

Concours Blanc 2014

Physique

L'emploi des calculatrices est autorisé.

Instructions générales

Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction. La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non encadrés et non justifiés ne seront pas pris en compte.

Toute application numérique ne comportant pas d'unité ne donnera pas lieu à attribution de points.

Les deux problèmes sont indépendants. Les diverses parties peuvent être traitées dans l'ordre choisi par le candidat. Le candidat prendra soin de bien numéroter les questions.

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les résultats numériques peuvent être donnés sous forme approchée.

Il est proposé à titre indicatif la répartition suivante des points :

Physique : - premier problème : 50 %
 - deuxième problème : 50 %

Premier problème : Fonctionnement d'un générateur à turbine

Le problème se décompose en 2 volets :

- la première partie introductive est consacrée à l'étude du cycle idéal de Carnot ;
- la deuxième partie traite d'un générateur à turbine à gaz fonctionnant sur un cycle de Brayton ; l'énergie thermique des gaz sortant de la turbine est réutilisée pour améliorer le rendement de la turbine, c'est la régénération.

Les industries, les hôpitaux et les villes sont des sites qui ont besoin d'un apport d'énergie très important : les consommations d'électricité, de chaleur ou de froid y sont nécessaires conjointement. De petites turbines à gaz intégrées à de grands immeubles, à des quartiers administratifs, à des centres commerciaux ou à des usines assurent la stabilité et le contrôle local de leurs productions.

Première partie : Cycle de Carnot

I/ Diagramme de Watt

Le cycle réversible de Carnot décrit par le fluide est constitué des quatre transformations :

- deux isothermes ($1 \rightarrow 1'$) et ($2 \rightarrow 2'$) de températures respectives T_1 et T_2 ($T_2 < T_1$) au cours desquelles sont échangés les transferts thermiques respectifs Q_1 et Q_2 ;
- deux adiabatiques ($1' \rightarrow 2$) et ($2' \rightarrow 1$) joignant les deux isothermes.

Ce cycle moteur est représenté dans le diagramme de Watt (P,V), visualisant la pression P du gaz en fonction du volume V qu'il occupe.

I.1/ Comparer qualitativement les pentes des tangentes aux courbes représentant une isotherme et une adiabatique réversible en un point commun du diagramme (P,V) pour un gaz parfait. Exprimer le rapport de ces deux pentes en fonction du rapport γ de ses capacités thermiques à pression et volume constants.

I.2/ En déduire la représentation du cycle moteur de Carnot en précisant son orientation, les états 1, 1', 2 et 2' du fluide, les isothermes T_1 et T_2 . Que représente l'aire du cycle ?

I.3/ Définir le rendement η de ce cycle puis l'exprimer en fonction des températures T_1 et T_2 . Calculer sa valeur pour $T_1 = 3000 \text{ K}$ et $T_2 = 300 \text{ K}$.

I.4/ Ce rendement dépend-il de la nature du fluide considéré ? Justifier que la valeur du rendement de Carnot ne peut être dépassée par aucun moteur réel fonctionnant entre les mêmes deux sources de chaleur.

II/ Diagramme entropique

Le diagramme entropique (T,S) est la représentation de la température T en fonction de l'entropie S du système étudié.

II.1/ Montrer que, lorsque la transformation subie par le fluide thermique est adiabatique et réversible, son entropie est conservée.

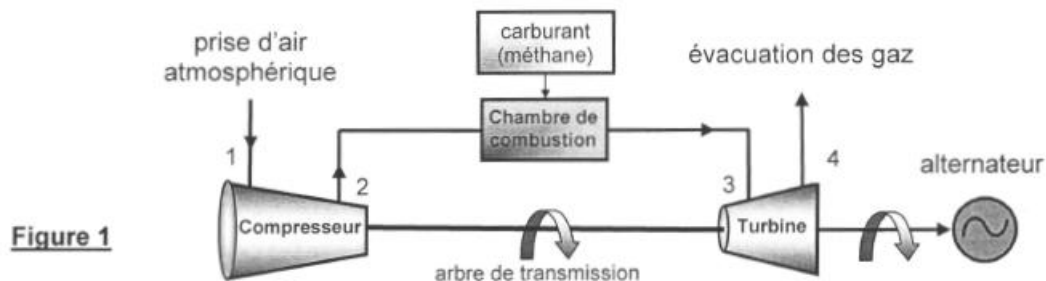
II.2/ Représenter le cycle de Carnot dans le diagramme (T,S) en précisant son orientation, les états 1, 1', 2 et 2' du fluide, les températures T_1 et T_2 ainsi que les entropies maximales et minimales du système, notées respectivement $S_{\max}$ et $S_{\min}$.

II.3/ Exprimer $\Delta S_{1 \rightarrow 1'}$ et $\Delta S_{2 \rightarrow 2'}$ en fonction de $S_{\max}$ et $S_{\min}$, puis en fonction de Q_1 , Q_2 , T_1 , et T_2 .

II.4/ Comparer, en le justifiant, l'aire de ce cycle réversible à l'aire du cycle visualisé en diagramme de Watt.

Deuxième partie : Etude d'un générateur à turbine à gaz

Le schéma simplifié du générateur à turbine est représenté ci-dessous :



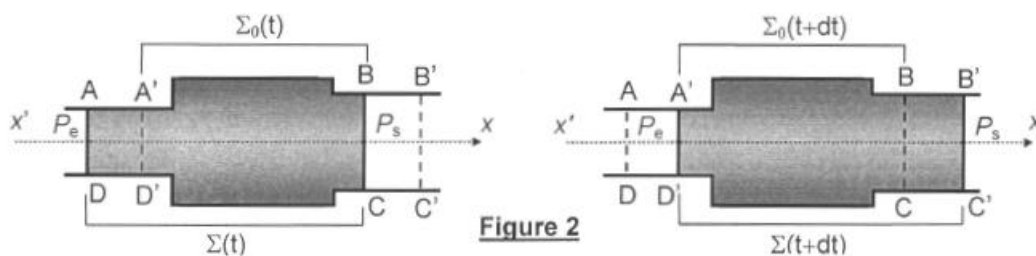
L'énergie thermique est fournie dans la chambre de combustion et l'énergie mécanique est récupérée sur l'arbre de transmission de la turbine pour entraîner le compresseur et actionner l'alternateur. Les éléments de la turbine à gaz (compresseur, chambre à combustion, turbine, échangeurs thermiques) traversés par le fluide en écoulement sont des systèmes ouverts.

III/ Premier principe pour un système ouvert

Les hypothèses suivantes seront adoptées tout au long du problème :

- le régime de fonctionnement de la machine est permanent ;
- les variations d'énergie cinétique et d'énergie potentielle de pesanteur du fluide traversant chaque partie du dispositif sont négligeables devant les autres formes d'énergie.

Schéma de principe :



Le volume de contrôles A'B'C'D' définit le système machine ouvert Σ_0 . La masse de fluide gazeux contenue dans ce volume est notée $m_0(t)$ à la date t et $m_0(t+dt)$ à la date $t+dt$. Le fluide s'écoule du réservoir de pression P_e au réservoir de pression P_s ($P_e > P_s$) : pendant la durée dt , une masse δm_e (contenue dans le volume AA'DD') entre par l'ouverture de section S_e et une masse δm_s (contenue dans le volume BB'CC') sort par l'ouverture de section S_s .

Le système fermé Σ considéré pour cette étude occupe à l'instant t le volume ABCD puis à l'instant $t+dt$ le volume A'B'C'D'.

Pour les fluides entrant et sortant, u , h et v désignent respectivement l'énergie interne massique, l'enthalpie massique et le volume massique du fluide. L'indice « e » est relatif aux grandeurs d'entrée du secteur AA'DD' et l'indice « s » aux grandeurs de sortie du secteur BB'CC'.

Les grandeurs d'échange massiques entre ce système et le milieu extérieur sont :

- le transfert thermique massique q ;
- le travail massique w_p exercé par les forces pressantes à l'entrée et à la sortie de la machine ;
- le travail massique utile w_u fournie à l'intérieur de la machine par des pièces mobiles (ailettes ou pistons).

III.1/ Etablir un bilan de masse pour le système Σ entre les instants t et $t+dt$. En déduire une relation simple entre δm_e et δm_s .

III.2/ Déterminer en fonction de P_e , P_s , v_e et v_s le travail massique exercé par les forces de pression sur le système Σ entre les instants t et $t+dt$.

III.3/ En appliquant le premier principe de la thermodynamique au système Σ entre les instants t et $t+dt$, montrer que : $h_s - h_e = w_u + q$

IV/ Cycle de Brayton idéal

Le fluide utilisé dans les générateurs à turbine à gaz est l'air atmosphérique.

Les étapes successives du cycle de Brayton réversible décrit par l'air sont les suivantes :

1→2 : l'air atmosphérique s'engage en (1) dans le compresseur où il est comprimé de façon isentropique.

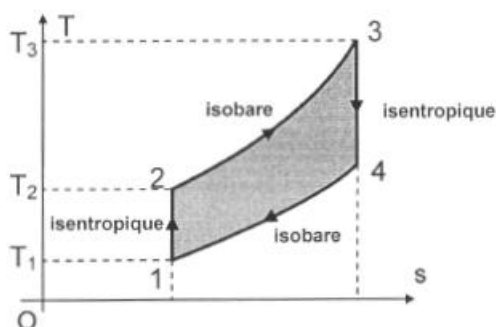
2→3 : l'air frais est ensuite admis dans la chambre de combustion où le gaz naturel est injecté et s'enflamme. Le fluide est porté à des températures très élevées de façon isobare, sans apport de travail. Sa composition n'est pas modifiée.

3→4 : le gaz chaud subit dans la turbine une détente isentropique. Cette détente est utilisée pour produire un travail mécanique dont une partie sert à faire fonctionner le compresseur alors que l'autre actionne l'alternateur. A la sortie (4) de la turbine, les gaz d'échappement sont évacués vers l'atmosphère.

4→1 : le gaz chaud qui s'échappe subit un refroidissement sans apport de travail au contact de la source froide (l'air atmosphérique). Le transfert thermique est isobare.

L'air atmosphérique, le mélange initial {air-gaz naturel} et les gaz brûlés d'échappement sont assimilés à un même gaz parfait. Le rapport de ses capacités thermiques à pression et volumes constants est supposé constant et égal à : $\gamma = 1,4$. Sa capacité thermique massique à pression constante est : $c_p = 1 \text{ kJ.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$.

Le cycle de Brayton est représenté dans le diagramme entropique, où T est la température du gaz et s son entropie massique :



$$T_1 = 300 \text{ K} \quad P_1 = 1 \text{ bar} \\ T_3 = 1300 \text{ K} \quad P_2 = 10 \text{ bars}$$

Posons pour simplifier :

$$\lambda = \left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \quad \text{et} \quad \tau = \frac{T_3}{T_1}$$

Figure 3

L'air est aspiré dans le compresseur à la pression $P_1 = 1$ bar et à la température $T_1 = 300$ K pour y être comprimé à la pression $P_2 = 10$ bar.

IV.1/ Démontrer la loi de Laplace relative au couple (P,T) en précisant ses conditions d'utilisation. En déduire T_2 et T_4 en fonction de λ , τ et T_1 . Applications numériques.

IV.2/ Exprimer puis calculer le travail massique de compression w_{12} absorbé par le gaz (fourni au gaz par le compresseur) au cours de la transformation adiabatique $1 \rightarrow 2$, en fonction de c_p , T_1 et λ .

IV.3/ A l'issue de la combustion (étape $2 \rightarrow 3$), la chambre fournit au gaz une énergie thermique massique de combustion q_{23} qui amène la température de celui-ci à la valeur $T_3 = 1300$ K. Exprimer q_{23} en fonction de c_p , T_1 , λ et τ . Réaliser l'application numérique.

IV.4/ Exprimer puis calculer le travail massique w_T récupéré par la turbine (fourni à la turbine par le gaz) au cours de la transformation $3 \rightarrow 4$, en fonction de c_p , λ , T_1 et τ .

Le travail w_c fourni au compresseur par la turbine est intégralement transféré au gaz par le compresseur au cours de la transformation $1 \rightarrow 2$: $w_c = w_{12}$.

IV.5/ Ecrire le travail utile w_a fourni par la turbine pour actionner l'alternateur, puis l'exprimer en fonction de c_p , λ , T_1 et τ ; effectuer l'application numérique.

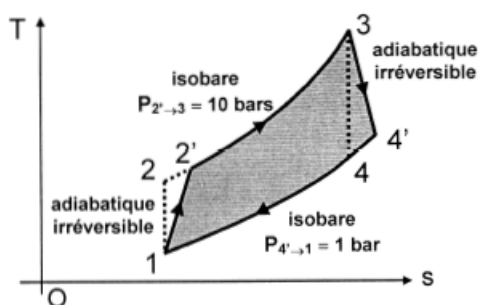
IV.6/ Calculer le rapport $R = \frac{w_c}{w_a}$ qui évalue la répartition entre le travail w_c que fournit la turbine au compresseur et le travail utile w_a qu'elle fournit à l'alternateur. Commenter.

IV.7/ Définir le rendement thermique η du générateur à la turbine et l'exprimer en fonction du paramètre λ . Calculer η pour le travail w_a fourni par la turbine à l'alternateur et le comparer à celui d'un cycle de Carnot fonctionnant entre les mêmes températures extrêmes.

IV.8/ Exprimer puis calculer le transfert thermique massique q_{41} reçu par le gaz au cours de la phase d'échappement $4 \rightarrow 1$, en fonction de c_p , λ , T_1 et τ . Cette énergie thermique est-elle une énergie récupérable ? Commenter.

V/ Cycle de Brayton réel

En réalité, des phénomènes irréversibles tant au niveau du compresseur qu'au niveau de la turbine se produisent et des chutes de pression apparaissent dans les conduits et dans la chambre de combustion. Le cycle réel décrit par la turbine diffère alors du cycle idéal décrit précédemment. Il est représenté dans le diagramme entropique par le cycle $12'34'$ comme schématisé ci-dessous :



Les irréversibilités dans le compresseur et dans la turbine sont prises en compte grâce aux rendements isentropiques :

$$\eta_c = \frac{h_2 - h_1}{h_{2'} - h_1} = 0,80 \quad \text{et} \quad \eta_T = \frac{h_4' - h_3}{h_4 - h_3} = 0,85$$

- $1 \rightarrow 2'$ et $3 \rightarrow 4'$: adiabatiques irréversibles
- $2' \rightarrow 3$ et $4' \rightarrow 1$: isobares

Figure 4

V.1/ Déterminer la température réelle de sortie du compresseur $T'_{2'}$, puis la température réelle à la sortie de la turbine $T'_{4'}$, en fonction de λ , T_1 , τ , η_c et η_T . Applications numériques.

V.2/ Exprimer puis calculer le travail massique de compression $w_{12'}$ absorbé par le gaz en fonction de c_p , T_1 , λ et η_c .

V.3/ Déterminer l'énergie thermique massique de la combustion réelle $q_{2'3}$, puis le travail réel w_T récupéré par le turbine au cours de la transformation $3 \rightarrow 4'$, en fonction de c_p , T_1 , λ , τ , η_c et η_T . Applications numériques.

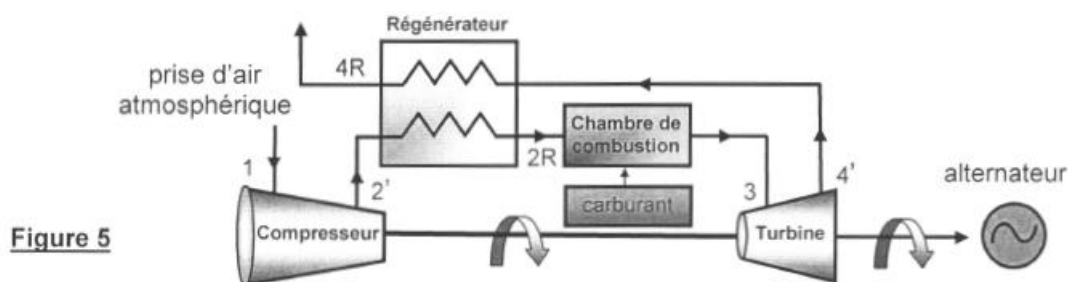
V.4/ Le travail w_c fourni au compresseur par la turbine est intégralement transféré au gaz par le compresseur au cours de la transformation $1 \rightarrow 2'$. Déterminer, en fonction de c_p , T_1 , λ , τ , η_c et η_T , le travail utile w_a fourni par la turbine pour actionner l'alternateur. Application numérique. Pour quelle valeur $\lambda'_{\max}$ de λ (fonction de τ , η_c et η_T), ce travail w_a est-il maximal ? Comparer cette valeur numérique $\lambda'_{\max}$ à la valeur de λ adoptée pour la turbine.

V.5/ Calculer le rapport $R' = \frac{w_c}{w_a}$ qui évalue la répartition entre le travail $w_c = w_{12'}$ que fournit la turbine pour actionner le compresseur et le travail utile w_a qu'elle destine à la rotation de l'alternateur. Calculer le rendement thermique η' du générateur à turbine pour le cycle réel. Comparer R' au rapport idéal R et η' au rendement η du cycle théorique. Commenter.

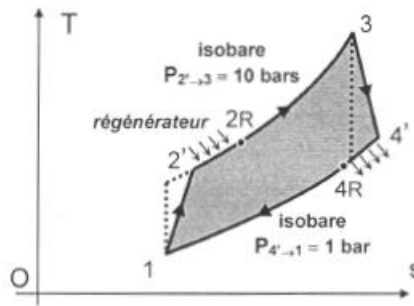
VI/ Régénérateur

La température des gaz d'échappement à la sortie de la turbine est considérablement plus élevée que la température de l'air comprimé admis dans la chambre de combustion. Une partie de la chaleur des gaz d'échappement peut ainsi être avantageusement récupérée pour le préchauffage de l'air de combustion. Le rendement du générateur à turbine, de faible valeur dans le cas du cycle de Brayton réel, en est ainsi amélioré.

Le « régénérateur » est un échangeur de chaleur intercalé entre le compresseur et la chambre de combustion. En traversant le régénérateur, les gaz d'échappement échauffent l'air comprimé en écoulement vers la chambre de combustion, moins de chaleur issue de la combustion du carburant est donc requise et moins de combustible se révèle nécessaire.



Les travaux et la chaleur $q_{2'3}$ échangés restent les mêmes que dans le cas précédent sans régénération, seul l'apport de chaleur que doit fournir la combustion est modifié.



Le régénérateur fonctionne de manière isobare. Le coefficient d'efficacité ε de l'échangeur est défini comme le rapport entre le transfert thermique reçu par le gaz et celui que l'on pourrait recueillir au maximum :

$$\varepsilon = \frac{h_{2R} - h_{2'}}{h_4 - h_{2'}} = 0,95.$$

Figure 6

VI.1/ Préciser la valeur numérique de la température de sortie du régénérateur T_{2R} .

VI.2/ Calculer le transfert thermique massique $q_{2'2R}$ reçu par le gaz en sortie de l'échangeur.

VI.3/ Conclure sur la valeur du rendement η_R du cycle de Brayton réel avec régénération.

Second problème : Oscillations mécaniques

Première partie : Oscillations d'un pendule simple

Un objet ponctuel A de masse m est suspendu à l'extrémité P d'un fil OP de masse négligeable et de longueur L . Il peut effectuer des mouvements de rotation dans le plan vertical (Oxy), autour de l'axe horizontal (Oz).

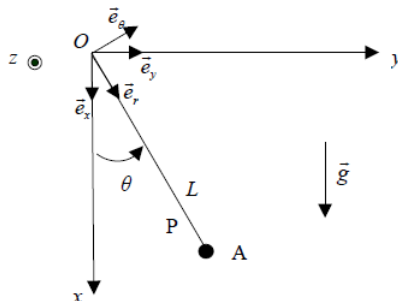
La position de l'objet A est repérée par l'angle θ que fait le fil avec la verticale.

L'étude sera menée dans le référentiel terrestre considéré comme galiléen.

Les frottements au niveau de l'axe de rotation seront négligés dans toutes les questions.

Les frottements de l'air seront négligés dans toutes les questions hormis dans les questions II.5 et III.5 où l'on envisagera un amortissement par frottement fluide.

L'ensemble ainsi décrit se trouve dans le champ de pesanteur terrestre caractérisé par le vecteur $\vec{g}$ tel que $\vec{g} = g\vec{e}_x$.



I/ Etude dynamique : équation différentielle du mouvement

I.1/ Faire le bilan des forces appliquées à l'objet A. En appliquant le théorème du moment cinétique en coordonnées cylindriques par rapport au point O, déterminer l'équation différentielle du second ordre vérifiée par l'angle θ .

I.2/ Déterminer à l'aide de l'équation précédente la ou les positions d'équilibre du système. Etudier, en justifiant les résultats, la stabilité de ces positions.

II/ Petites oscillations

II.1/ A l'instant $t = 0$, l'objet A est abandonné sans vitesse initiale d'une position repérée par l'angle θ_0 . On se place dans le cas où l'angle θ_0 est petit. Montrer que le système constitue alors un oscillateur harmonique.

En déduire la pulsation ω_0 et la période T_0 des petites oscillations du système autour de sa position d'équilibre stable. On exprimera ω_0 et T_0 en fonction de g et L .

II.2/ Compte tenu des conditions initiales, déterminer l'expression $\theta(t)$ de l'angle θ en fonction du temps pour $t \geq 0$.

II.3/ Quelle est la valeur maximale $v_{\max}$ de la vitesse de l'objet A au cours de son mouvement ? On exprimera $v_{\max}$ en fonction de θ_0 , L et g .

II.4/ Tracer la représentation graphique de θ en fonction du temps.

II.5/ Amortissement par frottement fluide

Nous nous plaçons dans le cas où l'objet A est soumis à un frottement fluide proportionnel à sa vitesse. Soit h le coefficient de proportionnalité entre la force de frottement $\vec{f}$ et la vitesse $\vec{v}$ de l'objet A. La force de frottement s'écrit donc sous la forme $\vec{f} = -h\vec{v}$.

Etablir l'équation différentielle du second ordre vérifiée par l'angle θ .

Les frottements sont supposés suffisamment faibles pour que le régime d'oscillations de l'objet A soit pseudo-périodique.

Déterminer alors, dans le cas des petites oscillations, la solution $\theta(t)$ de l'équation différentielle du second ordre vérifiée par l'angle θ lorsque l'objet A est abandonné sans vitesse initiale d'une position repérée par l'angle θ_0 .

Donner, dans ce cas, l'allure de la représentation graphique de $\theta(t)$ en fonction du temps.

III/ Aspect énergétique

Nous nous proposons, dans cette question, de retrouver l'équation différentielle du mouvement du pendule par une méthode énergétique.

L'étude sera faite dans le cas général de mouvements d'amplitude quelconque.

III.1/ Déterminer, pour une position du pendule repérée par un angle θ quelconque, l'expression de l'énergie cinétique E_c de l'objet A (pour $t \geq 0$) en fonction de m , L et $\frac{d\theta}{dt}$.

III.2/ Déterminer de même, pour une position du pendule repérée par un angle θ quelconque, l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur E_p de l'objet A (pour $t \geq 0$) en fonction de m , L , θ et g accélération de la pesanteur. On prendra la référence de l'énergie potentielle de pesanteur dans la position repérée par l'angle $\theta = 90^\circ$.

III.3/ Sachant que dans cette question tous les frottements sont négligés, retrouver par des considérations énergétiques l'équation différentielle du second ordre vérifiée par l'angle θ au cours du temps.

III.4/ Dans le cas des mouvements de faible amplitude, l'énergie potentielle de pesanteur et l'énergie cinétique de l'objet A sont des fonctions périodiques du temps. Déterminer la période T_0' de ces fonctions en fonction de T_0 (période définie dans la question II.1). Justifier le résultat.

III.5/ Amortissement par frottement fluide

Nous nous plaçons à nouveau dans le cas où l'objet A est soumis à un frottement fluide proportionnel à sa vitesse. Soit h le coefficient de proportionnalité entre la force de frottement $\vec{f}$ et la vitesse $\vec{v}$ de l'objet A. La force de frottement s'écrit donc sous la forme $\vec{f} = -h\vec{v}$.

Compte tenu des expressions de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle de pesanteur de l'objet A déterminées précédemment, retrouver par des considérations énergétiques l'équation différentielle du mouvement de la question II.5 dans le cas où l'on prend en compte la présence d'un frottement fluide.

Deuxième partie : Rotation d'un pendule composé autour d'un axe fixe

On considère un pendule composé constitué :

- d'un disque homogène A, de masse m , de rayon R , de centre P ;
- d'une tige OP homogène de masse m' , de longueur L , de milieu C.

Le disque et la tige sont rigidement liés l'un à l'autre et contenus dans le plan (Oxy).

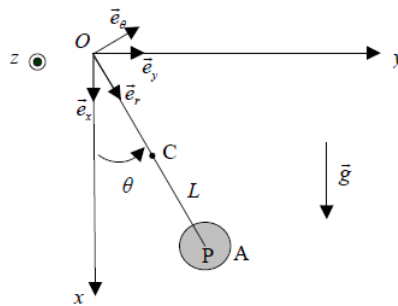
L'ensemble constitué par le disque A et la tige OP peut effectuer des mouvements de rotation dans le plan vertical (Oxy), autour de l'axe horizontal (Oz).

La position du pendule précédent est repérée par l'angle θ que fait la tige avec la verticale.

On négligera tout frottement.

L'étude sera menée dans le référentiel terrestre considéré comme galiléen.

L'ensemble ainsi décrit se trouve dans le champ de pesanteur terrestre caractérisé par le vecteur $\vec{g}$ tel que $\vec{g} = g\vec{e}_x$.



Le moment d'inertie I_0 de la tige par rapport à un axe perpendiculaire à la tige et passant par le point

C est égal à $I_0 = m' \frac{L^2}{12}$.

Le moment d'inertie I_1 de la tige par rapport à l'axe horizontal (Oz) est égal à

$$I_1 = I_0 + m' \left(\frac{L}{2} \right)^2 = m' \frac{L^2}{3}.$$

Le moment d'inertie J_0 du disque A par rapport à un axe perpendiculaire au disque et passant par son

centre P est égal à $J_0 = m \frac{R^2}{2}$.

Le moment d'inertie J_1 du disque par rapport à l'axe horizontal (Oz) est égal à

$$J_1 = J_0 + mL^2 = m \frac{R^2}{2} + mL^2.$$

IV/ Moment d'inertie du pendule composé

Déterminer l'expression du moment d'inertie J du système {disque A + tige OP} par rapport à l'axe horizontal (Oz). On exprimera J en fonction de m , m' , R et L .

V/ Etude dynamique : équation différentielle du mouvement

V.1/ Faire le bilan des forces appliquées au système {disque A + tige OP}.

V.2/ En appliquant le théorème du moment cinétique au système {disque A + tige OP}, déterminer l'équation différentielle vérifiée par l'angle θ au cours du temps.

V.3/ A l'instant $t = 0$, le système {disque A + tige OP} est abandonné sans vitesse initiale d'une position repérée par l'angle θ_1 . On se place dans le cas où l'angle θ_1 est petit. Montrer que le système constitue alors un oscillateur harmonique.

En déduire la pulsation ω_1 et la période T_1 des petites oscillations du système {disque A + tige OP} autour de sa position d'équilibre stable ($\theta = 0$). On exprimera ω_1 et T_1 en fonction de J , L , m , m' et g .

VI/ Simplification : retour au cas du pendule simple

On considère les hypothèses simplificatrices suivantes :

- la masse m' de la tige OP est négligeable devant la masse m du disque,
- le disque A est de très petite taille de telle sorte que l'on peut le considérer comme ponctuel.

En détaillant clairement les simplifications induites par les hypothèses précédentes, indiquer ce que devient l'équation différentielle vérifiée par l'angle θ au cours du temps.

Comparer le cas présent au cas du pendule simple de la première partie.

Troisième partie : Oscillations d'un aimant dans un champ magnétique

Le disque A de la partie précédente est ici remplacé par un petit aimant, considéré comme ponctuel, de masse m , de moment magnétique $\vec{M}$, suspendu rigidement à l'extrémité P de la tige OP de longueur L .

Dans cette partie, on négligera le moment d'inertie de la tige devant celui de l'aimant et le poids de la tige devant celui de l'aimant.

Le système {tige + aimant} peut effectuer des mouvements de rotation dans le plan vertical (Oxy), autour de l'axe horizontal (Oz). Durant les oscillations du système, le moment magnétique $\vec{M}$ reste constamment perpendiculaire à $\vec{OP}$.

La position du système {tige + aimant} est repérée par l'angle θ que fait la tige avec la verticale.

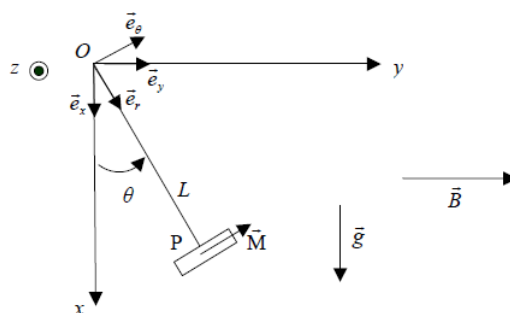
On négligera tout frottement.

L'étude sera menée dans le référentiel terrestre considéré comme galiléen.

L'ensemble ainsi décrit se trouve dans le champ de pesanteur terrestre caractérisé par le vecteur $\vec{g}$ tel que $\vec{g} = g\vec{e}_x$.

Le système est maintenant plongé dans un champ magnétique $\vec{B} = B\vec{e}_y$ uniforme et horizontal.

La valeur algébrique de B peut être positive ou négative.



VII.1/ Quelle est l'expression vectorielle du couple $\vec{\Gamma}$ qui s'exerce sur l'aimant compte tenu de la présence du champ magnétique ? On exprimera $\vec{\Gamma}$ en fonction de M , B , θ et d'un vecteur unitaire que l'on précisera.

VII.2/ En appliquant le théorème du moment cinétique au système {tige + aimant}, par rapport au point O, en coordonnées cylindriques, déterminer l'équation différentielle du second ordre vérifiée par l'angle θ .

VII.3/ Par intégration par rapport au temps de l'équation différentielle précédente, déterminer l'expression de l'énergie cinétique E_c et de l'énergie potentielle E_p du système {tige + aimant}.

On prendra la référence de l'énergie potentielle dans la position repérée par l'angle $\theta = 90^\circ$.

VII.4/ En utilisant l'expression de l'énergie potentielle obtenue précédemment, déterminer les positions d'équilibre du système.

Etudier la stabilité de ces positions d'équilibre. On distinguera clairement le cas où $MB > -mgL$ et le cas où $MB < -mgL$.

VII.5/ Donner l'expression de la pulsation ω_2 des petites oscillations du système autour de ses positions d'équilibre stable en fonction de m , g , M , B et L . On distinguera les deux cas mentionnés dans la question précédente.