e}_y$ avec E_0 constant.

En $x = 0$, elle arrive sur la surface plane d'un miroir métallique parfaitement conducteur (on admet que dans un tel conducteur, les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont nuls) et donne naissance à une onde réfléchie se propageant dans la direction (Ox) dans le sens des x décroissants : $\vec{E}_r = \vec{E}_{0r} \cos(\omega t + k\,x)$.



6/ Conditions aux limites

Ecrire les conditions aux limites que doivent vérifier les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sur le plan d'équation *x = 0* qui limite l'espace entre le vide et le miroir métallique en précisant bien la signification de tous les termes intervenant dans les équations.

7/ Détermination du champ électromagnétique résultant

7.1/ Montrer en utilisant les relations données dans la question précédente que le champ électrique réfléchi est lui aussi polarisé suivant l'axe *Oy* et établir l'expression du vecteur $\vec{E}_{0r}$ en fonction de E_0 et d'un vecteur unitaire que l'on précisera.

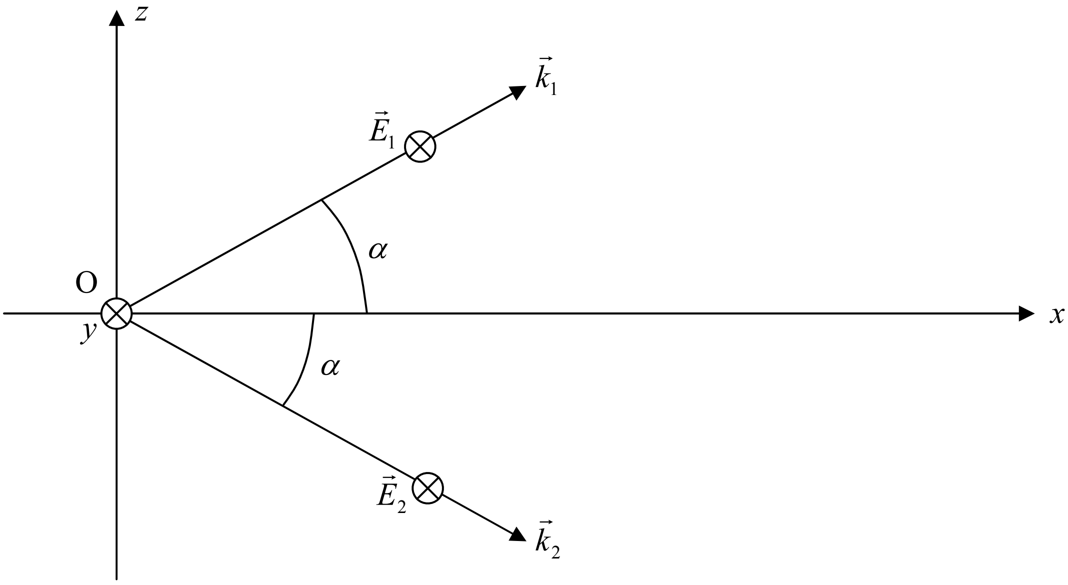
7.2/ Déterminer les expressions en fonction du temps du champ magnétique incident $\vec{B}_i$ et du champ magnétique réfléchi $\vec{B}_r$. On exprimera $\vec{B}_i$ et $\vec{B}_r$ en fonction de E_0 , ω, *k, t, x*, *c* et d'un vecteur unitaire que l'on précisera.

7.3/ Déterminer le champ électrique $\vec{E}$ et le champ magnétique $\vec{B}$ du champ électromagnétique résultant de l'onde incidente et de l'onde réfléchie dans le demi-espace $x < 0$. Caractériser l'onde résultante.

8/ Déterminer l'expression du vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$ de l'onde résultante ainsi que sa valeur moyenne $\langle \vec{\Pi} \rangle$ au cours d'une période $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$. Commenter.

Troisième partie : superposition de deux ondes planes progressives monochromatiques

Une onde plane progressive monochromatique de pulsation ω et de vecteur d'onde $\vec{k}_1$ se propage dans le vide.
Un point M quelconque de l'espace et tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$ est repéré par ses coordonnées (*x, y, z*).
$\vec{k}_1$ est donné par $\vec{k}_1 = k(\cos\alpha\,\vec{e}_x + \sin\alpha\,\vec{e}_z)$ où *k* est une constante et $k = \dfrac{\omega}{c}$.
Le champ électrique de cette onde est polarisé rectilignement dans la direction parallèle à (*Oy*) :
$\vec{E}_1 = E_0\cos(\omega t - \vec{k}_1.\vec{r})\,\vec{e}_y$
Une deuxième onde plane progressive monochromatique, de même pulsation ω, de même amplitude et de vecteur d'onde $\vec{k}_2 = k(\cos\alpha\,\vec{e}_x - \sin\alpha\,\vec{e}_z)$ se superpose à la première.
$\vec{E}_2 = E_0\cos(\omega t - \vec{k}_2.\vec{r})\,\vec{e}_y$



9/ Déterminer l'expression du champ électrique $\vec{E}$ de l'onde globale qui résulte de la superposition des deux ondes précédentes. On exprimera $\vec{E}$ en fonction de ω, k, α, E_0, *z, t, x* et d'un vecteur unitaire et on mettra $\vec{E}$ sous la forme du produit d'un terme dépendant du temps et d'un terme indépendant du temps.

10/ Quelle est la direction de propagation de cette onde ? Est-elle plane ?

11/ Dans cette question, il sera admis sans démonstration que la valeur moyenne $\langle\vec{\Pi}\rangle$ du vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$ est proportionnelle au carré de l'amplitude du vecteur champ électrique $\vec{E}$.
On se place sur un écran perpendiculaire à l'axe *Ox* et d'équation *x* = *a* (avec *a* constante positive).
Indiquer comment est répartie l'énergie sur cet écran ?
Quel phénomène physique cette répartition d'énergie évoque-t-elle ?