

Devoir Surveillé n°5

Durée : 4 heures

Les calculatrices personnelles sont interdites.

Instructions générales

Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction. La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non encadrés et non justifiés ne seront pas pris en compte.

Toute application numérique ne comportant pas d'unité ne donnera pas lieu à attribution de points.

Les trois problèmes sont indépendants. Les diverses parties peuvent être traitées dans l'ordre choisi par le candidat. Le candidat prendra soin de bien numéroter les questions.

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Physique :

Problème 1 (1 h 30) : Extrait CCP 2008 ou Centrale-Supélec 2007

Problème 2 (2 h) : Extrait CCP 2011

Problème 3 (30 min) : Extrait CCP 2013

Deuxième problème : Utilisation de solénoïdes

Rappels :

- Soit un solénoïde de section quelconque, infiniment long et comportant n spires par unité de longueur. Dans le cadre de l'approximation des régimes quasi stationnaires (ARQS), lorsque les spires sont parcourues par un courant d'intensité I , le solénoïde crée un champ magnétique nul en tout point extérieur au solénoïde et égal à $\vec{B} = \mu_0 n I \vec{e}$ en tout point intérieur au solénoïde (μ_0 désigne la permittivité du vide et \vec{e} un vecteur unitaire colinéaire à l'axe du solénoïde).
- La densité volumique d'énergie magnétique $E_{m,vol}$ due à un champ magnétique \vec{B} est donnée par : $E_{m,vol} = \frac{B^2}{2\mu_0}$
- Formule donnant le rotationnel d'un vecteur \vec{A} en coordonnées cylindriques (r, θ, z) :

$$\vec{\text{rot}}\vec{A} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right) \vec{e}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \vec{e}_\theta + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial (r A_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \vec{e}_z$$

On se placera dans l'ensemble de ce problème dans le cadre de l'approximation des régimes quasi stationnaires.

Première partie : Champ magnétique créé par un tore et passage au solénoïde infini

1/ Enoncer le théorème d'Ampère. On veillera à expliquer soigneusement la signification des différents termes qui apparaissent dans cet énoncé.

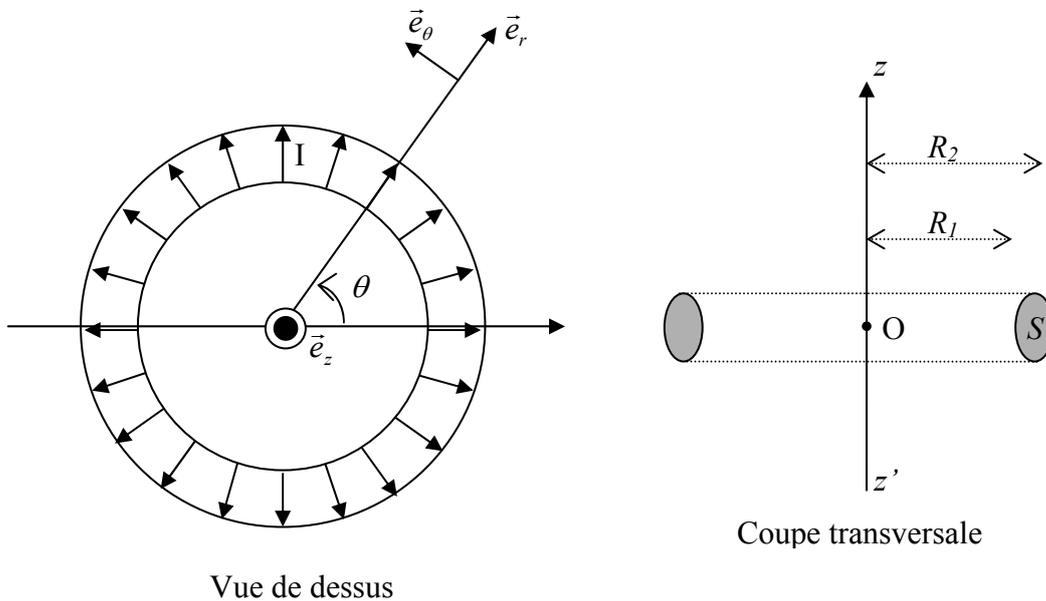
Quelle est l'équation de Maxwell qui permet de démontrer ce théorème ? Ecrire cette équation.

On désire dans les questions qui suivent, retrouver l'expression du champ magnétique créé par un solénoïde infini à partir de l'étude d'un tore.

Un tore est engendré par la rotation d'une surface plane S autour d'un axe (Oz) . Un fil conducteur est régulièrement enroulé sur le tore et forme une bobine de N spires parcourues par un courant I .

L'espace est rapporté à la base cylindrique $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$. Un point quelconque de l'espace est repéré par ses coordonnées (r, θ, z) .

Soit R_1 le rayon intérieur du tore et R_2 le rayon extérieur.



2/ Symétries

Etudier les symétries et invariances de la distribution de courant. En déduire que le champ magnétique se met sous la forme $\vec{B} = B(r, z)\vec{e}_\theta$ où $B(r, z)$ est une fonction qui ne dépend que des variables d'espace r et z .

3/ Expression du champ magnétique

En utilisant le théorème d'Ampère, déterminer l'expression du champ magnétique \vec{B} en un point M de l'espace repéré par ses coordonnées cylindriques (r, θ, z) . On distinguera les deux cas où le point M se trouve à l'intérieur ou à l'extérieur du tore.

4/ Cas d'un solénoïde infini

En remarquant que le tore précédent se comporte comme un solénoïde infini lorsque son rayon tend vers l'infini, justifier l'expression, rappelée précédemment, du champ magnétique créé par un solénoïde infini en tout point de l'espace.

Deuxième partie : Inductance d'un solénoïde

On désire dans cette partie déterminer l'inductance d'un solénoïde de deux manières différentes.

On considère un solénoïde de longueur l constitué de N spires régulièrement espacées, supposées jointives, de section S . Sa longueur l est très grande devant ses dimensions latérales et on peut considérer que le solénoïde se comporte comme un solénoïde infini. Les spires du solénoïde sont parcourues par un courant d'intensité i .

5/ Détermination de l'inductance du solénoïde en considérant le flux propre

En précisant clairement les orientations choisies pour le calcul, déterminer le flux Φ_0 du champ magnétique \vec{B} calculé précédemment à travers une spire du solénoïde. En déduire le flux propre Φ_{propre} du champ magnétique à travers le solénoïde.

En déduire l'inductance L du solénoïde en fonction de μ_0 , l , N et S .

6/ Détermination de l'inductance du solénoïde en considérant l'énergie magnétique

6.1/ Soit un solénoïde d'inductance L et parcouru par un courant i variable au cours du temps.

En négligeant la résistance du solénoïde et en utilisant la convention récepteur que l'on précisera, rappeler l'expression de la tension u_L aux bornes du solénoïde précédent. On exprimera u_L en fonction de L et i .

6.2/ En écrivant la puissance électrique instantanée mise en jeu dans la bobine, en déduire l'expression, en fonction de L et i , de l'énergie magnétique E_L accumulée par le solénoïde.

6.3/ En considérant l'expression de la densité volumique d'énergie magnétique rappelée au début du problème, déterminer une autre expression de l'énergie magnétique E_L accumulée par le solénoïde. En déduire l'expression de l'inductance L du solénoïde en fonction de μ_0 , l , N et S .

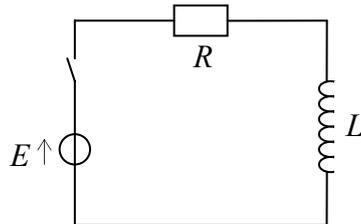
Troisième partie : Régimes transitoires entre deux solénoïdes couplés

Nous nous proposons dans cette partie d'étudier l'établissement de l'intensité dans un circuit série comportant une bobine et une résistance (circuit RL) puis dans deux circuits RL couplés.

7/ Etablissement du courant dans le solénoïde

Soit un circuit RL comportant un solénoïde d'inductance L supposée constante et une résistance R associées en série. On alimente ce circuit avec un générateur de tension stabilisée de force électromotrice E .

Nous supposons qu'il n'existe aucune autre source de champ magnétique que le solénoïde.



L'intensité $i(t)$ est initialement nulle pour $t < 0$. A l'instant $t = 0$, l'interrupteur est fermé.

En détaillant clairement le calcul de la constante d'intégration, déterminer l'expression de l'intensité $i(t)$ dans le circuit en fonction du temps t , de E , L et R .

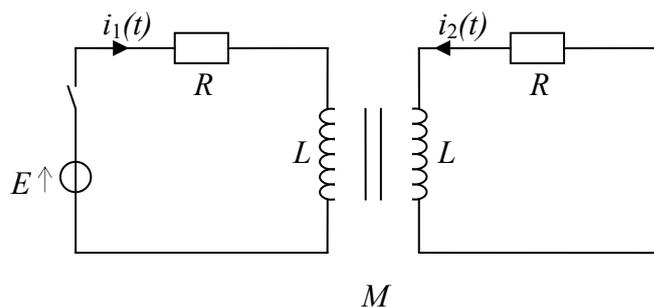
Quelle est la valeur de l'intensité i_∞ au bout d'un temps infini ?

8/ Soit deux circuits couplés.

- Le premier circuit comporte un solénoïde d'inductance L , une résistance R , un générateur de tension stabilisée de force électromotrice E et un interrupteur disposés en série. Soit $i_1(t)$ l'intensité du courant qui parcourt ce circuit.
- Le deuxième circuit comporte un solénoïde d'inductance L et une résistance R en série. Soit $i_2(t)$ l'intensité du courant qui parcourt ce circuit.

Les sens choisis pour les intensités $i_1(t)$ et $i_2(t)$ sont mentionnés sur le schéma ci-dessous.

Pour simplifier les calculs, on suppose que le coefficient d'inductance mutuelle M est positif.



8.1/ En utilisant la loi des mailles, écrire les deux équations différentielles couplées vérifiées par $i_1(t)$ et $i_2(t)$ lorsque l'interrupteur est fermé.

8.2/ En effectuant le changement de variables $I = i_1 + i_2$ et $J = i_1 - i_2$, en déduire deux équations différentielles découplées en I et J .

8.3/ L'interrupteur est initialement ouvert (pour $t < 0$). A un instant choisi comme origine du temps ($t = 0$), l'interrupteur est fermé.

En posant $\tau_1 = \frac{L+M}{R}$ et $\tau_2 = \frac{L-M}{R}$, déterminer les expressions des intensités $i_1(t)$ et $i_2(t)$ pour $t > 0$, dans le cas où M est inférieur à L . Donner l'allure des représentations graphiques de $i_1(t)$ et $i_2(t)$ en fonction du temps.

PHYSIQUE II

Les calculatrices sont autorisées.

Le problème étudie un dispositif susceptible de détecter la présence d'un matériau métallique situé à une distance plus ou moins grande d'un capteur selon la sensibilité du dispositif. Les différentes parties qui analysent le fonctionnement des éléments successifs constituant le détecteur sont indépendantes et la dernière partie qui appréhende le capteur dans son intégralité prend en compte l'interaction de tous les éléments.

Le principe de détection s'appuie sur le phénomène de couplage magnétique de deux circuits conducteurs qui engendre une variation de l'inductance apparente d'un circuit.

Partie I - Couplage magnétique de deux circuits

Afin de simplifier l'étude, le capteur est assimilé à une bobine \mathcal{B}_1 de rayon a_1 , de hauteur nulle parallèlement à son axe, sur laquelle sont enroulés N tours d'un fil conducteur en cuivre. On négligera dans toute l'étude l'étalement radial et axial du bobinage de telle sorte que chaque spire qui le constitue sera considérée comme un cercle de rayon a_1 , centré sur le même point O_1 . La position d'un point P d'une spire est décrite dans le repère $(O_1, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ représenté sur la figure I.A. Les évolutions au cours du temps des courants impliqués dans ce dispositif permettent de mener l'étude dans le cadre des régimes quasi permanents.

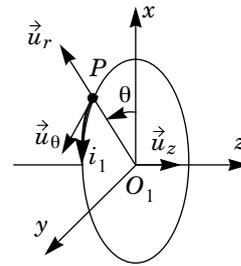


Figure I.A

On donne $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ S.I.

I.A - Le bobinage est parcouru par un courant d'intensité i_1 représenté sur la figure I.A. Calculer le champ magnétique $\vec{B}(O_1)$, créé par tout le bobinage au point O_1 .

I.B - Soit M un point appartenant à la section du bobinage et dont les coordonnées vérifient $z = 0$ et $r < a_1$. Déterminer en le justifiant, la direction de $\vec{B}(M)$. Justifier que l'amplitude de ce champ ne dépende pas de θ .

I.C - La figure I.B propose le profil du rapport

$$\frac{\vec{B}(M) \cdot \vec{u}_z}{\vec{B}(O_1) \cdot \vec{u}_z} \text{ noté } f, \text{ en fonction de la variable } u = \frac{r}{a_1}.$$

Filière TSI

Commenter l'allure de ce profil. Quels aspects de cette courbe sont conformes ou en désaccord avec celle qui serait obtenue lors d'un relevé expérimental ? Que faut-il faire pour établir une expression théorique du champ magnétique en meilleur accord avec l'expérience ?

On définit le champ magnétique moyen B_m sur la section de la spire par la relation admise :

$$B_m = \frac{1}{\pi a_1^2} \int_{M \in \Sigma} \vec{B}(M) \cdot \vec{u}_z d^2S$$

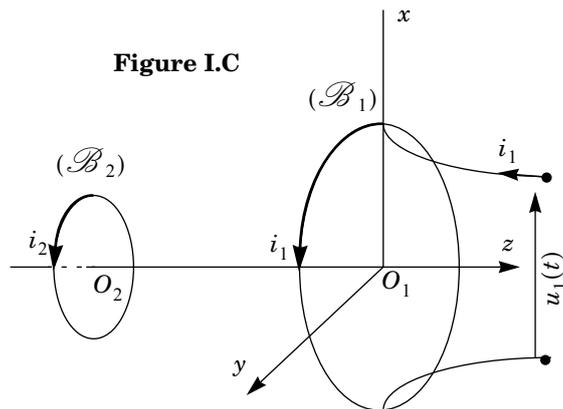
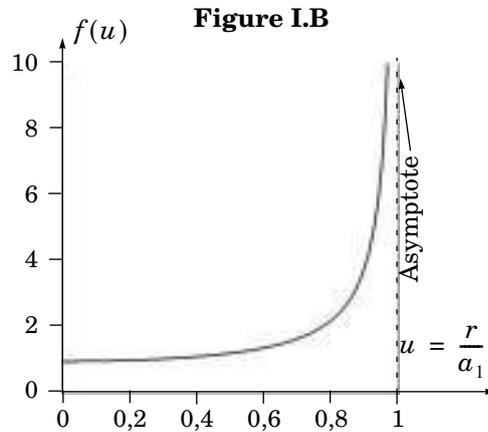
I.D - Pour $i_1 = 1A$, $a_1 = 6,5 \text{ cm}$ et $N = 100$, calculer la valeur de $B_{10} = \|\vec{B}(O_1)\|$.

I.E - On admet $B_m \approx 1,56 B_{10}$. Calculer B_m et commenter la valeur du rapport B_m/B_{10} . Calculer l'inductance propre L_1 du circuit \mathcal{B}_1 , définie par le rapport $L_1 = \Phi_1/i_1$ avec

$$\Phi_1 = \int_{M \in \Sigma} \vec{B}(M) \cdot \vec{u}_z d^2S.$$

I.F - Quelle serait la valeur de B_m pour un bobinage identique mais parcouru par un courant d'intensité $2A$? La valeur de L_1 change-t-elle ?

I.G - Un objet métallique est placé au voisinage de la bobine \mathcal{B}_1 étudiée précédemment. Afin de simplifier l'étude, cet objet est assimilé à un anneau filiforme \mathcal{B}_2 , conducteur, de



rayon a_2 et dont la position par rapport à \mathcal{B}_1 est décrite sur la figure I.C.

On supposera de plus que $a_2 \ll a_1$ et que $d = O_1O_2 \gg a_1$, de telle sorte que le champ magnétique créé par \mathcal{B}_1 sur la section de \mathcal{B}_2 puisse être considéré comme uniforme. Calculer le champ magnétique $\vec{B}(O_2)$ créé par \mathcal{B}_1 , parcourue par le courant i_1 au point O_2 .

I.H - Calculer le flux magnétique φ envoyé par \mathcal{B}_1 à travers \mathcal{B}_2 . En déduire l'expression de M , mutuelle inductance des deux circuits, définie par $M = \varphi/i_1$.

Application numérique : $d = 12$ cm ; $a_2 = 1$ cm. Calculer la valeur de M .

On alimente maintenant \mathcal{B}_1 par la tension $u_1(t) = U\sqrt{2}\cos(\omega t)$ (figure I.C) alors que l'anneau filiforme \mathcal{B}_2 modélisant le métal est en court-circuit. On désigne par R_1 et R_2 les résistances respectives des circuits \mathcal{B}_1 et \mathcal{B}_2 puis par L_2 , l'inductance propre de \mathcal{B}_2 . L'inductance propre de \mathcal{B}_1 est toujours notée L_1 .

I.I - Écrire le système des deux équations couplées reliant les grandeurs instantanées $u_1(t)$, $i_1(t)$, $i_2(t)$ faisant intervenir les paramètres R_1 , R_2 , L_1 , L_2 et M . En régime sinusoïdal forcé de pulsation ω , on désigne par \underline{U}_1 , \underline{I}_1 et \underline{I}_2 les représentations complexes respectives de $u_1(t)$, $i_1(t)$, $i_2(t)$.

Écrire le système en représentation complexe.

I.J - Calculer l'impédance apparente de \mathcal{B}_1 définie par $Z_{\text{app}} = \underline{U}_1/\underline{I}_1$. On pose $Z_{\text{app}} = R_{\text{app}} + jL_{\text{app}}\omega$. Identifier les valeurs de R_{app} et L_{app} .

I.K - Donner l'expression $\Delta L_1 = L_{\text{app}} - L_1$ et en déduire la valeur numérique de la variation relative $\Delta L_1/L_1$ qui résulte de la présence du métal.

On prendra : $L_2 = 1 \cdot 10^{-9}$ H, $R_2 = 0,1$ m Ω et $f = \frac{\omega}{2\pi} = 100$ kHz.

Partie II - Oscillateur

On étudie le montage électrique représenté sur la figure II.A.

Le facteur α est un réel positif qui peut être modifié afin de permettre d'ajuster la valeur de la résistance $R' = R/\alpha$.

II.A - Dans un premier temps on isole le circuit noté \mathcal{C}_1 , inclus dans le domaine délimité par les traits en pointillés, dont les grandeurs d'entrée, définies sur la figure, sont u_e , i_e et la grandeur de sortie est u_s .

II.A.1) *L'amplificateur opérationnel*

a) Pour un amplificateur opérationnel idéal, tracer la caractéristique de transfert statique, c'est-à-dire les variations de u_s en fonction de ε . On notera V_{sat} la valeur absolue de la tension de saturation.



CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES

EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE TSI

PHYSIQUE**Durée : 4 heures**

N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont interdites

L'épreuve est composée de deux problèmes indépendants décrivant les principes physiques de dispositifs vibrants (microphones et sismographe). Il est conseillé de passer environ deux tiers du temps sur le premier problème et un tiers sur le deuxième.

Le candidat répondra aux questions posées *en justifiant* ses calculs de façon *claire et précise* mais *concise*. Lorsqu'une application numérique demande un ordre de grandeur, on donnera le résultat sous forme d'une puissance de dix en unités du système international (unités SI).

Formulaire mathématique : Pour un vecteur s'écrivant $\vec{A} = A_x \vec{u}_x + A_y \vec{u}_y + A_z \vec{u}_z$ en coordonnées cartésiennes dans une base $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$, on a :

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

PROBLEME I : MICROPHONES

Important : Les trois parties de ce problème peuvent être traitées indépendamment.

Le but de ce premier problème est de montrer qu'on peut utiliser un condensateur ou une bobine pour fabriquer un microphone. Un microphone est un transducteur qui transforme un son, c'est-à-dire une onde de pression (donc une onde mécanique), en un signal électrique (tension ou courant) de même forme. Dans les microphones électrostatiques, l'onde de pression, en faisant vibrer l'armature d'un condensateur inclus dans un circuit RC, en modifiera la capacité, ce qui modifiera le courant du circuit. Dans les microphones électrodynamiques, l'onde de pression, en déplaçant une bobine dans un champ magnétique, créera un courant induit. Les courants électriques ainsi générés dans les deux cas, pourront être soit enregistrés soit amplifiés, pour ensuite restituer le son initial par un haut-parleur par un processus inverse. La première partie propose donc de faire l'étude générale d'un condensateur indépendamment de son fonctionnement en microphone, la deuxième partie étudiera le fonctionnement du microphone électrostatique et la troisième partie étudiera le fonctionnement du microphone électrodynamique.

Première partie : Etude d'un condensateur

On se propose de calculer le champ électrique créé par un plan infini uniformément chargé avec une densité surfacique σ . Ce plan correspond au plan (Oxy) d'un système de coordonnées cartésiennes (Ox, Oy, Oz) classique muni d'une base orthonormée ($O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z$). La position d'un point M est repérée par ses coordonnées cartésiennes (x, y, z). On se place tout d'abord dans le cas de l'électrostatique ($\sigma = \text{constante}$).

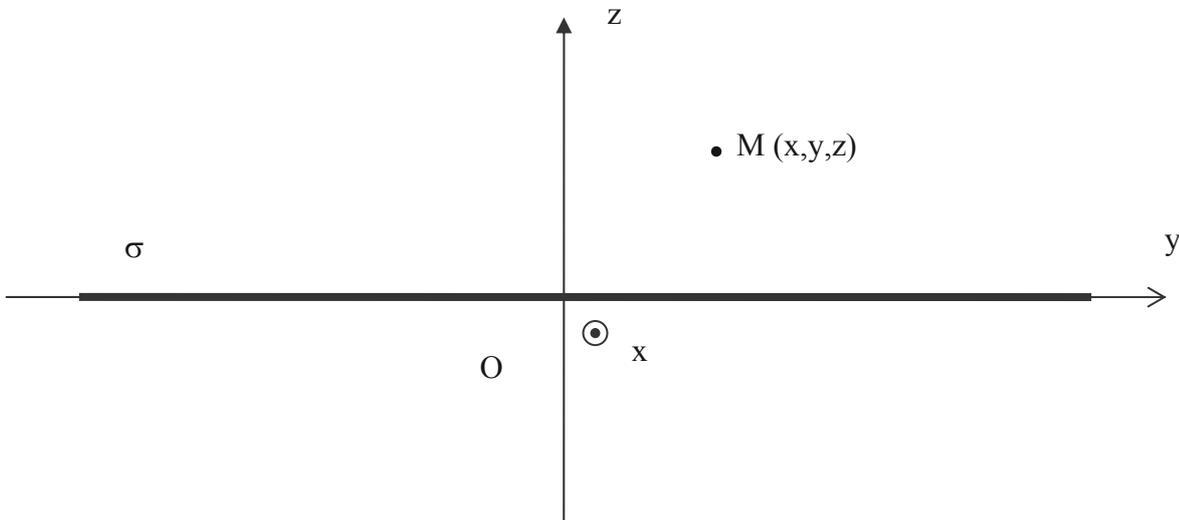


Figure 1 : Plan infini uniformément chargé.

- I.1. Montrer, par des considérations de symétrie, que le champ électrique $\vec{E}(M)$ créé en M par le plan uniformément chargé est perpendiculaire au plan en tout point de l'espace. On écrira donc $\vec{E}(M) = E(x, y, z) \vec{u}_z$. Justifier le fait que le champ électrique $\vec{E}(M)$ ne peut

pas dépendre des coordonnées x et y du point M , soit $\vec{E}(M) = E(z)\vec{u}_z$. Montrer par des considérations de symétrie que la fonction $E(z)$ est impaire.

- I.2. Montrer, en utilisant l'équation de Maxwell-Gauss, que le champ est uniforme au dessus et en dessous du plan. En appliquant le théorème de Gauss sur une surface qu'on précisera clairement en faisant un schéma, déterminer la valeur du champ électrique en fonction de σ , ϵ_0 (constante diélectrique du vide) et d'un vecteur unitaire judicieusement choisi qu'on précisera (on distinguera les deux cas : $z > 0$ et $z < 0$). Une démonstration très précise est attendue.
- I.3. Toujours par des considérations de symétrie, déterminer la valeur $E(0)$ du champ électrique dans le plan uniformément chargé.
- I.4. Déterminer le potentiel électrique $V(z)$ en tout point de l'espace en fonction de σ , ϵ_0 et z (on prendra le potentiel nul en $z = 0$). On distinguera toujours les deux cas : $z > 0$ et $z < 0$. On supposera la continuité du potentiel en $z = 0$.
- I.5. Tracer l'allure des courbes $E(z)$ et $V(z)$ en précisant les valeurs aux points remarquables.

On considère maintenant un condensateur plan infini formé par deux plans infinis et parallèles entre eux, distants de e . Le plan supérieur est situé dans le plan $z = +\frac{e}{2}$ et le plan inférieur dans le plan $z = -\frac{e}{2}$. Le plan supérieur est chargé avec une densité surfacique σ positive et le plan inférieur est chargé avec une densité surfacique opposée (donc négative) $-\sigma$.

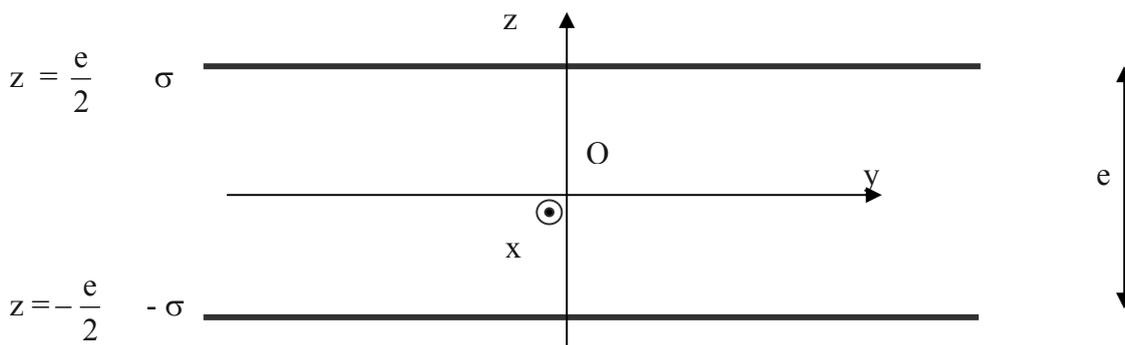


Figure 2 : Condensateur plan infini.

- I.6. Déterminer le champ électrique total créé par l'ensemble des deux plans en tout point de l'espace en fonction de σ , ϵ_0 et d'un vecteur unitaire qu'on précisera (on distinguera les trois zones délimitées par les deux plans). Porter sur un schéma le sens du champ électrique.
- I.7. Calculer l'expression du potentiel électrostatique $V(z)$ pour $z \in \left[-\frac{e}{2}, \frac{e}{2}\right]$ en fonction de σ , z et ϵ_0 . On prendra toujours le potentiel nul en $z = 0$. Calculer la différence de potentiel U entre les deux plans infinis en fonction de σ , e et ϵ_0 . Exprimer la norme du champ électrique total en fonction de U et e .
- I.8. Application numérique : les condensateurs des microphones électrostatiques pour la prise de son, sont soumis à des tensions de l'ordre de quelques dizaines de volts et les armatures sont séparées de quelques dizaines de micromètres. Donner l'ordre de grandeur du champ électrique régnant dans ces condensateurs. Quel problème pratique pose un champ électrique trop grand ?

Dans un condensateur réel, les deux armatures ne peuvent pas être des plans infinis mais ont des surfaces finies identiques S . On supposera que les résultats trouvés pour le champ électrique et le potentiel ne diffèrent pas des résultats trouvés dans les questions précédentes, pourvu qu'on ne se place pas trop près des bords des armatures. L'armature supérieure porte alors la charge totale $+Q$ et l'armature inférieure la charge totale $-Q$.

- I.9. Après avoir exprimé σ en fonction de Q et S , en déduire la différence de potentiel U entre les deux armatures en fonction de Q , ϵ_0 , e et S . Définir et exprimer la capacité C du condensateur formé en fonction de ϵ_0 , e et S . Donner l'ordre de grandeur de la capacité d'un condensateur utilisé dans un microphone électrostatique pour lequel on prendra : $S \approx 1 \text{ cm}^2$, $e \approx 10^{-5} \text{ m}$ et $\epsilon_0 \approx 10^{-11} \text{ SI}$.
- I.10. Déterminer la densité volumique w_e d'énergie électrique dans le condensateur en fonction de ϵ_0 , Q et S .

On suppose maintenant que σ et Q dépendent du temps. On admet que cette dépendance est suffisamment lente pour que l'expression du champ électrique déterminée précédemment reste valable.

- I.11. Montrer, en utilisant l'équation de Maxwell-Ampère, qu'il doit nécessairement y avoir un champ magnétique entre les plaques du condensateur.
- I.12. En supposant que les armatures sont des disques, on peut montrer que le champ magnétique est nul au centre O du condensateur et orthoradial ailleurs. On rappelle qu'orthoradial signifie dirigé suivant le vecteur unitaire \vec{u}_θ des coordonnées cylindriques de centre O et d'axe Oz . On écrit donc (en coordonnées polaires) $\vec{B} = B(r, z) \vec{u}_\theta$. Intégrer l'équation de Maxwell-Ampère sur un disque de rayon r perpendiculaire à l'axe Oz et montrer que $B(r, z) = -\frac{\mu_0 r}{2S} \frac{dQ}{dt}$ où μ_0 est la perméabilité magnétique du vide. On rappelle que $\iint_{(S)} \vec{\text{rot}} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \oint_{(C)} \vec{B} \cdot d\vec{l}$ où (S) représente une surface de contour (C) .
- I.13. En déduire la densité volumique w_m d'énergie magnétique dans le condensateur en fonction de μ_0 , Q , r et S .
- I.14. On suppose que la charge Q varie de façon sinusoïdale avec une pulsation ω . A quelle condition reliant ω , c (célérité de la lumière) et S , les effets magnétiques sont-ils négligeables devant les effets électriques dans le condensateur ($w_m \ll w_e$) ?
- I.15. Application numérique : donner l'ordre de grandeur de la plage de fréquence pour laquelle on peut négliger les effets magnétiques devant les effets électriques pour la valeur de S donnée précédemment. Dans les microphones électrostatiques ($S \approx 1 \text{ cm}^2$), les fréquences maximales sont de quelques dizaines de milliers de Hertz. Pourquoi ? Les effets magnétiques sont-ils alors négligeables ?
- I.16. Donner la relation liant la capacité C d'un condensateur avec le courant i qui le traverse et la tension u à ses bornes. On se placera dans la convention récepteur que l'on définira par un schéma. Montrer que la puissance électrique mise en jeu dans un condensateur peut alors se mettre sous la forme :

$$P = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} C u^2 \right).$$

- I.17. En déduire l'énergie électrique totale emmagasinée dans un condensateur en fonction de C et u . Exprimer alors cette énergie en fonction de Q , ϵ_0 , e et S . Retrouver alors le résultat de la question I.10.
- I.18. On suppose maintenant qu'un opérateur extérieur exerce perpendiculairement à l'armature supérieure une force F , permettant de faire passer l'épaisseur de e à $(e + de)$ à charge constante et sans communiquer d'énergie cinétique. Déterminer la variation d'énergie électrostatique contenue dans le condensateur. On donnera le résultat en fonction de Q , ϵ_0 , S et de . En admettant que cette variation d'énergie est égale au travail fourni par l'opérateur extérieur pour faire passer l'épaisseur de e à $(e + de)$, en déduire la norme F de la force exercée par l'opérateur en fonction de Q , ϵ_0 et S . En déduire la norme F_a de la force exercée par une armature sur l'autre en fonction des mêmes paramètres. On placera clairement cette force sur un dessin.
- I.19. On se propose de retrouver ce dernier résultat par un calcul à partir du champ électrique. Quel est le champ électrique \vec{E}_i créé par l'armature inférieure sur l'armature supérieure ? On exprimera le résultat en fonction de Q , S et ϵ_0 et d'un vecteur unitaire qu'on précisera. En déduire la force \vec{F}_a exercée par l'armature inférieure sur l'armature supérieure en fonction des mêmes paramètres. Comparer avec le résultat obtenu dans la question précédente.

Deuxième partie : Microphone électrostatique

Cette partie peut être traitée indépendamment de la première si on admet que la capacité d'un condensateur plan, dont les armatures ont une surface S et sont séparées par une distance e , est donnée par la formule $C = \epsilon_0 \frac{S}{e}$ et que la force exercée par une armature sur l'autre est une force attractive qui vaut en norme $F = \frac{Q^2}{2\epsilon_0 S}$.

On peut utiliser un condensateur plan comme microphone (voir figure 3 ci-après). En effet, un son étant une onde de pression, supposons que cette onde de pression arrive sur l'armature gauche du condensateur et provoque un déplacement y de cette armature par rapport à la position dite au repos du condensateur. La distance entre les deux armatures se trouvera modifiée et par voie de conséquence sa capacité. On pourra donc transformer un signal acoustique en un signal électrique en utilisant la variation de la capacité. On supposera que la face gauche de l'armature gauche est soumise à une pression totale $P_T = P_a + p(t)$, P_a représentant la pression atmosphérique et $p(t)$ la surpression acoustique due au son ($p(t)$ positif ou négatif). La face droite de l'armature gauche est soumise à la pression atmosphérique P_a . Sous l'effet de la surpression $p(t)$, l'armature se déplace de $y(t)$ (y positif vers la droite et négatif vers la gauche). En l'absence de surpression acoustique, les deux armatures sont séparées de e (comme dans la première partie), l'armature gauche étant dans un plan vertical passant par l'origine O de l'axe Oy .

Chacune des armatures a une surface S comme dans la première partie. L'armature gauche porte une charge $+Q(t)$ et l'armature droite $-Q(t)$.

L'armature gauche est rappelée vers sa position d'équilibre $y = 0$ par une force élastique de rappel de type ressort, proportionnelle à l'écart y avec une constante de raideur k , soit en projection sur l'axe Oy : $F_r = -k y$. Le dispositif exerçant cette force n'est pas représenté sur la figure.

Les divers frottements dans l'air introduisent une force de frottement fluide proportionnelle à la vitesse $\frac{dy}{dt}$ de la forme (toujours en projection sur l'axe Oy) : $F_f = -a \frac{dy}{dt}$ (a constante positive).

Si le condensateur est polarisé par une tension V_0 , toute variation de la capacité entraînera l'apparition d'un courant électrique, ce qui modifiera la charge Q de l'armature.

On suppose que lorsque les armatures sont au repos ($y = 0, \frac{dy}{dt} = 0$), $Q = Q_0, i = 0$, la force exercée par l'armature droite sur l'armature gauche est compensée par un dispositif non représenté. On posera donc lorsque les armatures bougent : $Q(t) = Q_0 + q(t)$ où Q_0 est la charge statique et $q(t)$ la charge induite par le déplacement y de l'armature. On supposera, pour les calculs, que les grandeurs $\frac{q(t)}{Q_0}$ et $\frac{y(t)}{e}$ sont des infiniment petits donc très inférieures à 1.

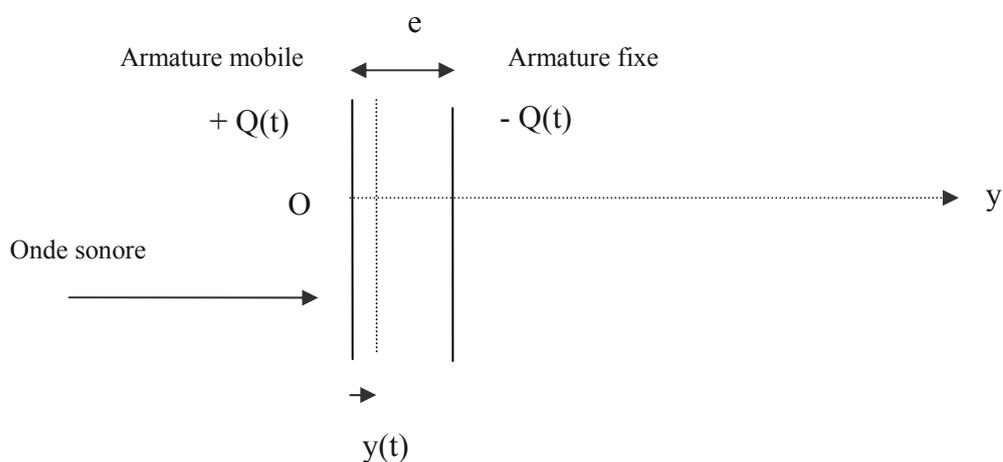


Figure 3 : Microphone électrostatique.

- I.20. Exprimer (sans approximation) la force électrique \vec{F}_e exercée par l'armature droite fixe sur l'armature gauche en mouvement (y différent de 0, i différent de 0) en fonction de Q_0, q, ϵ_0, S et d'un vecteur unitaire qu'on précisera. Simplifier cette expression en supprimant le terme infiniment petit d'ordre 2 en q (développement limité au premier ordre). Il ne doit plus rester qu'un terme constant et un terme variable proportionnel à q . Exprimer alors la composante variable $\vec{f}_e(t)$ de la force en fonction de q, Q_0, ϵ_0, S et d'un vecteur unitaire qu'on précisera. Seule cette dernière composante sera utilisée dans la suite des calculs. Pourquoi ?
- I.21. Quelle est la force totale $\vec{f}_p(t)$ subie par l'armature gauche de la part de l'air situé de part et d'autre ? On donnera le résultat en fonction de $p(t)$ (surpression acoustique), S et d'un vecteur unitaire qu'on précisera.
- I.22. En projetant le principe fondamental de la dynamique sur l'axe horizontal Oy, en déduire l'équation différentielle donnant $y(t)$ en fonction de m (masse d'une armature), $k, a, \epsilon_0, S, Q_0, q(t)$ et $p(t)$. Cette équation sera par la suite notée l'équation (1).

Le condensateur est inclus dans le montage électrique suivant, dans lequel le générateur de tension est parfait, de force électromotrice V_0 constante.

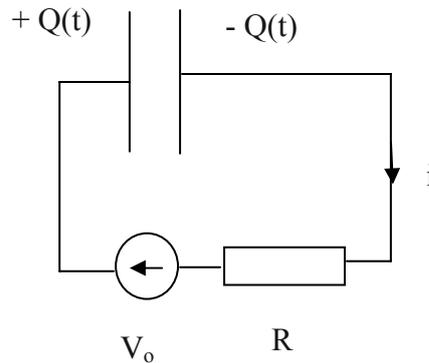


Figure 4 : Circuit électrique du microphone électrostatique.

- I.23. Exprimer V_0 en fonction de Q_0 , ϵ_0 , S et e lorsque y et i sont nuls (microphone au repos). Exprimer, sans approximation, la capacité C du condensateur en fonction de ϵ_0 , S , e et $y(t)$ lorsque le microphone vibre.
- I.24. Quelle relation lie $q(t)$ et $i(t)$? Justifier clairement. En appliquant la loi des mailles, en déduire la relation liant V_0 , $i(t)$, R , Q_0 , $q(t)$, ϵ_0 , S , e et $y(t)$.
- I.25. En partant de l'équation précédente et en négligeant le terme en qy devant les autres, montrer qu'on obtient : $\frac{Q_0}{\epsilon_0 S} y(t) = Ri(t) + \frac{1}{C_0} \int i(t) dt$ où C_0 représente la capacité du condensateur au repos. Cette équation est notée (2). On détaillera clairement le calcul et les simplifications faites.

On considère maintenant que $p(t)$, $y(t)$ et $i(t)$ sont des fonctions sinusoïdales de pulsation ω . On utilisera à partir de maintenant la notation complexe avec $j^2 = -1$. A chaque grandeur sinusoïdale $x(t)$, on associera la grandeur complexe $\overline{x(t)}$ telle que $x(t)$ soit la partie réelle de $\overline{x(t)}$.

- I.26. Réécrire l'équation (1) en notation complexe et en déduire une relation liant $\overline{y(t)}$, $\overline{i(t)}$ et $\overline{p(t)}$ et les divers paramètres. On posera $\overline{Z_m} = a + j \left(m\omega - \frac{k}{\omega} \right)$ et on exprimera $\overline{Z_m} \overline{y(t)}$ en fonction de S , ω , Q_0 , ϵ_0 , $\overline{p(t)}$ et $\overline{i(t)}$.
- I.27. De même, réécrire l'équation (2) en notation complexe et en déduire que $\overline{y(t)}$ et $\overline{i(t)}$ sont reliées en notation complexe par une relation du type $\overline{y(t)} = \overline{A} \overline{i(t)}$ où \overline{A} est une grandeur complexe qu'on exprimera en fonction de $\overline{Z_e} = \left(R + \frac{1}{jC_0 \omega} \right)$, Q_0 , S et ϵ_0 .
- I.28. En déduire, toujours en notation complexe, que $\overline{p(t)}$ et $\overline{i(t)}$ sont liées par une relation du type $\overline{i(t)} = \overline{B} \overline{p(t)}$ avec $\overline{B} = \frac{SE_0}{j\omega \overline{Z_e} \overline{Z_m} - \frac{E_0^2}{j\omega}}$, où E_0 est la norme du champ électrique dans le condensateur au repos.

- I.29. On a donc fabriqué un transducteur électroacoustique ou microphone puisqu'une surpression $p(t)$ va être transformée en courant électrique de même forme $i(t)$. L'amplitude du courant dépend-elle de la fréquence ? On choisira en pratique des valeurs numériques telles que R soit très supérieure à $\frac{1}{C_0 \omega}$, k très supérieur à $a\omega$ et très supérieur à $m\omega^2$ et kR très supérieur à $\frac{E_0^2}{\omega}$. Quel est l'intérêt d'un tel choix ?

Troisième partie : Microphone électrodynamique

On se propose dans cette partie de fabriquer un microphone en utilisant non plus un champ électrique dans un condensateur mais un champ magnétique dans une bobine. Pour cela, le son fera vibrer une membrane solidaire d'une bobine mobile dans un champ magnétostatique. Le dispositif (de révolution autour de l'axe $z'z$) est formé (voir figure 5 ci-après où seules les parties utiles pour le raisonnement ont été portées) :

- d'un aimant permanent fixe qui crée un champ magnétostatique $\vec{B} = B u_r$ radial (en coordonnées cylindriques d'axe $z'z$). Pour simplifier, on supposera que la norme B du champ magnétique est uniforme dans tout l'espace où se déplace la bobine.
- d'une bobine mobile indéformable comportant N spires circulaires de rayon a , placée dans l'entrefer de l'aimant annulaire et électriquement fermée sur elle-même.
- d'une membrane solidaire de la bobine et pouvant effectuer des déplacements suivant l'axe $z'z$ du schéma.

La membrane est ramenée vers sa position d'équilibre par une force élastique modélisée par un ressort de raideur k , solidaire de l'aimant à une extrémité et solidaire de la membrane à l'autre extrémité.

On supposera que la face droite de la membrane est soumise à une pression totale $P_T = P_a + p(t)$, P_a représentant la pression atmosphérique et $p(t)$ la surpression acoustique due au son ($p(t)$ pouvant être positive ou négative) comme dans la partie précédente. La face gauche de la membrane est soumise seulement à la pression atmosphérique P_a .

On supposera que la membrane est assimilable à un disque de section S .

L'ensemble mobile (membrane + bobine) de masse m est repéré par son abscisse $z(t)$. On supposera que pour $z = 0$, le ressort n'est ni tendu ni comprimé. L'ensemble est donc soumis à son poids, à la réaction du support compensant le poids, à la force $\vec{F}_r = -kz \vec{u}_z$ de rappel élastique du ressort de raideur k , à la résultante des forces de pression, à la résultante des forces d'origine électromagnétique et aux divers frottements. Ces frottements sont de type fluide et on admettra qu'ils sont proportionnels à la vitesse, soit : $\vec{F}_f = -\beta \frac{dz}{dt} \vec{u}_z$, le vecteur \vec{u}_z étant le vecteur unitaire de l'axe $z'Oz$. La position $z = 0$ correspond à la position de repos du système, le ressort n'étant ni tendu, ni comprimé, le courant ainsi que la surpression acoustique étant nuls.

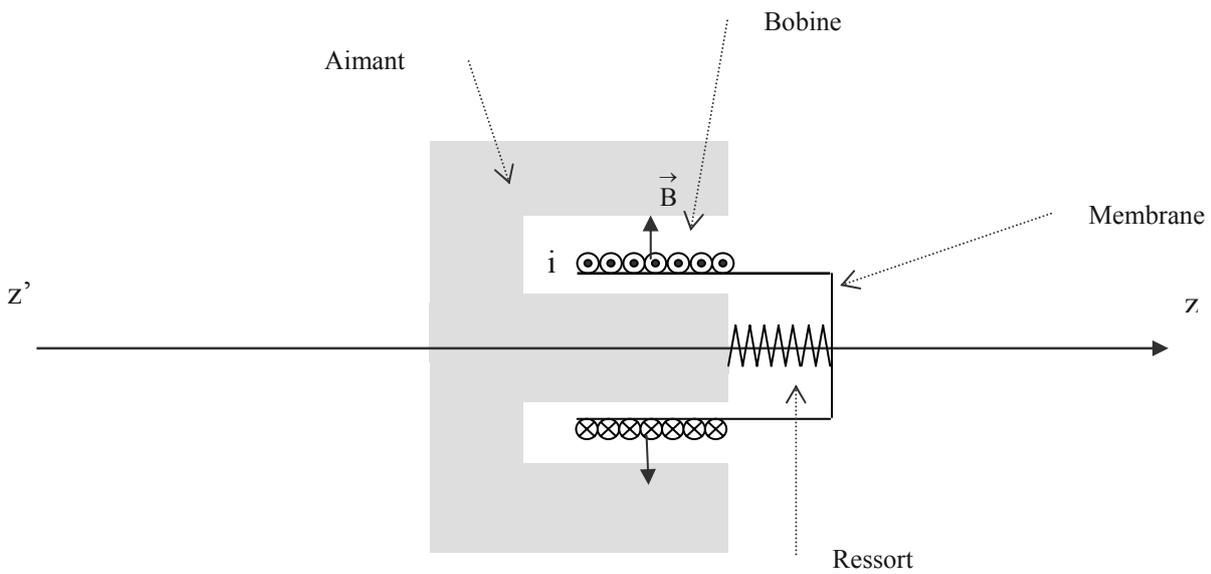


Figure 5 : Vue transversale du microphone électrodynamique.

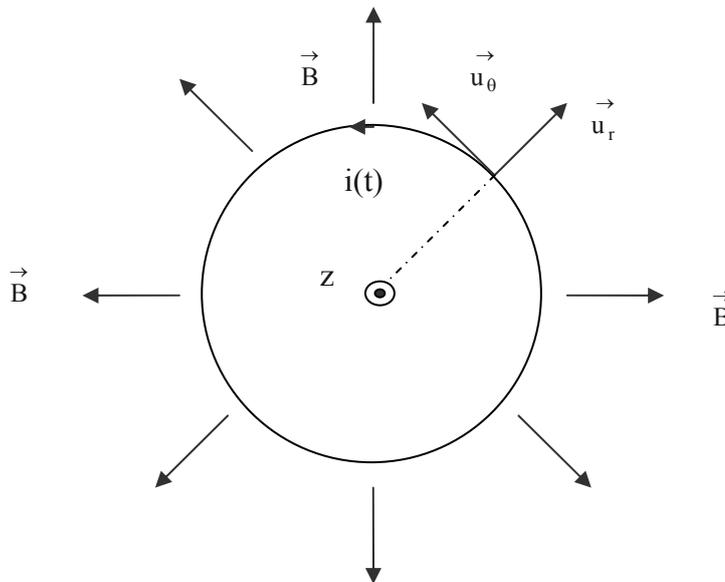


Figure 6 : Vue d'une spire de la bobine perpendiculairement à $z'z$.

- I.30. Expliquer pourquoi, si la membrane bouge, il apparaît un courant électrique $i(t)$ dans la bobine. Rappeler l'expression de la force élémentaire de Laplace $d\vec{f}_L$ exercée par un champ magnétique \vec{B} agissant sur un élément quelconque $d\vec{l}$ de fil électrique parcouru par un courant i en fonction de ces trois grandeurs. Exprimer cette force $d\vec{f}_L$ pour un élément $d\vec{l}$ de la bobine en fonction de i , dl (norme de $d\vec{l}$), B et d'un vecteur unitaire

qu'on précisera. En déduire l'expression de la résultante \vec{F}_L de la force de Laplace exercée par le champ magnétique sur l'ensemble de la bobine en fonction de N , a , i , B et d'un vecteur unitaire qu'on précisera.

- I.31. Déterminer, en coordonnées cylindriques, l'expression du champ électromoteur prenant naissance dans la bobine en fonction de $\frac{dz}{dt}$, B et d'un vecteur unitaire qu'on précisera. En calculant la circulation du champ électromoteur le long de la bobine, montrer que la force électromotrice prenant naissance dans la bobine vaut $e = 2\pi NaB \frac{dz}{dt}$. On respectera bien l'orientation proposée sur le schéma (figure 5). La bobine a une résistance R et un coefficient d'autoinductance L . Déterminer l'équation différentielle vérifiée par le courant i dans la bobine. Cette équation est appelée équation (3). On rappelle que la bobine est bouclée sur elle-même.
- I.32. Exprimer la force \vec{F}_p exercée par l'air sur la membrane en fonction de $p(t)$, S et d'un vecteur unitaire qu'on précisera.
- I.33. En appliquant le principe fondamental de la dynamique à la membrane, déterminer l'équation différentielle liant $z(t)$ et ses dérivées à l'intensité $i(t)$ et à $p(t)$. Cette équation est appelée équation (4).

On suppose que la surpression acoustique $p(t)$ est sinusoïdale de pulsation ω . On utilisera donc la notation complexe avec $j^2 = -1$ et, comme dans la partie précédente, les grandeurs complexes seront notées avec une barre. En régime forcé, le courant i et le déplacement z seront donc eux aussi sinusoïdaux.

- I.34. Réécrire en notation complexe l'équation (3). On posera $\bar{Z}_e = (R + jL\omega)$ et on donnera $\bar{Z}_e \bar{i}$ en fonction de N , a , B , ω et \bar{z} .
- I.35. Réécrire en notation complexe l'équation (4). On posera $\bar{Z}_m = (\beta + j(m\omega - \frac{k}{\omega}))$ et on donnera $\bar{Z}_m \bar{z}$ en fonction de \bar{p} , S , ω , N , a , B et \bar{i} .
- I.36. Montrer, qu'en notation complexe, $\bar{p}(t)$ et $\bar{i}(t)$ sont reliées par une relation du type $\bar{i}(t) = \bar{A}\bar{p}$ où \bar{A} est une grandeur complexe que, par analogie avec la deuxième partie, l'on mettra sous la forme $\bar{A} = \frac{X}{\bar{Z}_m \bar{Z}_e + Y}$. Exprimer X et Y en fonction de N , a , B et S .
- I.37. L'amplitude du courant dépend-elle de la fréquence ? Comme dans la deuxième partie, peut-on choisir les divers paramètres du problème pour que cela ne soit pratiquement pas le cas ? Quel serait alors l'intérêt ?

FIN DU PROBLEME I

Quatrième partie : amortissement électromagnétique

Dans cette partie, on souhaite étudier le principe d'un amortissement électromagnétique pour la suspension.

Un cadre carré de côté a , de masse m , de résistance totale R et d'inductance négligeable est astreint à se déplacer dans une zone de l'espace telle que :

- dans la zone définie par $z > 0$ règne un champ magnétique uniforme et orthogonal au cadre $\vec{B} = B\vec{u}_x$;
- dans la zone définie par $z < 0$, il n'existe pas de champ magnétique.

La position du cadre est repérée par l'abscisse z du côté horizontal supérieur du cadre.

Un dispositif non représenté astreint le cadre à se déplacer uniquement verticalement.

Le déplacement du cadre au cours du temps est tel qu'à tout instant, le côté horizontal inférieur se trouve dans la zone où il n'existe pas de champ magnétique et le côté horizontal supérieur se trouve dans la zone où règne le champ magnétique \vec{B} .

L'orientation arbitraire du cadre est indiquée sur la figure 5.

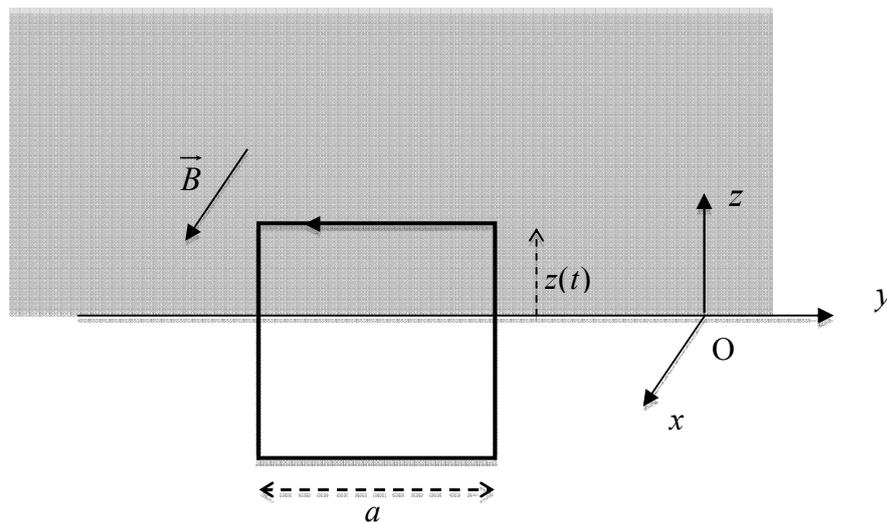


Figure 5 : spire dans le champ magnétique

Dans cette partie, on négligera tous les frottements mécaniques.

19 – On souhaite déterminer l'intensité du courant induit qui va traverser le cadre.

19.1 – Déterminer le flux $\Phi(t)$ du champ magnétique à travers le cadre lorsque il est repéré par une position $z(t)$.

19.2 – Déterminer l'expression de la force électromotrice induite $e(t)$ qui apparaît dans le cadre en fonction de a , \dot{z} et B .

19.3 – En déduire l'expression de l'intensité du courant $i(t)$ qui apparaît dans le cadre en fonction de \dot{z} , a , R et B .

20 – Déterminer l'expression de la résultante de la force de Laplace qui s'applique sur le cadre en fonction de \dot{z} , a , R , B et d'un ou plusieurs vecteurs unitaires que l'on précisera.

21 – Justifier le fait que le cadre ainsi constitué pourrait servir de système d'amortissement pour une suspension de véhicule. Citer certains avantages que présenterait un tel système d'amortissement par rapport aux systèmes classiques.

22 – Déterminer l'expression du champ B à appliquer pour que le cadre puisse servir d'amortisseur de coefficient de frottement h . On exprimera B en fonction de h , R et a .

23 – Pour un amortisseur de véhicule, le coefficient de frottement doit être de l'ordre de $h = 10^4$ S.I. On se place dans le cas d'un cadre de côté $a = 10$ cm et de résistance $R = 10^{-4} \Omega$.

Déterminer numériquement l'ordre de grandeur du champ B qu'il faudrait appliquer au cadre pour produire un tel coefficient de frottement.

Quel est l'ordre de grandeur de l'intensité du champ magnétique que peut créer un aimant permanent ?

Pourrait-on créer un champ magnétique d'une telle intensité avec un électroaimant ?