

## **Devoir Surveillé n°4**

**Durée : 4 heures**

**Les calculatrices personnelles sont interdites.**

### **Instructions générales**

Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction. La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non encadrés et non justifiés ne seront pas pris en compte.

Toute application numérique ne comportant pas d'unité ne donnera pas lieu à attribution de points.

Les quatre problèmes sont indépendants. Les diverses parties peuvent être traitées dans l'ordre choisi par le candidat. Le candidat prendra soin de bien numéroter les questions.

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

### **Physique :**

**Problème 1 (1 h) : Extrait CCP 2010**

**Problème 2 (1 h 30) : Extrait CCP 2009**

**Problème 3 (30 min) : Extrait Centrale-Supélec 2011**

### **Chimie :**

**Problème 4 (1 h) : Extrait Centrale-Supélec 2012**

Au moins un point doit être obtenu au problème de chimie pour que je corrige la partie physique.

### Troisième problème : A propos du théorème de Gauss

Dans tout le problème,  $\varepsilon_0$  représente la permittivité diélectrique de l'air, égale à celle du vide.

#### Première partie : Le théorème de Gauss

1 – Enoncer le théorème de Gauss relatif au flux sortant du champ électrostatique  $\vec{E}$  à travers une surface fermée  $S$  contenant la charge électrique  $Q_{int}$ .

Donner l'expression de l'équation de Maxwell qui permet de démontrer le théorème de Gauss.

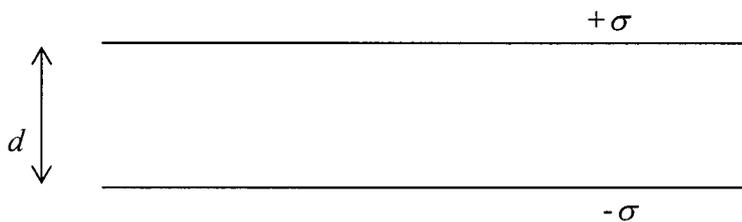
#### Deuxième partie : Condensateur plan

2 – On considère un plan infini uniformément chargé avec une densité surfacique  $\sigma$  positive.

En considérant les propriétés de symétrie de la distribution de charges, montrer que le champ électrostatique  $\vec{E}$  créé par un plan infini uniformément chargé avec une densité surfacique  $\sigma$  est orthogonal au plan.

Démontrer que  $\vec{E}$  est tel que sa norme  $E$  vaut  $E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ . Représenter sur un schéma le vecteur  $\vec{E}$  de part et d'autre du plan. On indiquera avec précision la surface de Gauss choisie.

3 – Soit un condensateur plan constitué par deux plans infinis, parallèles, uniformément chargés et séparés par une distance  $d$ . Le plan supérieur étant chargé avec une densité surfacique  $\sigma$  positive et le plan inférieur étant chargé avec une densité  $-\sigma$ .

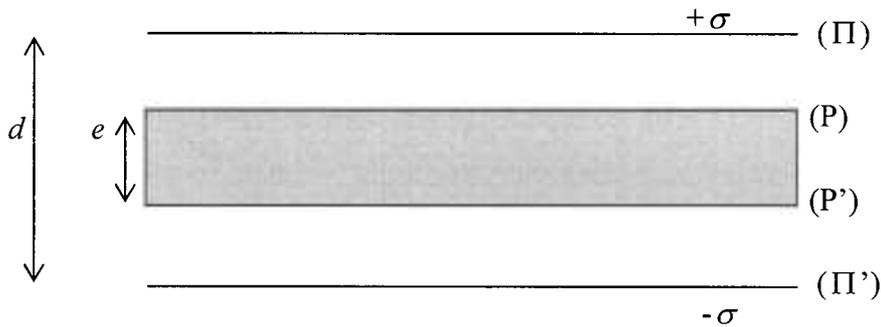


3.1 – En utilisant le théorème de superposition, déduire de la question précédente le champ électrostatique en tout point de l'espace.

3.2 – Déterminer la différence de potentiel  $U$  entre les deux plans du condensateur. On exprimera  $U$  en fonction de  $\varepsilon_0$ ,  $\sigma$  et  $d$ . Identifier clairement, en le justifiant, le plan dont le potentiel est le plus élevé.

3.3 – Définir et déterminer la capacité  $C$  du condensateur par unité de surface. On exprimera  $C$  en fonction de  $\varepsilon_0$  et  $d$ .

4 – On introduit entre les deux plaques du condensateur plan précédent une plaque métallique parallélépipédique d'épaisseur  $e < d$  parallèle aux armatures du condensateur. L'épaisseur  $e$  est donc une grandeur finie, mais on considère que les autres dimensions de la plaque métallique sont infinies.



On admet que le champ électrostatique est nul à l'intérieur du métal.

Justifier le fait qu'il apparaîtra des charges électriques sur les surfaces supérieure  $P$  et inférieure  $P'$  de la plaque métallique. Déterminer le signe de ces charges. On pourra s'aider d'un schéma succinct.

5 – En utilisant le théorème de Gauss sur une surface que l'on précisera, déterminer les densités surfaciques de charge  $\sigma_p$  et  $\sigma_{p'}$ , qui apparaissent sur les surfaces  $P$  et  $P'$  de la plaque métallique.

Exprimer  $\sigma_p$  et  $\sigma_{p'}$  en fonction de  $\sigma$ .

6.1 – Déterminer la valeur du champ électrostatique en un point du condensateur extérieur à la plaque métallique (entre  $P$  et  $\Pi$  d'une part et entre  $P'$  et  $\Pi'$  d'autre part).

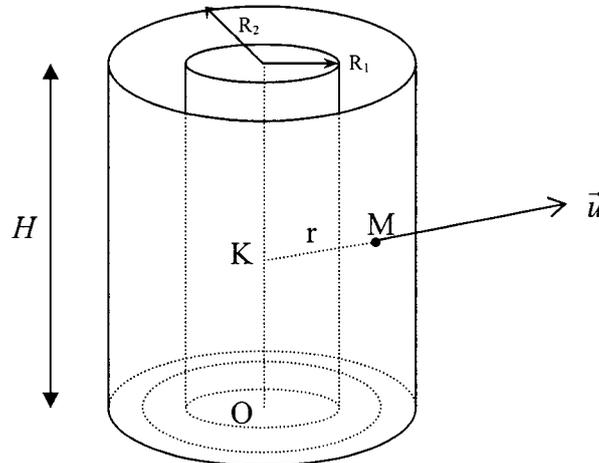
En déduire la différence de potentiel  $U'$  entre les deux armatures du condensateur. On exprimera  $U'$  en fonction de  $\sigma$ ,  $e$ ,  $d$  et  $\epsilon_0$ .

6.2 – En déduire la capacité surfacique  $C'$  du condensateur ainsi obtenu. On exprimera  $C'$  en fonction de  $e$ ,  $d$  et  $\epsilon_0$ . Conclure quant à l'influence de la plaque métallique sur la capacité surfacique du condensateur.

### Troisième partie : Condensateur cylindrique

On considère un condensateur cylindrique composé de deux armatures coaxiales de hauteur  $H$  et de rayons respectifs  $R_1$  et  $R_2$  avec  $R_1 < R_2$  et placées dans l'air. L'armature interne porte la charge électrique  $Q > 0$ . L'armature externe porte une charge totale  $-Q$ .

Les potentiels électriques des armatures sont respectivement  $V_1$  et  $V_2$ . Soit un point  $M$  situé à la distance  $r = KM$  de l'axe :  $R_1 < r < R_2$ .  $K$  est la projection orthogonale du point  $M$  sur l'axe du condensateur.



Soit  $\vec{u}$  le vecteur unitaire de la droite  $(KM)$  dirigé de  $K$  vers  $M$ .

On admettra que le champ électrostatique  $\vec{E}$  créé au point  $M$  est radial et sa norme ne dépend que de  $r$ . On peut donc écrire :  $\vec{E} = E(r) \vec{u}$ .

On néglige les effets de bord.

7 – En appliquant le théorème de Gauss à une surface  $S$  que l'on précisera, déterminer l'expression de  $E(r)$ . On exprimera  $E(r)$  en fonction de  $Q$ ,  $\epsilon_0$ ,  $r$  et  $H$ . On distinguera les cas selon que  $r < R_1$ ,  $R_1 < r < R_2$  ou  $r > R_2$ .

8 – En déduire le potentiel  $V(r)$  à une distance  $r$  de l'axe lorsque  $R_1 < r < R_2$ . On exprimera  $V(r)$  en fonction de  $Q$ ,  $H$ ,  $V_1$ ,  $R_1$ ,  $\epsilon_0$  et  $r$ . En déduire la différence de potentiel  $U = V_1 - V_2$  entre les deux armatures du condensateur en fonction de  $Q$ ,  $\epsilon_0$ ,  $H$ ,  $R_1$  et  $R_2$ .

9 – Déterminer la capacité  $C$  du condensateur en fonction de  $\epsilon_0$ ,  $H$ ,  $R_2$  et  $R_1$ .

10 – On peut associer au champ électrostatique une densité volumique d'énergie  $u_{el}$  égale à  $\frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$ .

En utilisant l'expression de  $E(r)$  déterminée précédemment et en intégrant l'expression de  $u_{el}$  déterminer l'énergie  $W_{cond}$  accumulée par le condensateur. On exprimera  $W_{cond}$  en fonction de  $Q$ ,  $\epsilon_0$ ,  $H$ ,  $R_1$  et  $R_2$ . En déduire l'expression de  $W_{cond}$  en fonction de  $Q$  et  $C$ .

11 – En effectuant un développement limité de l'expression de la capacité déterminée à la question 9, montrer que si les rayons des armatures sont très proches, c'est-à-dire si  $R_2 - R_1 = e \ll R_1$ , le condensateur cylindrique est équivalent à un condensateur plan dont on précisera les caractéristiques.

**Fin de l'énoncé**

15. D'après la question 13., la puissance fournie par le générateur ne dépend pas de la présence ou non de la spire. Comment expliquer alors le paradoxe suivant : le générateur fournit la même quantité d'énergie qu'il y ait ou non l'effet Joule dans R calculé dans la question 10. ? Cette énergie est-elle « gratuite » ce qui contredirait le principe de conservation ? Indication : étudier le champ magnétique créé dans le solénoïde par la spire. Aucun calcul n'est demandé, seulement un raisonnement qualitatif.

### Problème n° 3 : MECANIQUE

**Avertissement : Le but de ce problème est de tester les capacités du candidat à mener à bien des calculs de physique, la démarche à suivre étant indiquée. Les réponses devront être données *uniquement en fonction des paramètres proposés à l'exclusion de tout autre*. Le candidat veillera bien à l'homogénéité de ses formules, à la logique de l'orientation de ses vecteurs, à la compatibilité de ses résultats avec le bon sens physique avant de passer à la question suivante...**

On considère une barre AB homogène, de centre d'inertie G, de longueur  $2L$ , d'épaisseur négligeable et de masse M (qui pourrait par exemple modéliser une échelle), glissant sous l'effet de son poids le long d'un mur. Le point A est en contact avec le sol (supposé parfaitement horizontal et servant d'axe cartésien Ox) et le point B est en contact avec le mur (supposé parfaitement vertical et servant d'axe cartésien Oy).

Les notations sont celles de la figure 4 page 8/10. On suppose que les points A et B restent en contact avec le sol et le mur au cours du mouvement de la barre.

Les calculs des vecteurs seront faits dans la base cartésienne orthonormée  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  de la figure 4. Les vecteurs demandés pourront être mis soit sous la forme « en ligne » :  $\vec{V} = V_x \vec{i} + V_y \vec{j}$ , soit sous la forme « en colonne » :  $\begin{pmatrix} V_x \\ V_y \end{pmatrix}$ .

On note  $V$  la norme de la vitesse du point A ( $V$  dépend du temps). Le vecteur vitesse du point A peut donc s'écrire  $\vec{V}_A = V \vec{i}$ .

On note  $\theta$  l'angle orienté entre le mur et la barre.

La position d'un point P quelconque de la barre est repérée par la distance  $r = AP$ .

Le champ de pesanteur terrestre est supposé uniforme et noté  $\vec{g} = -g \vec{j}$  ( $g > 0$ ).

Le référentiel d'étude (dans lequel le système d'axes Ox Oy est fixe) est supposé galiléen.

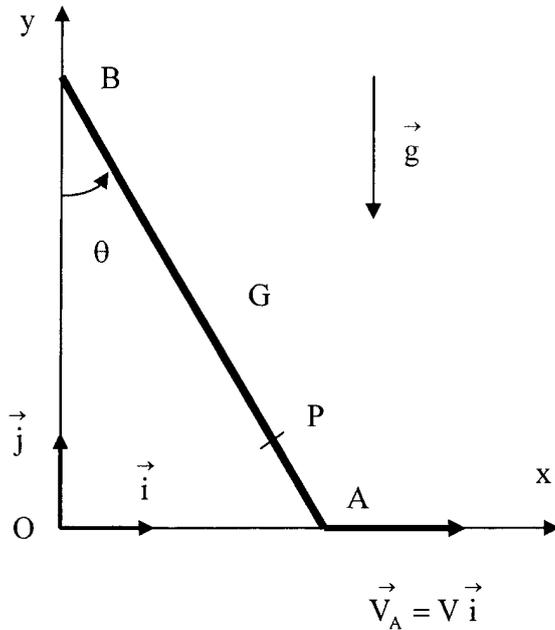


Figure 4

**Partie I : Etude cinématique du mouvement.**

1.

- a. Exprimer le vecteur position  $\vec{OA}$  du point A en fonction de L,  $\theta$  et  $\vec{i}$ .
- b. Exprimer le vecteur position  $\vec{OB}$  du point B en fonction de L,  $\theta$  et  $\vec{j}$ .
- c. Exprimer le vecteur  $\vec{AB}$  en fonction de L,  $\theta$ ,  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$ .

2.

- a. Montrer que le vecteur position du point G est tel que  $\vec{OG} = \vec{OA} + \frac{\vec{AB}}{2}$ .
- b. Exprimer le vecteur position  $\vec{OG}$  du point G en fonction de L,  $\theta$ ,  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$ .
- c. Montrer que la trajectoire du point G est un arc de cercle dont on précisera le centre et le rayon.

3.

- a. Exprimer le vecteur position  $\vec{OP}$  d'un point P quelconque de la barre AB en fonction de L, r,  $\theta$ ,  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$ .
- b. Montrer que la trajectoire de ce point P est une portion d'ellipse, dont on précisera le centre, les axes et les longueurs de ces axes (on supposera  $r < L$ ).
- c. Représenter l'allure de cette portion d'ellipse lorsque  $r = \frac{L}{2}$ .

4.

- a. En remarquant que  $\vec{OB} = \vec{OA} + \vec{AB}$ , déterminer la relation donnant la vitesse  $\vec{V}_B$  du point B en fonction de  $\vec{V}_A$ , L,  $\theta$ ,  $\frac{d\theta}{dt}$  (dérivée de  $\theta$  par rapport au temps),  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$ .

- b. En remarquant que la vitesse du point B doit être orientée parallèlement à  $\vec{j}$ ,  
montrer que  $\frac{d\theta}{dt} = \frac{V}{2L \cos \theta}$ .
- c. Exprimer alors la vitesse du point B uniquement en fonction de  $V$ ,  $\theta$  et  $\vec{j}$ .
- 5.
- a. En vous servant de la question 2.b, donner l'expression de la vitesse  $\vec{V}_G$  du point G en fonction de  $L$ ,  $\theta$ ,  $\frac{d\theta}{dt}$ ,  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$ .
- b. En déduire en utilisant la question 4.b l'expression de la vitesse  $\vec{V}_G$  du point G en fonction de  $\theta$ ,  $V$ ,  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$ .
6. Déterminer l'expression de l'accélération  $\vec{a}_G$  du point G en fonction de  $L$ ,  $\theta$ ,  $\frac{d\theta}{dt}$ ,  $\frac{d^2\theta}{dt^2}$  (dérivée seconde de  $\theta$  par rapport au temps),  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$ .
- 7.
- a. En vous servant de la question 3.a, donner l'expression de la vitesse  $\vec{V}_P$  d'un point quelconque P en fonction de  $L$ ,  $r$ ,  $\theta$ ,  $\frac{d\theta}{dt}$ ,  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$ .
- b. En déduire, en utilisant la question 4.b, l'expression de la vitesse  $\vec{V}_P$  d'un point quelconque P en fonction de  $r$ ,  $L$ ,  $\theta$ ,  $V$ ,  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$ .
- c. Vérifier en prenant pour  $r$  les valeurs  $L$  et  $2L$  que vous retrouvez les résultats des questions 5.b et 4.c.

## **Partie II : Etude énergétique du mouvement, relation entre V et $\theta$ .**

On suppose que la barre est soumise uniquement à son poids et aux deux actions de contact  $\vec{R}_A$  et  $\vec{R}_B$  en A et B. On suppose que ces deux actions de contact sont sans frottement.

8. **Montrer** que les puissances de ces actions de contact en A et B sont nulles.
- 9.
- a. **Donner** l'énergie potentielle de pesanteur  $E_p$  de la barre en fonction de  $M$ ,  $g$  et  $y_G$  ( $y_G$  représentant l'ordonnée cartésienne du point G). On prendra par convention l'énergie potentielle nulle quand  $y_G = 0$ .
- b. **Démontrer** la formule précédente en utilisant la définition d'une énergie potentielle.
- c. Donner l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur en fonction de  $M$ ,  $g$ ,  $L$  et  $\theta$ .

On admet pour la suite du problème que l'énergie cinétique  $E_C$  de la barre vaut  $E_C = \frac{MV^2}{6 \cos^2 \theta}$ .

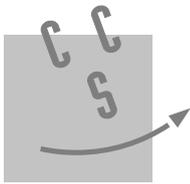
- 10.
- Définir et calculer l'énergie mécanique de la barre en fonction de  $M$ ,  $V$ ,  $g$ ,  $L$  et  $\theta$ .
  - Justifier très clairement que l'énergie mécanique de la barre est constante.
  - Donner la valeur de l'énergie mécanique en fonction de  $M$ ,  $g$  et  $L$ , si on suppose qu'au début du mouvement la barre est quasiment verticale avec une vitesse initiale quasiment nulle.
- 11.
- En déduire  $V^2$  en fonction de  $g$ ,  $L$  et  $\theta$  au cours du mouvement.
  - Déduire de la question précédente et de la question 4.b, la relation donnant  $\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$  en fonction de  $g$ ,  $L$  et  $\theta$ .
  - Déduire de la question précédente la relation donnant  $\frac{d^2\theta}{dt^2}$ , dérivée seconde de  $\theta$  par rapport au temps, en fonction de  $g$ ,  $L$  et  $\theta$ .

**Partie III : Etude dynamique du mouvement, vérification de l'hypothèse initiale de contact de la barre avec le sol et le mur.**

Le but de cette partie est de trouver l'expression des actions de contact en A et B afin de vérifier si l'hypothèse de contact de la barre en A et B au cours du mouvement est bien valable.

12. En utilisant les questions 6, 11.b et 11.c, exprimer  $\vec{a}_G$  en fonction de  $g$ ,  $\theta$ ,  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$ .
- 13.
- En appliquant le théorème de la résultante dynamique, donner la relation liant  $M$ ,  $\vec{a}_G$ ,  $\vec{g}$ ,  $\vec{R}_A$  et  $\vec{R}_B$ .
  - En projetant l'équation précédente parallèlement à  $\vec{i}$ , en déduire  $\vec{R}_B$  en fonction de  $M$ ,  $g$ ,  $\theta$  et  $\vec{i}$ .
  - En projetant la même équation parallèlement à  $\vec{j}$ , en déduire  $\vec{R}_A$  en fonction de  $M$ ,  $g$ ,  $\theta$  et  $\vec{j}$ .
14. Montrer que  $\vec{R}_B$  peut s'annuler pour une valeur de  $\theta$  (différente de zéro !) qu'on déterminera.
15. On montre par un calcul similaire que  $\vec{R}_A$  peut s'annuler pour  $\theta = \text{Arccos}\left(\frac{1}{3}\right)$ . Quelle conclusion tirez-vous de ces deux derniers résultats quant à l'hypothèse de contact de la barre avec le mur et le sol ?

*Fin de l'énoncé*



Les résultats numériques seront donnés avec un nombre de chiffres significatifs compatible avec celui utilisé pour les données.

## À propos de l'atmosphère terrestre

Ce problème, ayant pour thème l'atmosphère terrestre, est constitué de deux parties totalement indépendantes. La première est consacrée à l'étude de la propagation d'ondes électromagnétiques dans l'atmosphère et à une modélisation de leur amortissement. La seconde partie aborde quelques aspects thermodynamiques de l'atmosphère. Tout résultat fourni par l'énoncé peut être utilisé ultérieurement sans justification.

### I L'atmosphère : une cavité électromagnétique naturelle

Cette partie est consacrée à l'étude des ondes électromagnétiques, appelées ondes de Schumann, susceptibles de se propager dans la cavité atmosphérique et de leur amortissement.

Toutes les valeurs numériques ou formules utiles dans cette partie, sont regroupées ci-après.

- Altitude de l'ionosphère :  $h = 1,00 \times 10^2$  km
- Rayon terrestre :  $R_T = 6,40 \times 10^3$  km
- Conductivité électrique de la Terre :  $\gamma_t = 1 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$
- Conductivité électrique de l'ionosphère :  $\gamma_i = 10^{-5} \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$
- Perméabilité magnétique du vide :  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$
- Permittivité diélectrique du vide :  $\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$
- $\text{rot}(\text{rot}\vec{A}) = \text{grad}(\text{div}\vec{A}) - \Delta\vec{A}$
- $\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$  et  $\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$
- $\int_0^T \cos^2(2\pi t/T) dt = \int_0^T \sin^2(2\pi t/T) dt = T/2$

#### I.A - Préliminaires : amortissement et facteur de qualité d'un circuit RLC

On considère le circuit RLC série représenté sur la figure 1. On définit les quantités suivantes : la pulsation propre  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  et le facteur de qualité  $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$ .

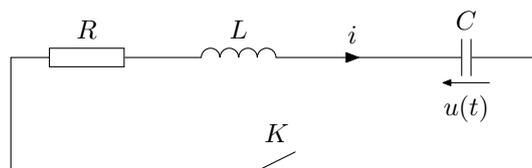


Figure 1 Circuit RLC série

L'interrupteur  $K$  est fermé à un instant  $t = 0$  choisi comme origine des temps. Le condensateur est initialement chargé :  $u(t = 0) = u_0$ .

**I.A.1)** Établir l'équation différentielle vérifiée par  $u(t)$  pour  $t \geq 0$ . On y fera apparaître  $\omega_0$  et  $Q$ . Préciser les différents régimes d'évolution possibles selon les valeurs de  $Q$ . On suppose  $Q \geq 1/2$  dans la suite.

**I.A.2)** a) Établir l'expression de  $u(t)$  pour  $t \geq 0$ , compte tenu des conditions initiales que vous explicitez et justifierez.

b) Définir la pseudo-pulsation  $\omega$  des oscillations libres en fonction de  $\omega_0$  et  $Q$ . Définir aussi le temps caractéristique d'amortissement des oscillations libres en fonction de  $\omega_0$  et  $Q$ .

**I.A.3)** On souhaite visualiser la tension  $u(t)$  sur l'écran d'un oscilloscope dont l'entrée est modélisée par l'association en parallèle d'une résistance  $R_0 = 1,0 \text{ M}\Omega$  et d'une capacité  $C_0 = 11 \text{ pF}$ .

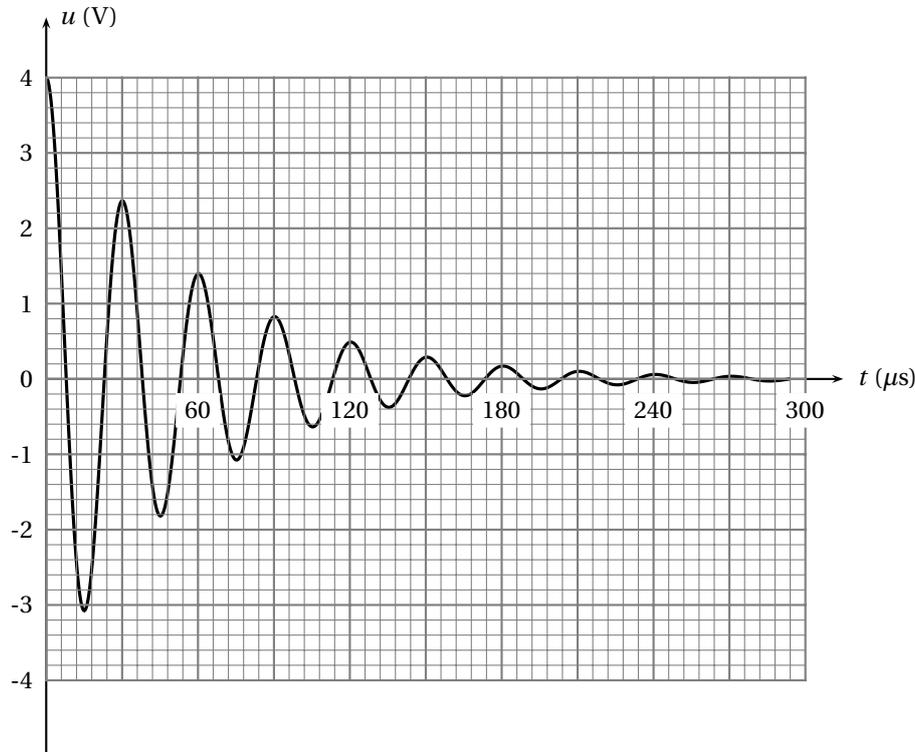
a) Montrer que si l'on tient compte de l'oscilloscope, l'équation différentielle vérifiée par  $u(t)$  devient :

$$L(C + C_0) \frac{d^2 u}{dt^2} + \left( \frac{L}{R_0} + RC + RC_0 \right) \frac{du}{dt} + \left( 1 + \frac{R}{R_0} \right) u = 0$$

b) Quelles relations qualitatives doivent vérifier  $R, L, C, R_0$  et  $C_0$  pour que la mise en place de l'oscilloscope ait une influence négligeable sur les oscillations étudiées? Vérifier qu'avec les valeurs usuelles de  $R, L$  et  $C$  utilisées en travaux pratiques ces relations sont vérifiées.

c) On définit le décrement logarithmique comme étant la quantité  $d_m = \ln \frac{u(t)}{u(t+mT)}$  où  $T = 2\pi/\omega$  et  $m$  est un entier strictement positif. Exprimer  $d_m$  en fonction de  $m$  et de  $Q$ .

d) On réalise un montage expérimental où le circuit RLC est excité par un générateur BF. Comment faut-il choisir le signal délivré par le générateur pour observer les oscillations libres du circuit ? La tension aux bornes du condensateur est enregistrée grâce à un logiciel d'acquisition. Le signal obtenu est représenté sur la figure 2.



**Figure 2** Oscillations libres du circuit RLC

Estimer le facteur de qualité  $Q$  du circuit.

**I.A.4)** On suppose  $Q \gg 1$  : la dissipation d'énergie par effet Joule est traitée comme une perturbation par rapport au cas du circuit non dissipatif ( $R = 0$ ).

a) Dans le cas où  $R = 0$ , établir l'expression de la valeur moyenne temporelle  $\langle \mathcal{E} \rangle$  de l'énergie électromagnétique stockée dans le circuit.

b) Dans le cas où  $R \neq 0$ , montrer qu'au premier ordre en  $1/Q$ , l'énergie  $W_J$  dissipée par effet Joule dans le circuit RLC, pendant une période, vérifie la relation :

$$W_J = \frac{2\pi}{Q} \langle \mathcal{E} \rangle$$

### **I.B – Ondes de Schumann**

La surface terrestre et l'ionosphère, couche supérieure conductrice de l'atmosphère, forment les deux parois, supposées parfaitement conductrices dans un premier temps, d'une cavité sphérique. Afin de simplifier la géométrie du problème, on « déplie » la cavité étudiée de façon à assimiler localement la surface terrestre à son plan tangent ( $Oxy$ ). On utilisera la base ( $O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ ) des coordonnées cartésiennes, conformément au schéma de la figure 3. L'intérieur de la cavité ( $0 \leq z \leq h$ ) est supposé vide de charges et de courants, ses propriétés électromagnétiques sont identiques à celles du vide.

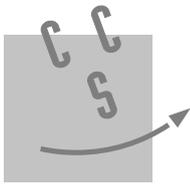
**I.B.1)** Justifier qualitativement l'approximation d'une cavité « dépliée ».

**I.B.2)** Expérimentalement, on observe que le bruit de fond électromagnétique atmosphérique, dû aux orages, présente des résonances pour les valeurs suivantes (à 0,5 Hz près) de la fréquence, appelées *fréquences propres* par la suite : 8, 14, 20, 26 Hz ...

On envisage la propagation, dans l'atmosphère, d'une onde électromagnétique plane, progressive et monochromatique. La longueur d'onde  $\lambda_n$ , la pulsation  $\omega_n$ , la fréquence  $f_n$  et le module du vecteur d'onde  $k_n$  de cette onde sont indexés par l'entier  $n$  strictement positif. Le champ magnétique de cette onde se met sous la forme :

$$\vec{B}_n^{(+)}(x, t) = B_{0n} \cos(\omega_n t - k_n x) \vec{e}_y.$$

Définir chacun des termes : « onde électromagnétique », « plane », « progressive » et « monochromatique ».



Les résultats numériques seront donnés avec un nombre de chiffres significatifs compatible avec celui utilisé pour les données. Les données sont regroupées en fin d'énoncé.

## *Du minerai d'uranium à la production d'électricité*

La France produit l'essentiel de son électricité — environ 75% — à partir de centrales électriques nucléaires. Ces centrales utilisent comme source d'énergie un « combustible » constitué d'oxyde d'uranium enrichi en uranium 235, seul isotope fissible, afin d'atteindre une teneur de l'ordre de 4%. Avant utilisation dans une centrale, le minerai doit donc d'abord être traité afin de produire ce combustible.

### **I Métallurgie de l'uranium**

#### **I.A – Propriétés de l'uranium**

**I.A.1)** L'uranium est un élément qui possède plusieurs isotopes. Rappeler la définition d'un isotope. Citer deux isotopes d'un autre élément. Du point de vue purement chimique, y a-t-il une différence de comportement entre deux isotopes ? Pourquoi ?

Les deux principaux isotopes de l'uranium sont  ${}_{92}^{235}\text{U}$  et  ${}_{92}^{238}\text{U}$  de masses molaires respectives  $235,0439 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$  et  $238,0508 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ .

**I.A.2)** Donner la composition du noyau de chacun des isotopes de l'uranium.

**I.A.3)** La masse molaire de l'uranium naturel est de  $238,0289 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ . En déduire la teneur en uranium 235 de l'uranium naturel.

**I.A.4)** L'uranium métallique existe sous trois formes cristallines notées  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$ . La variété  $\gamma$  (entre  $775^\circ\text{C}$  et  $1130^\circ\text{C}$ ) cristallise sous une forme cubique centrée. Représenter la maille. Combien cette maille contient-elle d'atomes ?

**I.A.5)** Le paramètre de maille est de  $350 \text{ pm}$ . En déduire le rayon atomique de l'uranium dans cette structure.

#### **I.B – Du minerai au combustible**

Le principal minerai d'uranium est la pechblende qui contient essentiellement  $\text{U}_3\text{O}_8$ . Selon les gisements, la teneur initiale est de 1 à 2 kg d'uranium par tonne de minerai. Ce minerai est donc dans un premier temps traité sur place afin d'éviter d'énormes frais de transport. Les premières étapes consistent, après extraction du minerai dans la mine, à un concassage puis à un broyage afin de le réduire sous forme de fine poudre ( $450 \mu\text{m}$  environ) avec addition d'eau.

**I.B.1)** Quel est le degré d'oxydation de l'uranium dans  $\text{UO}_2$  et  $\text{UO}_3$  ?

**I.B.2)** En supposant que la pechblende  $\text{U}_3\text{O}_8$  est en fait un mélange des deux oxydes précédents, déduire sa composition.

La poudre issue du minerai subit une attaque par l'acide sulfurique en présence d'un oxydant puissant : le chlorate de sodium ( $\text{Na}^+$ ,  $\text{ClO}_3^-$ ).

En présence d'eau, on travaillera avec les espèces  $\text{U}_{(s)}$ ,  $\text{U}^{3+}$ ,  $\text{U}^{4+}$ ,  $\text{UO}_2^{2+}$ ,  $\text{U}(\text{OH})_{4(s)}$  et  $\text{UO}_2(\text{OH})_{2(s)}$ . Le diagramme potentiel-pH (pour  $C_{\text{tracé}} = 1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ ) est fourni sur le document réponse, à rendre avec la copie.

#### **I.B.3)**

a) Attribuer chaque domaine A à F à une espèce de l'uranium. On justifiera rapidement. Distinguer les domaines d'existence des domaines de prédominance.

b) Calculer les équations des deux frontières verticales.

c) Déterminer les pentes des segments séparant B et F d'une part, A et F d'autre part.

d) En quoi le point entouré est-il particulier ? Écrire la réaction que subit B au delà de ce point.

e) Calculer le potentiel du couple  $\text{ClO}_3^-/\text{Cl}^-$  en fonction du pH et superposer le graphe correspondant au diagramme potentiel-pH de l'uranium.

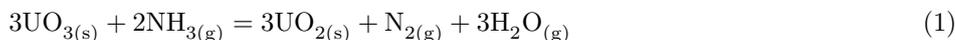
f) Sachant qu'on travaille en excès d'acide sulfurique et de chlorate de sodium, sous quelle forme trouvera-t-on l'uranium à la fin de cette étape ?

g) Écrire l'équation-bilan de la réaction de  $\text{UO}_2$  avec  $\text{ClO}_3^-$  en milieu acide.

On utilise 1 à 2 kg de chlorate de sodium et 30 à 50 kg d'acide sulfurique par tonne de minerai. En réalité, le minerai est traité à 70°C environ pendant 6 à 7 heures. La solution obtenue comporte un certain nombre d'impuretés (notamment des cations métalliques) qui vont être éliminées par une série de procédés de précipitation sélective/filtration. À l'issue de ces purifications, on obtient une solution concentrée de nitrate d'uranyle  $\text{UO}_2(\text{NO}_3)_2$ . Après précipitation du nitrate et décomposition thermique, on obtient  $\text{UO}_3$  avec une grande pureté. L'étape suivante consiste à réduire  $\text{UO}_3$  en  $\text{UO}_2$  puis à le transformer en  $\text{UF}_4$ . Cette transformation est réalisée en France par la société Comurhex-Malvési à Narbonne (Aude) :  $\text{UO}_3$  est introduit par le haut d'un four en « L » et est réduit en  $\text{UO}_2$  par l'action de  $\text{H}_2$  provenant de la décomposition d'ammoniac, puis fluoré en  $\text{UF}_4$  par le fluorure d'hydrogène HF.

#### I.B.4) Réduction de $\text{UO}_3$

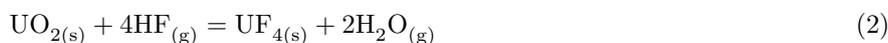
On considère la réaction :



- Calculer  $\Delta_r H_1^\circ(298 \text{ K})$ . Pour favoriser la formation de  $\text{UO}_2$ , a-t-on intérêt à travailler à haute ou basse température ?
- A-t-on intérêt à travailler à pression élevée ? Justifier.
- Calculer  $\Delta_r S_1^\circ(298 \text{ K})$ .
- En se plaçant dans l'approximation d'Ellingham (qu'on rappellera), déterminer  $\Delta_r G_1^\circ(T)$ .
- On travaille à 900 K et 1 bar. Calculer la constante d'équilibre ; conclure.

#### I.B.5) Fluoration de $\text{UO}_2$

On considère à présent la réaction :



On donne  $\Delta_r G_2^\circ(T) = -235,2 + 0,2435 T$  en  $\text{kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$ .

On maintient la température à 700 K et la pression totale à 1 bar.

- Déterminer la constante d'équilibre  $K_2^\circ$  à 700 K.
- Si l'on part de 1 mole de  $\text{UO}_2$  et 1 mole de HF, quelle sera la composition finale du système ?
- Même question en partant de 0,1 mole de  $\text{UO}_2$  pour 1 mole de HF. Que remarque-t-on dans ce cas ?

#### I.B.6) Obtention de l'uranium métallique

La dernière étape amenant à l'obtention d'uranium métallique consiste en une réaction de magnésiothermie, le tétrafluorure d'uranium réagit avec le magnésium selon la réaction :



On considérera que tous les solides et liquides sont purs dans leur phase.

- Calculer  $\Delta_r H_3^\circ$ . La transformation est-elle endothermique ou exothermique ?
- Calculer la température finale maximale atteinte en supposant qu'il n'y a pas de changement d'état et que la température initiale est de 298 K. L'hypothèse faite est-elle vérifiée ?
- Quelles sont les conditions qui doivent être réunies pour obtenir cette température maximale ?
- La température atteinte est en réalité moins grande, mais l'uranium est tout de même obtenu à l'état liquide. Expliquer en quoi c'est un avantage.

## II Séparation des isotopes par spectrométrie de masse

L'enrichissement de l'uranium a pour but d'élever la teneur en  $^{235}\text{U}$  de l'uranium de départ à une valeur optimale pour l'application désirée. Une des méthodes est la spectrographie de masse qui reste la méthode la plus sensible d'analyse isotopique. Elle a été employé pendant la seconde Guerre Mondiale dans l'usine Y12 d'Oak Ridge dans des dispositifs appelés Calutrons.

Un Calutron est un spectrographe de masse constitué de plusieurs parties (cf figure 1) :

- la chambre d'ionisation dans laquelle des atomes d'uranium  $^{235}_{92}\text{U}$  et  $^{238}_{92}\text{U}$  de masses respectives  $m_1$  et  $m_2$  portés à haute température sont ionisés en ions  $\text{U}^+$ . On considérera qu'à la sortie de cette chambre, en  $O_1$ , la vitesse des ions est quasi nulle ;
- la chambre d'accélération dans laquelle les ions sont accélérés entre  $O_1$  et  $O_2$  sous l'action d'une différence de potentiel établie entre les deux grilles  $G_1$  et  $G_2$  ;
- la chambre de déviation dans laquelle les ions sont déviés par un champ magnétique uniforme  $\vec{B}$  de direction perpendiculaire au plan de figure. Un collecteur d'ions est disposé entre  $M$  et  $N$ . Une fente centrée sur  $O_2$  de largeur  $L$  dans le plan de la figure permet de choisir la largeur du faisceau incident. Une fente collectrice centrée sur  $F$  est placée entre  $M$  et  $N$  et a pour largeur  $L'$  dans le plan de la figure.

Les chambres sont sous vide. On négligera le poids des ions devant les autres forces et on admettra qu'à la sortie de la chambre d'accélération, les vecteurs vitesse des ions sont contenus dans le plan de la figure.

IV.A.5) Exprimer alors la puissance moyenne dissipée par effet Joule  $P_J$  dans la résistance utilisateur.

#### IV.B – Aspect mécanique

IV.B.1) Donner, en fonction de  $i(t)$ , l'expression du champ magnétique créé par la bobine en  $O$  (on rappelle qu'une spire circulaire parcourue par un courant  $I$ , vue sous un angle  $\beta$  depuis un point de son axe, crée en ce point un champ magnétique  $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2a} \sin^3 \beta \vec{e}_x$ ). Simplifier cette expression sachant que  $d \gg a$ .

IV.B.2) Calculer le moment du couple  $\Gamma$  que doit fournir la turbine pour maintenir l'aimant en rotation à une vitesse constante et donner sa valeur moyenne en fonction de  $\mu_0$ ,  $N$ ,  $M$ ,  $a$ ,  $d$ ,  $i_0$  et  $\varphi$ .

IV.B.3) En déduire la puissance moyenne  $P_m$  ainsi consommée et la comparer à  $P_J$ . Commenter.

#### Données numériques (à 298 K)

charge élémentaire	$e = 1,60 \times 10^{-19} \text{ C}$
masse du proton	$m_p = 1,67 \times 10^{-27} \text{ kg}$
masse du neutron	$m_n = 1,67 \times 10^{-27} \text{ kg}$
constante d'Avogadro	$N_A = 6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
masses molaires atomiques (en $\text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$ )	H : 1 ; C : 12 ; O : 16
constante des gaz parfaits	$R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$
	$\frac{RT}{F} \ln 10 = 0,06 \text{ V}$
constantes de solubilité	$\text{U(OH)}_{4(s)} = \text{U}^{4+} + 4\text{HO}^- \quad K_{S1} = 10^{-49}$ $\text{UO}_2(\text{OH})_{2(s)} = \text{UO}_2^{2+} + 2\text{HO}^- \quad K_{S2} = 10^{-24}$
températures de fusion	du magnésium $923 \text{ K}$ de l'uranium $1405 \text{ K}$

Potentiels standard d'oxydo-réduction  $E^\circ$  à  $pH = 0$

Couple	$\text{U}^{3+}/\text{U}_{(s)}$	$\text{U}^{4+}/\text{U}^{3+}$	$\text{H}_3\text{O}^+/\text{H}_{2(g)}$	$\text{O}_{2(g)}/\text{H}_2\text{O}$	$\text{ClO}_3^-/\text{Cl}^-$
$E^\circ$	-1,80 V	-0,63 V	0,00 V	1,23 V	1,45 V

Données thermodynamiques (considérées indépendantes de la température)

Espèce	$\text{H}_{2(g)}$	$\text{N}_{2(g)}$	$\text{F}_{2(g)}$	$\text{H}_2\text{O}_{(g)}$	$\text{NH}_3(g)$	$\text{HF}_{(g)}$	$\text{UO}_{2(s)}$	$\text{UO}_{3(s)}$
$\Delta_f H^\circ$ $\text{kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$	0	0	0	-241,8	-46,19	-271,1	-1085	-1224
$S_m^\circ$ $\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$	130,6	191,5	202,7	188,7	192,3	173,7	77,8	98,6
Espèce	$\text{UF}_{4(s)}$	$\text{U}_{(s)}$	$\text{Mg}_{(s)}$	$\text{MgF}_{2(s)}$				
$\Delta_f H^\circ$ $\text{kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$	-1921	0	0	-1124				
$S_m^\circ$ $\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$	151,7	50,2	32,7	57,2				
$C_{Pm}^\circ$ $\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$	116	27,67	24,87	61,5				

• • • FIN • • •

# CONCOURS CENTRALE-SUPÉLEC 2012

NOM : \_\_\_\_\_ PRÉNOMS : \_\_\_\_\_

Signature :

Composition de **Physique-Chimie** Filière **TSI**

NUMÉRO DE PLACE

*Ne rien porter sur cette feuille avant  
d'avoir rempli complètement cet en-tête*

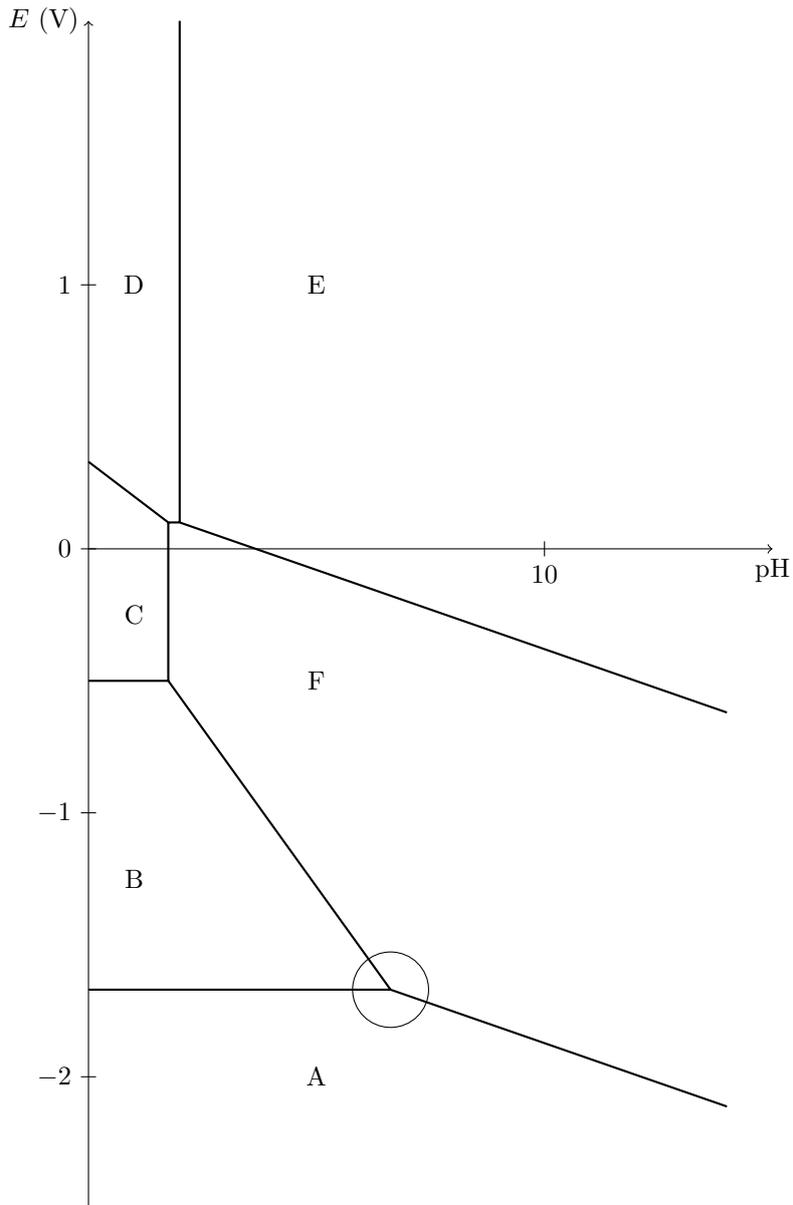


Diagramme potentiel-pH de l'uranium pour  $C_{\text{tracé}} = 1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$