

Devoir Surveillé n°6

Durée : 4 heures

Les calculatrices personnelles sont interdites.

Instructions générales

Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction. La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non encadrés et non justifiés ne seront pas pris en compte.

Toute application numérique ne comportant pas d'unité ne donnera pas lieu à attribution de points.

Les différents problèmes sont indépendants. Les diverses parties peuvent être traitées dans l'ordre choisi par le candidat. Le candidat prendra soin de bien numéroter les questions.

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Physique : (au choix)

Problème 1 (1 h 30) : Extrait CCP 2010

Problème 2 (30 min) : Extrait PT 2009

Problème 3 (30 min) : Extrait ATS 2012

Problème 4 (30 min) : Extrait CCP 2012

**Problème 1 (3h) : Extrait
Centrale Supélec 2010**

ou

Chimie :

Problème 5 (1 h) : Extrait CCP 2007



EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE TSI

PHYSIQUE

Durée : 4 heures

L'usage des calculatrices est interdit.

N.B. : Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Données mathématiques :

Opérateurs mathématiques en coordonnées cartésiennes dans le repère cartésien orthonormé direct $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

Divergence :
$$\text{div} \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Rotationnel :
$$\vec{\text{rot}} \vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \vec{e}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \vec{e}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \vec{e}_z$$

Laplacien d'un champ scalaire :
$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

Laplacien d'un champ vectoriel :
$$\Delta \vec{A} = \begin{cases} \Delta A_x = \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} \\ \Delta A_y = \frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} \\ \Delta A_z = \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \end{cases}$$

Relations concernant les opérateurs mathématiques :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{Z}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div } \vec{Z}) - \Delta \vec{Z}$$

$$\Delta U = \text{div}(\overrightarrow{\text{grad}} U)$$

Trigonométrie :

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$

$$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$$

$$\cos(p) + \cos(q) = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\cos(p) - \cos(q) = -2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\sin(p) + \sin(q) = 2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\sin(p) - \sin(q) = 2 \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$$

Premier problème : Propagation d'ondes électromagnétiques

Dans l'ensemble du problème, on se place dans l'espace rapporté à un repère cartésien orthonormé direct $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

On désignera par ε_0 la permittivité diélectrique du vide et par μ_0 la perméabilité magnétique du vide.

Première partie : Propagation dans le vide

1 – Rappeler l'expression des équations de Maxwell dans un milieu non chargé, non conducteur et assimilable au vide.

Déduire des équations de Maxwell les équations de propagation vérifiées dans un milieu non chargé, non conducteur et assimilable au vide par le champ électrique $\vec{E}$ et par le champ magnétique $\vec{B}$.

2 – Expliquer ce qu'est une onde plane.

3 – On considère une onde électromagnétique pour laquelle l'expression du champ électrique est donnée en coordonnées cartésiennes par la formule : $\vec{E} = E_0 \cos[\omega(t - \frac{z}{c})] \vec{e}_x$ où E_0 est une constante positive, ω est la pulsation de l'onde (constante), c la célérité de la lumière dans le vide et t le temps.

3.1 – Montrer que l'expression précédente du champ électrique correspond bien à celle d'une onde plane dont on précisera la direction et le sens de propagation.

Montrer que cette onde vérifie l'équation de propagation déterminée à la question 1 à condition que c , ϵ_0 et μ_0 soient reliés par une relation que l'on déterminera.

3.2 – En exploitant le fait que cette onde est plane ou en utilisant une des équations de Maxwell rappelée dans la question 1, déterminer l'expression du champ magnétique $\vec{B}$ de cette onde en fonction de E_0 , c , ω , z , t et d'un vecteur unitaire que l'on précisera.

4.1 – Donner l'expression du vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$ associé à une onde électromagnétique ($\vec{E}$, $\vec{B}$). Quelle est la signification physique de ce vecteur ? Quelle est l'unité du système international qui lui correspond ?

4.2 – Déterminer l'expression du vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$ relatif à l'onde plane considérée. On exprimera $\vec{\Pi}$ en fonction de t , c , E_0 , ϵ_0 , z , ω et d'un vecteur unitaire que l'on précisera. Déterminer la valeur moyenne $\langle \vec{\Pi} \rangle$ au cours du temps. On exprimera $\langle \vec{\Pi} \rangle$ en fonction de c , E_0 , ϵ_0 et d'un vecteur unitaire que l'on précisera.

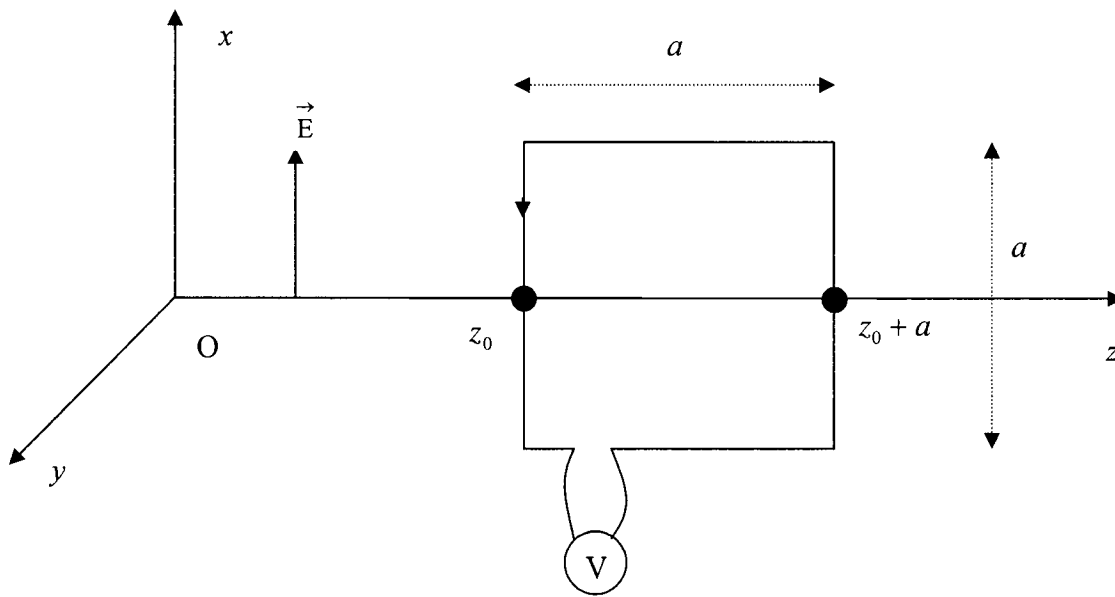
5 – L'onde arrive sur une cellule détectrice placée perpendiculairement à la direction de propagation de l'onde. Soit P la puissance moyenne reçue par la cellule détectrice de surface S . Déterminer l'expression de E_0 en fonction de ϵ_0 , c , P et S .

6 – Comment doit-on placer une antenne filaire (segment métallique) pour détecter le champ électrique ? Justifier clairement votre raisonnement.

7 – L'onde est maintenant détectée par un cadre conducteur rectiligne formant un carré de côté a , fermé sur un voltmètre et placé dans le plan xOz comme indiqué sur la figure ci-dessous (page 4/14).

Le cadre est arbitrairement orienté comme représenté sur la figure de sorte que sa normale $\vec{N}$ est colinéaire à $\vec{e}_y$.

Le centre du cadre est à l'abscisse $z_0 + \frac{a}{2}$ et les brins verticaux aux abscisses z_0 et $z_0 + a$.



On se place dans le cas où la longueur a du côté du cadre est telle que le champ magnétique ne peut pas être considéré comme uniforme sur la surface du cadre.

7.1 – Calculer le flux Φ du champ magnétique à travers le cadre à un instant t en fonction de t , c , E_0 , ω , z_0 et a .

En déduire l'expression de la force électromotrice induite $e(t)$ dans le cadre en fonction de t , c , E_0 , ω , z_0 et a .

7.2 – Le voltmètre mesure une tension efficace U_{eff} , déterminer l'expression de U_{eff} en fonction de c , ω , a et E_0 .

8 – La valeur de a étant donnée, montrer qu'il existe des valeurs ω_{max} de ω pour lesquelles l'amplitude de la force électromotrice induite est maximale et d'autres valeurs ω_{min} pour lesquelles elle est nulle. Déterminer ω_{max} et ω_{min} en fonction de c et a .

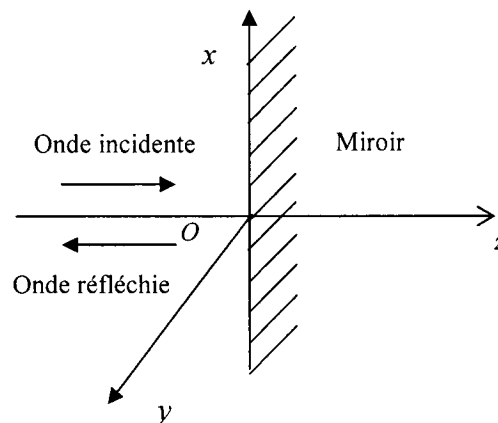
Deuxième partie : Réflexion sur un miroir métallique parfaitement conducteur

Une onde électromagnétique à polarisation rectiligne se propage dans le vide dans la direction (Oz), dans le sens des z croissants.

Le champ électrique de l'onde est donné par l'expression : $\vec{E}_i = E_0 \cos[\omega(t - \frac{z}{c})] \vec{e}_x$ où E_0 est une constante positive, ω est la pulsation de l'onde (constante), c la célérité de la lumière dans le vide et t le temps.

En $z = 0$, l'onde arrive sur la surface plane d'un miroir métallique parfaitement conducteur et ne comportant initialement aucune charge électrique. Le miroir occupe le plan xOy . On admet que les champs électrique et magnétique sont nuls à l'intérieur du miroir.

On admet que l'onde incidente donne naissance à une onde réfléchie $\vec{E}_r = E_{0r} \cos[\omega(t + \frac{z}{c})] \vec{e}_x$ se propageant dans le sens des z décroissants.



9.1 – Ecrire les conditions aux limites que doivent vérifier les champs électrique $\vec{E}$ et magnétique $\vec{B}$ en $z = 0$. On précisera clairement la signification des différents termes ainsi que les vecteurs unitaires utilisés.

En déduire l'expression de E_{0r} en fonction de E_0 .

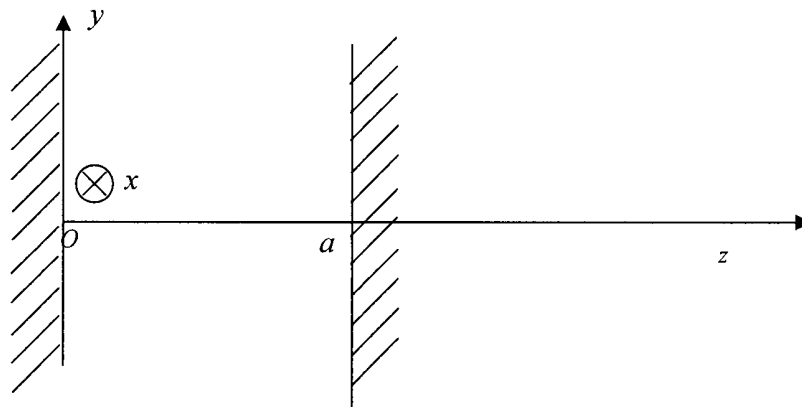
9.2 – En déduire l'expression du champ électrique $\vec{E}_{total}$ résultant de la superposition de l'onde incidente et de l'onde réfléchie dans le demi-espace $z < 0$. On exprimera $\vec{E}_{total}$ en fonction de ω , c , t , z , E_0 et d'un vecteur unitaire que l'on précisera.

Caractériser l'onde résultante.

10 – En utilisant les équations de Maxwell ou les propriétés des ondes électromagnétiques planes, déterminer le champ magnétique incident $\vec{B}_i$, puis le champ magnétique réfléchi $\vec{B}_r$. En déduire le champ magnétique $\vec{B}_{total}$ résultant de la superposition de l'onde incidente et de l'onde réfléchie dans le demi-espace $z < 0$. On exprimera $\vec{B}_i$, $\vec{B}_r$ et $\vec{B}_{total}$ en fonction de ω , c , t , z , E_0 et de vecteurs unitaires que l'on précisera.

11 – Déterminer l'expression du vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$ de l'onde résultante ainsi que sa valeur moyenne $\langle \vec{\Pi} \rangle$. Commenter.

Troisième partie : Onde stationnaire entre deux plans parallèles parfaitement conducteurs



On étudie une onde électromagnétique, stationnaire, plane, monochromatique, à polarisation rectiligne entre deux plans métalliques parfaitement conducteurs, parallèles, d'équations respectives $z = 0$ et $z = a$.

Le champ électrique de l'onde considérée s'écrit sous la forme $\vec{E} = E_0 f(z) \cos(\omega t) \vec{e}_x$ où E_0 est une constante positive, $f(z)$ est une fonction qui ne dépend que de z , ω est la pulsation de l'onde (constante) et t le temps.

12 – Justifier le fait que l'onde ainsi étudiée est une onde plane et stationnaire.

13 – On admet que les champs électrique et magnétique $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont nuls dans un métal parfaitement conducteur. En utilisant les conditions aux limites que doit vérifier le champ $\vec{E}$ (rappelées à la question 9.1 de la partie précédente), déterminer les valeurs limites $f(0+)$ et $f(a-)$ de la fonction $f(z)$ quand z tend vers 0 par valeurs supérieures et quand z tend vers a par valeurs inférieures.

14 – En sachant que le champ électrique $\vec{E} = E_0 f(z) \cos(\omega t) \vec{e}_x$ vérifie l'équation de propagation déterminée dans la première partie, déterminer l'équation différentielle du second ordre vérifiée par la fonction $f(z)$.

15 – Par intégration de l'équation différentielle précédente et en prenant en compte les conditions aux limites obtenues dans la question 13, déterminer, à une constante multiplicative près, la fonction $f(z)$ en fonction de ω , z , c .

En déduire que la pulsation ω ne peut prendre que des valeurs discrètes que l'on déterminera en fonction de c et a .

TROISIEME PARTIE

Etude d'un détecteur de métal

A / ETUDE D'UN OSCILLATEUR

Le circuit oscillant de la partie précédente est utilisé dans le montage électronique de la figure 6 où figure un amplificateur opérationnel idéal, fonctionnant en régime linéaire, et trois résistances, dont une réglable (R_3).

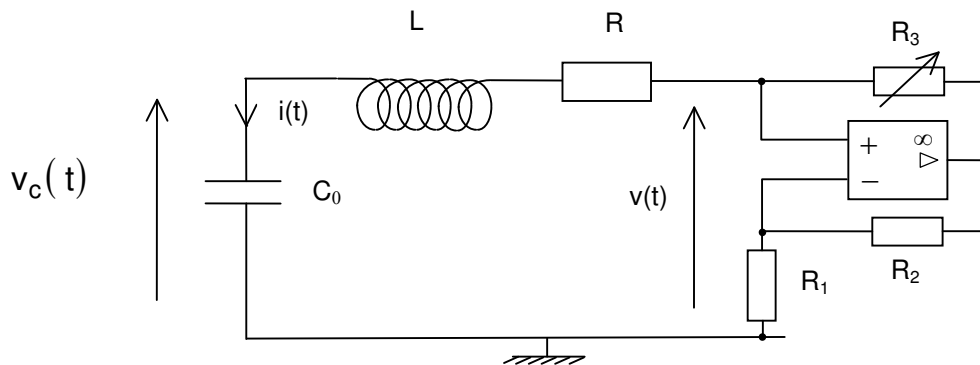


Figure 6

A1. Etablir la relation entre $i(t)$, $v(t)$, R_1 , R_2 et R_3 .

A2. En déduire l'équation différentielle vérifiée par $i(t)$. On posera $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC_0}}$, $m = \frac{R}{2L\omega_0}$ et

$$m' = \frac{R_3 R_1}{2R_2 L \omega_0}.$$

A3. Etudier qualitativement le fonctionnement du montage lorsque $m' < m$ et lorsque $m' > m$. Que se passe-t-il théoriquement si $m' = m$? Cette condition est-elle réalisable ? Quel est le rôle de la résistance réglable R_3 ?

Application numérique : $C_0 = 22 \text{ nF}$, $L = 20 \text{ mH}$. A quelle fréquence peut fonctionner cet oscillateur ?

A4. La tolérance sur la valeur de la capacité du condensateur est donnée à 5%. Quel écart relatif de fréquence pourra en découler ?

B / DETECTEUR DE METAL

On réalise deux oscillateurs sinusoïdaux du type étudié au A ci-dessus, avec deux bobines b_1 et b_2 de mêmes dimensions. Les deux bobines sont placées côte à côte dans la tête de détection de l'appareil mais leur couplage magnétique reste négligeable (l'inductance mutuelle entre les deux bobines est négligée). La tête de détection est sensiblement plane, et parallèle au sol. Les oscillateurs sont appelés osc_1 et osc_2 , leurs sorties respectives sont les tensions v_{c1} et v_{c2} aux bornes des condensateurs ; on supposera que ces deux tensions sont de même amplitude, notées V_0 , de l'ordre du volt, et on notera f_1 et f_2 leurs fréquences respectives.

En l'absence de pièce métallique et loin du sol, les fréquences d'oscillations sont f_{10} et f_{20} (f_{20} est supposée supérieure à f_{10}).

Le montage complet du détecteur est donné à la figure 7. Un multiplieur donne en sortie le signal $V_A = A \cdot v_{c1} \cdot v_{c2}$, il est suivi par un filtre passe-bande de fréquence centrale $f'_0 = f_{20} - f_{10}$, de gain G et de facteur de qualité Q' , et d'un convertisseur fréquence – tension. L'élément final de la chaîne est un voltmètre numérique qui reçoit du convertisseur fréquence-tension une tension égale à $B \cdot (f - f'_0)$, lorsque celui-ci reçoit un signal périodique de fréquence f .

Le montage fonctionne correctement si f'_0 est de l'ordre de grandeur de 100 Hz.

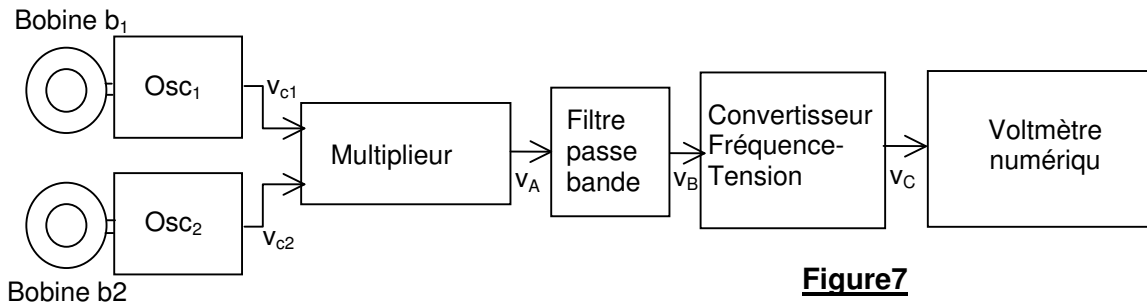


Figure7

B1. Quelles sont les unités des coefficients A (pour le multiplieur) et B (pour le convertisseur fréquence-tension) ?

B2. Quel est le rôle du multiplieur suivi du filtre passe bande ? Sachant que $Q' = 20$ et que f_{10} et f_{20} sont de l'ordre de 8 kHz, montrer, avec précisions quantitatives, que le signal à l'entrée du convertisseur fréquence-tension est assimilable à une tension sinusoïdale, dès lors que l'écart entre f_{10} et f_{20} est situé dans la bande passante du filtre.

B3. Pourquoi les deux fréquences f_{10} et f_{20} ont-elles peu de chance d'être identiques ? Comment peut-on ajuster l'écart entre ces deux fréquences ?

La présence du sol modifie les lignes de champ des bobines b_1 et b_2 . Il s'ensuit une variation de fréquence Δf -sensiblement identique sur chaque oscillateur- qui n'a pas d'influence sur la sortie du montage.

B4. Expliquer cette absence d'influence.

On suppose que la présence d'un objet métallique plus proche de la bobine b_1 que de la bobine b_2 induit une diminution de fréquence $\Delta'f$ sur f_1 , alors que f_2 reste quasi-constante..

Application numérique : $f_{10} = 7516$ Hz ; $f_{20} = 7653$ Hz ; $\Delta'f = 5$ Hz ; $A = 0,1$ SI ; $B = 0,6$ SI ; $G = 12$.

Calculer la tension à l'entrée du voltmètre numérique suite à la détection de l'objet métallique.

B5. Expliquer en détails ce qu'observe l'utilisateur de ce détecteur de métaux lorsque la tête de détection se déplace de part et d'autre de l'objet métallique.

II. Détection automatique de la pluie

De nombreux dispositifs d'aide à la conduite sont apparus ces dernières années, comme par exemple la détection automatique de pluie qui commande la mise en route des essuie-glaces.

Disposé à l'intérieur du véhicule, une diode électroluminescente DEL projette un faisceau lumineux sur le pare-brise. Un capteur reçoit et mesure en permanence la lumière réfléchie.

Plus il y a d'eau sur la vitre, moindre est la réflexion. Le capteur de pluie pilote ainsi l'essuie-glace en fonction de la quantité d'eau détectée et sélectionne automatiquement la vitesse d'essuyage la plus efficace.

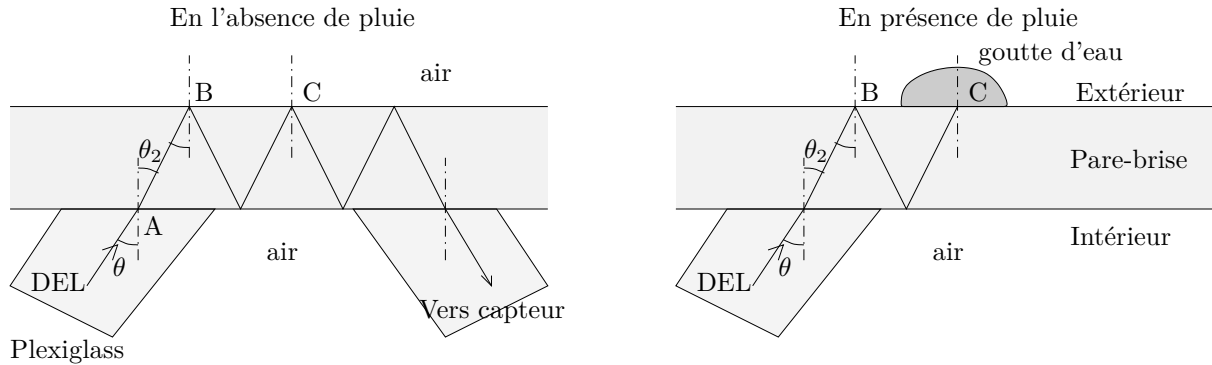


FIGURE 4 – Étude de la propagation du rayon lumineux dans le pare-brise de la voiture

Les rayons lumineux émis par la diode électroluminescente se propagent jusqu'au pare-brise dans du plexiglass d'indice optique $n_p = 1,50$. Les rayons sont dirigés vers le pare-brise avec un angle d'incidence de $\theta = 50^\circ$.

On supposera que le pare-brise est en verre d'indice optique $n_v = 1,55$.

L'indice optique de l'eau est $n_e = 1,33$ et celui de l'air $n_a = 1$.

II.1. Calculer la valeur de θ_2 l'angle de réflexion au point A.

II.2. En l'absence de pluie, existe-il un rayon réfracté au point B ou au point C? Justifier.

II.3. En présence d'une goutte de pluie sur le pare-brise, existe-il un rayon réfracté au point C? Justifier.

II.4. Expliquer pourquoi plus il y aura de gouttes sur le pare-brise, moins l'intensité lumineuse reçue par le capteur sera importante.

III. Commande à distance du verrouillage des portes d'un véhicule

Les véhicules modernes disposent de l'ouverture centralisée à partir d'une commande intégrée à la clé. Suivant la fonction que veut mettre en oeuvre l'opérateur (ouverture des portes, fermeture...), un signal est émis par la clé sous forme d'onde électromagnétique.

Rappel :

$$\begin{aligned} \bullet \quad \vec{\text{rot}} \vec{A} &= \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \vec{e}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \vec{e}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \vec{e}_z \\ \bullet \quad \vec{\Delta} \vec{A} &= \Delta A_x \cdot \vec{e}_x + \Delta A_y \cdot \vec{e}_y + \Delta A_z \cdot \vec{e}_z = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} & \text{sur} & \vec{e}_x \\ \frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} & \text{sur} & \vec{e}_y \\ \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} & \text{sur} & \vec{e}_z \end{vmatrix} \end{aligned}$$

- compression 1 - 2 isotherme réversible à la température $T_1 = 300 \text{ K}$,
- échauffement 2 - 3 isochore jusqu'à l'état 3 de température $T_3 = 600 \text{ K}$,
- détente 3 - 4 isotherme réversible à la température T_3 ,
- refroidissement 4 - 1 isochore jusqu'à l'état 1.

Il n'y a pas de travail autre que celui des forces de pression. On rappelle que $C_v = \frac{nR}{\gamma - 1}$.

4.1/ Représenter l'allure du cycle dans le diagramme (P, V) . Comment peut-on savoir, sans calcul, si le cycle proposé est celui d'un moteur ou d'un récepteur ?

4.2/ Exprimer le travail reçu par le fluide au cours de la compression W_{12} en fonction de n, R, T_1 et du rapport de compression $\rho = \frac{V_1}{V_2}$. En déduire le transfert thermique Q_{12} reçu par le fluide au cours de cette compression en fonction de n, R, T_1 et ρ . Préciser les signes de W_{12} et Q_{12} .

4.3/ Exprimer le transfert thermique Q_{23} reçu par le fluide au cours de l'échauffement en fonction de n, R, T_1, T_3 et γ . Préciser son signe.

4.4/ Exprimer le travail reçu par le fluide au cours de la détente W_{34} en fonction de n, R, T_3 et ρ . En déduire le transfert thermique Q_{34} reçu par le fluide au cours de cette détente en fonction de n, R, T_3 et ρ . Préciser les signes de W_{34} et Q_{34} .

4.5/ Exprimer le transfert thermique Q_{41} reçu par le fluide au cours du refroidissement en fonction de n, R, T_1, T_3 et γ . Préciser son signe.

4.6/ Le régénérateur étant idéal, on a $Q_{23} + Q_{41} = 0$. Quelle est alors, sur le plan énergétique, la grandeur coûteuse (pour l'utilisateur) de ce système sur un cycle ?

La grandeur énergétique utile est le travail fourni par le fluide sur le cycle. En déduire l'expression du rendement η' en fonction de T_1 et T_3 . Commenter puis faire l'application numérique.

Troisième partie : périscope

5/ En immersion peu profonde, le sous-marin peut utiliser un périscope pour examiner la surface de la mer. Nous nous proposons dans cette partie d'en étudier le fonctionnement simplifié. La figure 9 représente le principe général du périscope étudié, constitué de deux prismes identiques.

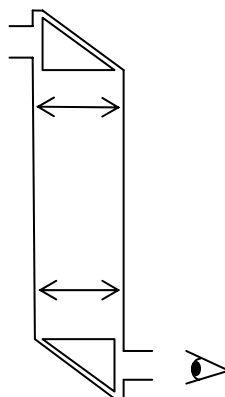


Figure 9 : schéma général du périscope

5.1/ Les deux prismes du périscope sont identiques, seule leur orientation diffère ; ils sont constitués d'un verre d'indice $n = 1,5$ et sont plongés dans l'air d'indice 1 (figure 10) :

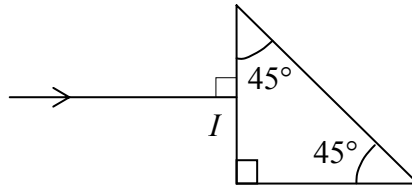


Figure 10 : prisme du périscope

On considère le rayon incident arrivant sous incidence normale sur la face d'entrée de l'un des prismes. Refaire sur la copie le schéma de la figure 10 en le complétant (dessiner la « suite » du rayon). Justifier soigneusement par un calcul les constructions au niveau de chaque interface.

5.2/ Dans la suite et par souci de simplification, nous remplacerons les prismes par des miroirs plans inclinés à 45° . Le schéma équivalent du périscope est fourni dans le document réponse 2. Représenter sur ce schéma l'image A_1B_1 de l'objet AB par le miroir M_1 , puis l'image A_2B_2 de A_1B_1 par la lentille L_1 de centre O_1 , puis l'image A_3B_3 de A_2B_2 par la lentille L_2 de centre O_2 et enfin l'image $A'B'$ de A_3B_3 par le miroir M_2 . On rappelle que le document réponse 2 doit être joint à la copie.

5.3/ On donne les longueurs algébriques (ces longueurs ne correspondent pas au schéma du document réponse 2) :

$\overline{AM_1} = 100 \text{ m}$; $\overline{O_1M_1} = -30 \text{ cm}$; $f'_1 = 50 \text{ cm}$; $\Delta = \overline{F'_1F_2} = 20 \text{ cm}$; $f'_2 = 40 \text{ cm}$; $\overline{O_2M_2} = 90 \text{ cm}$. M_1 et M_2 sont les centres des miroirs.

Calculer les positions des images : $\overline{O_1A_2}$, $\overline{O_2A_3}$ et $\overline{M_2A'}$ ainsi que le grandissement du périscope

$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$. L'image finale est-elle de même sens que l'objet ou renversée ?

5.4/ Citer une méthode expérimentale pour mesurer la distance focale d'une lentille convergente et expliquer rapidement son principe.

Deuxième problème : machine asynchrone

Aucune connaissance préalable du principe de fonctionnement de la machine asynchrone n'est nécessaire pour traiter ce problème.

Cette machine se compose principalement de deux parties :

- le stator réalisé à l'aide d'un ensemble de bobines fixes destinées à engendrer dans une zone limitée de l'espace un champ magnétique tournant $B(t)$,
- le rotor modélisé ici par un cadre conducteur rectangulaire de surface S mobile autour d'un axe.

Première partie : étude du stator

6/ Soit un ensemble de trois bobines (figure 11), dont les axes sont perpendiculaires à Oz et régulièrement décalés de $\frac{2\pi}{3}$. Ces bobines sont parcourues par des courants sinusoïdaux de pulsation ω_s dont les intensités sont les suivantes :

$$i_1(t) = I_0 \cos(\omega_s t) ; i_2(t) = I_0 \cos\left(\omega_s t - \frac{2\pi}{3}\right) ; i_3(t) = I_0 \cos\left(\omega_s t - \frac{4\pi}{3}\right).$$

DANS LA PARTIE BARRÉE

The diagram illustrates a two-link mechanism on a grid background. A vertical axis and a horizontal axis intersect at the origin. A coordinate system is defined at the top left with point A at the origin and point B at the top of a vertical arrow. Link 1 (L_1) is a horizontal line segment pivoted at point O_1 . A vertical force F'_1 acts downwards at the right end of L_1 , and a horizontal force F_2 acts to the left at the same point. Link 2 (L_2) is an inclined line segment pivoted at point O_2 . A vertical force F_2' acts upwards at the right end of L_2 , and a horizontal force F_1 acts to the right at the same point. The forces F_1 and F_2 are shown as arrows pointing towards the pivot points O_1 and O_2 respectively. The forces F'_1 and F_2' are shown as arrows pointing away from the pivot points O_1 and O_2 respectively. The links are labeled L_1 and L_2 near their right ends. The pivot points are labeled O_1 and O_2 . The forces are labeled F_1 , F_2 , F'_1 , and F_2' . The coordinate system is labeled A and B .

PHYSIQUE II

Calculatrices autorisées.

Ce sujet comporte une annexe à rendre avec la copie.

Nous nous intéressons dans ce sujet à la propagation dans l'atmosphère et la réception d'ondes électromagnétiques par modulation et démodulation d'amplitude (AM). Les différentes parties sont relativement dépendantes mais il est possible à tout moment d'admettre les résultats des questions précédentes.

Données :

- vitesse de la lumière dans le vide $c = 3,00 \times 10^8 \text{ m.s}^{-1}$;
- Perméabilité du vide $\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$.

Formulaire :

- $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{A}) = -\Delta\vec{A} + \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}\vec{A})$
- $\cos a \times \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$

Partie I - Préliminaires

Les grandes ondes sont des ondes électromagnétiques appelées AM (ou encore GO ou LW). La fréquence de ces ondes varie de 150 kHz à 300 kHz. Par exemple, la station *Europe 1* émet des ondes dont la fréquence caractéristique vaut 185 kHz. Elles sont émises par quatre masts haubanés qui émettent au total une puissance moyenne $P = 2000 \text{ kW}$. Dans toute la suite, on supposera que ces antennes rayonnent une onde électromagnétique plane et monochromatique de fréquence $f = 185 \text{ kHz}$. On supposera, dans cette partie, que l'onde se propage dans l'air que l'on assimilera au vide.

I.A - Calculer la longueur d'onde associée à ce rayonnement électromagnétique.

I.B - On suppose que le champ électrique est polarisé suivant Oy , et que l'onde se propage suivant les z croissants. En appelant E_0 l'amplitude du champ électrique en O , donner une expression possible du champ électrique complexe $\vec{E}$ en convention $\exp(+j\omega t)$ ($j^2 = -1$) et en notant k la norme du vecteur d'onde. Donner, sans démonstration, l'expression de k en fonction de ω et c .

I.C - Donner le champ magnétique associé à cette onde.

Filière TSI

I.D - Donner l'expression du vecteur de Poynting et en calculer sa valeur moyenne temporelle.

I.E - En supposant schématiquement que toute la puissance des antennes se retrouve sur une surface plane notée $S = 100 \text{ km}^2$, établir l'expression de E_0 en fonction de P (puissance moyenne temporelle du rayonnement). Faire l'application numérique.

I.F - En fait les antennes rayonnent dans toutes les directions de l'espace. Critiquer alors le modèle précédent.

I.G - Le modèle de l'onde plane est-il tout de même correct à l'échelle des récepteurs radios couramment utilisés ? Justifier votre réponse.

Partie II - Propagation dans l'atmosphère

L'onde émise par l'antenne se propage dans l'atmosphère terrestre que l'on modélise schématiquement en deux couches (voir figure 1). Une première couche assimilable au vide partant du sol jusqu'à une altitude de $h = 100 \text{ km}$ environ puis une deuxième couche appelée *ionosphère*, épaisse d'environ 200 km :

II.A - Réflexion ionosphérique des grandes ondes

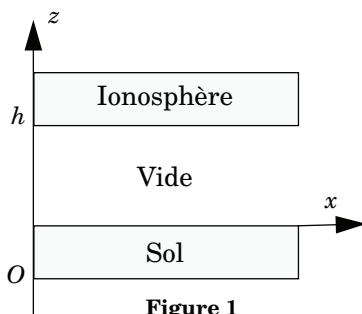


Figure 1

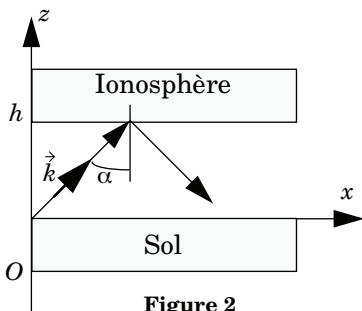


Figure 2

On désire étudier le comportement des grandes ondes lors de leur propagation entre l'ionosphère et le sol terrestre. On suppose *dans cette partie* que l'ionosphère a le même comportement qu'un miroir métallique parfait : l'onde émise au sol et se propageant dans le vide est parfaitement réfléchi par l'ionosphère.

II.A.1) On considère une onde plane, monochromatique, de pulsation ω qui se propage dans la partie « vide » de l'atmosphère. On suppose,

comme indiqué sur la figure 2, que l'onde émise par l'antenne peut se mettre sous la forme suivante, avant sa réflexion sur l'ionosphère :

$$\vec{E} = E_0 \exp(j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})) \vec{u}_y, \text{ où } \vec{k} \text{ est le vecteur d'onde.}$$

Donner l'expression du vecteur d'onde $\vec{k}$ en fonction de ω , c et α dans le repère $(Oxyz)$.

II.A.2) Donner l'expression du champ magnétique associé au champ électrique.

II.A.3) On cherche à déterminer les caractéristiques de l'onde après réflexion sur l'ionosphère. On postule un champ réfléchi sous la forme :

$$\vec{E}' = E'_0 \exp(j(\omega t - \vec{k}' \cdot \vec{r})) \vec{u}_y.$$

a) Pourquoi la pulsation de l'onde réfléchie est-elle inchangée ? On attend un argument physique.

b) Pourquoi la polarisation de l'onde réfléchie est-elle inchangée ? On attend un argument physique.

c) Sachant que la propagation s'effectue dans le vide, montrer la relation :

$$\|\vec{k}\| = \|\vec{k}'\|$$

d) Pour déterminer E'_0 et $\vec{k}'$, on admet que les conditions de passage du champ électrique, données par les équations de Maxwell, restent valables, et que le champ électromagnétique est nul dans l'ionosphère. Déterminer k' ; retrouver la loi de Descartes pour la réflexion.

e) Montrer que :

$$E'_0 = -E_0 \exp\left(-2j\frac{\omega}{c}h \cos(\alpha)\right).$$

Commenter le signe de cette expression.

f) Donner l'expression finale du champ électrique réfléchi.

g) Donner aussi l'expression du champ magnétique associé.

h) Donner l'expression du champ électrique résultant de la superposition de l'onde incidente et de l'onde réfléchie. Commenter précisément son expression en mettant en évidence le caractère propagatif et le caractère stationnaire de cette onde.

II.A.4) Conclure sur la possibilité de recevoir les grandes ondes pour des récepteurs situés à plusieurs centaines de kilomètres de l'antenne émettrice. On s'aidera d'un schéma.

II.B - Détermination des conditions de réflexion de l'onde par l'ionosphère

On revient dans cette partie sur la compréhension des phénomènes permettant d'expliquer la réflexion ionosphérique de l'onde. Pour cela, on désire étudier le comportement de l'ionosphère pour les « grandes ondes ». Ainsi, on la modélise comme un plasma : c'est un milieu électriquement neutre, qui compte par unité de volume n électrons libres, de masse m et de charge $-e$, et n ions de charge $+e$ et de masse M . On supposera les ions immobiles car $M \gg m$ et les électrons comme non relativistes (c'est à dire que leurs vitesses restent très inférieures à la vitesse de la lumière).

On considère une onde électromagnétique plane, monochromatique de pulsation ω , polarisée rectilignement suivant Oy qui se propage dans l'ionosphère suivant la direction Oz dans le sens des $z > 0$ (voir figure 3) :

$$\vec{E} = E_0 \exp(j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{z})) \vec{u}_y$$

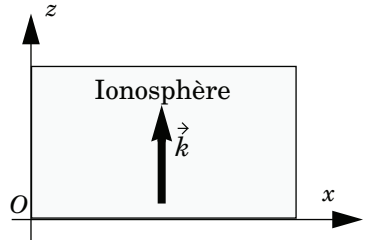


Figure 3

II.B.1) Donner l'expression complexe du champ magnétique $\vec{B}$ dans l'ionosphère en utilisant l'équation de Maxwell-Faraday.

II.B.2) Appliquer le principe fondamental de la dynamique à un électron, on notera $\vec{v}_e$ sa vitesse.

II.B.3) En comparant les normes des forces magnétiques et électriques, montrer que l'influence du champ magnétique est négligeable devant celle du champ électrique. Dans toute la suite, on suppose que l'électron n'est soumis qu'au seul champ électrique précédent.

II.B.4) Calculer alors le vecteur densité de courant volumique $\vec{J} = -nev_e \vec{v}_e$ et mettre sa notation complexe sous la forme $\vec{J} = \underline{\sigma} \vec{E}$ où $\underline{\sigma}$ est la conductivité complexe. Montrer que :

$$\underline{\sigma} = \frac{ne^2}{jm\omega}$$

II.B.5) Calculer la puissance moyenne volumique cédée par le champ électromagnétique au plasma

$$P_{\text{cédée}} = \frac{1}{2} \text{Re}(\vec{J} \cdot \vec{E}^*)$$

où $\text{Re}(A)$ désigne la partie réelle de A et $\vec{E}^*$ le conjugué de $\vec{E}$. Commenter.

II.B.6) Écrire l'équation de Maxwell-Ampère en faisant bien apparaître le courant volumique et le courant de déplacement.

II.B.7) En utilisant les quatre équations de Maxwell, montrer la relation suivante liant la norme du vecteur d'onde et la pulsation ω :

$$k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2} \text{ où } \omega_p^2 = \frac{ne^2}{m\varepsilon_0}.$$

II.B.8) Que se passe-t-il si $\omega < \omega_p$? Montrer que k est alors imaginaire pur. Comment s'écrit le champ électrique ? Est-ce une onde progressive ? Conclure.

II.B.9) *Étude pour $\omega > \omega_p$*

a) Que se passe-t-il si $\omega > \omega_p$? Montrer qu'une onde plane monochromatique peut effectivement se propager. Donner la représentation graphique du module du vecteur d'onde k en fonction de la pulsation ω .

b) Donner les expressions de la vitesse de phase et de la vitesse de groupe.

c) Tracer schématiquement sur le même graphe ces deux vitesses en fonction de la pulsation ω .

d) Commenter le fait que la vitesse de phase soit supérieure à la vitesse de la lumière c .

e) Que signifie physiquement la vitesse de groupe ? Pourquoi est-elle nécessairement inférieure à c ?

II.B.10) Commenter l'expression suivante : *le plasma se comporte comme un filtre passe-haut de fréquence de coupure $f_p = \omega_p/2\pi$: toute onde de fréquence inférieure à la fréquence de plasma f_p ne peut se propager dans l'ionosphère.*

II.C - Confrontation du modèle aux grandes ondes d'Europe 1

II.C.1) *Application numérique* : prenant $n = 10^{11} \text{ m}^{-3}$, $e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$, $m = 9,1 \times 10^{-31} \text{ kg}$, calculer la fréquence de plasma moyenne de l'ionosphère $f_p = \omega_p/2\pi$.

II.C.2) En comparant la fréquence des grandes ondes d'Europe 1 et la fréquence de plasma, montrer que les grandes ondes ne peuvent se propager dans l'ionosphère.

II.C.3) Que se passe-t-il alors pour une onde incidente, du type de celle d'Europe 1, issue de l'antenne précédente (partie II.A), lorsqu'elle arrive, en incidence quelconque sur l'ionosphère ?

II.C.4) À votre avis, quels sont les avantages et les inconvénients des grandes ondes comparées, par exemple, aux ondes *FM* qui, elles, ne sont pas réfléchies par l'ionosphère ?

On s'intéresse dans les Parties III et IV à la conception du signal qui va être ensuite émis dans l'atmosphère.

Partie III - Étude d'un filtre

On considère tout d'abord le filtre suivant (figure 4) où l'amplificateur opérationnel est supposé idéal et fonctionne en régime linéaire quelque soit la fréquence.

La tension d'entrée est fournie par un générateur et s'écrit

$$v_e(t) = V_{em} \cos(\omega t + \varphi_e)$$

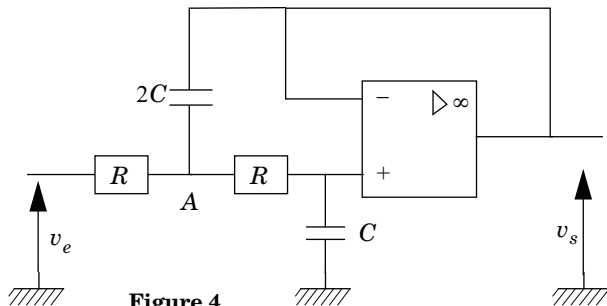


Figure 4

où V_{em} est la valeur maximale et ω la pulsation de la tension d'entrée. La tension de sortie sera notée $v_s(t) = V_{sm} \cos(\omega t + \varphi_s)$. L'étude mathématique du filtre sera effectuée en utilisant la notation complexe $\underline{v_e}$ et $\underline{v_s}$ pour ces deux tensions :

$$\underline{v_e}(t) = V_{em} e^{j(\omega t + \varphi_e)} \text{ et } \underline{v_s}(t) = V_{sm} e^{j(\omega t + \varphi_s)} \text{ (avec } j^2 = -1 \text{)}.$$

III.A - Analyse qualitative

III.A.1) Rappeler ce qu'est un amplificateur idéal fonctionnant en régime linéaire.

III.A.2)

- Comment se comporte un condensateur en basse fréquence $\omega \rightarrow 0^+$? Représenter le circuit en basse fréquence. Établir à partir de ce circuit la limite de v_s en basse fréquence.
- Comment se comporte un condensateur en haute fréquence $\omega \rightarrow +\infty$? Représenter le circuit en haute fréquence. Établir à partir de ce circuit la limite de v_s en haute fréquence.
- Déduire de ce qui précède la nature du filtre.

III.B - Analyse quantitative

III.B.1) Montrer que la fonction de transfert complexe $\underline{H} = \underline{v_s}/\underline{v_e}$ s'écrit :

$$\underline{H} = \frac{H_0}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + 2j\lambda \frac{\omega}{\omega_0}}$$

On précisera les expressions de H_0 , λ et ω_0 en fonction de R et C . Vérifier la concordance des résultats du III.A avec cette expression de $\underline{H}$.

III.B.2)

a) Comment s'exprime l'amplitude V_{sm} du signal de sortie v_s en fonction de $|H|$ et de l'amplitude V_{em} du signal d'entrée v_e ? Quelles grandeurs électriques faut-il donc relever expérimentalement pour déterminer $|H|$? Quel(s) appareil(s) peut-on utiliser ?

b) Comment s'exprime la phase φ_s du signal de sortie v_s en fonction de la phase φ de H et de la phase du signal d'entrée φ_e ? Quel(s) appareil(s) peut-on utiliser pour mesurer φ ?

III.B.3) Diagramme de Bode

a) Montrer que $|H| = 1 / \sqrt{1 + \frac{\omega^4}{\omega_0^4}}$.

b) Tracer le diagramme de Bode en gain du filtre directement sur votre feuille en précisant les grandeurs portées sur les axes ainsi que les valeurs remarquables de ces grandeurs. On précisera les asymptotes en basse et haute fréquence ainsi que la pulsation de coupure à -3dB .

c) Tracer le diagramme de Bode en phase du filtre. On précisera les asymptotes en basse et haute fréquence. Que vaut la phase φ de H pour $\omega = \omega_0$?

Partie IV - Modulation et démodulation d'amplitude – Application du filtre

Il est fréquent qu'un signal se présente sous une forme inadaptée à sa transmission ou à son traitement. La modulation est le procédé permettant de transposer les caractéristiques de ce signal dans des domaines de fréquences où la propagation et le traitement sont possibles. La démodulation est l'opération inverse.

IV.A - De la nécessité de moduler...

On s'intéresse aux signaux hertziens audio qui s'étalent sur la plage de fréquence $f_{m1} = 300 \text{ Hz} \leq f_m \leq f_{m2} = 4,50 \text{ kHz}$. Cette plage est parfaitement audible à notre oreille qui peut percevoir ordinairement des fréquences comprises entre 20 Hz et 20 kHz.

D'autre part, on peut montrer que la réception d'une onde électromagnétique nécessite une antenne dont la dimension caractéristique est une demi longueur d'onde.

Quelle devrait être la taille d'une antenne permettant la réception des signaux audio considérés ? Cela vous semble-t-il réalisable ? Pourquoi est-il alors intéressant d'utiliser une autre fréquence ? Commenter l'intérêt de l'utilisation d'une autre fréquence si l'on veut émettre plusieurs ondes radios émanant de plusieurs stations.

IV.B - Modulation

Le signal audio à transporter est maintenant appelé signal modulant. Les méthodes de modulation sont élaborées à partir d'une onde sinusoïdale pure, appelée porteuse ou signal porteur. Le résultat de la combinaison de ces deux signaux s'appelle signal modulé. Le signal modulant est noté $e(t) = A_m \cos(2\pi f_m t)$ et le signal porteur $p(t) = A_p \cos(2\pi f_{\text{port}} t)$ où f_{port} est la fréquence du signal porteur (ou porteuse) et $f_m (<< f_{\text{port}})$ la fréquence du signal modulant. Le signal modulé en amplitude est un signal de la forme :

$$s(t) = A_p[1 + m \cos(2\pi f_m t)] \cos(2\pi f_{\text{port}} t) \text{ où } m \text{ est un réel strictement positif.}$$

Ce signal modulé a été obtenu en réalisant les opérations représentées dans le schéma bloc de la figure 5.

IV.B.1) Montrer que le schéma de la figure 5 permet effectivement d'obtenir le signal $s(t)$ si l'on pose $m = k A_m$. Dans toute la suite du sujet, on prendra l'indice de modulation $m < 1$. On rappelle que le spectre d'un signal désigne la représentation de l'amplitude des signaux sinusoïdaux qu'il contient en fonction de leur fréquence respective. Exemple : le spectre de

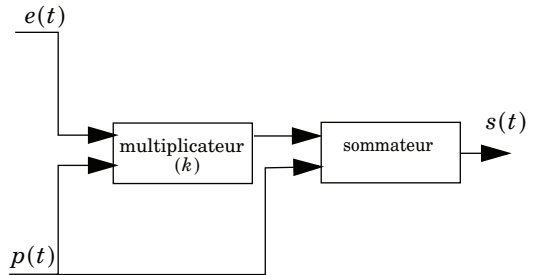


Figure 5

$$v(t) = X_{1m} \cos(2\pi f_1 t + \varphi_1) + X_{2m} \cos(2\pi f_2 t + \varphi_2) \text{ avec } X_{1m} > X_{2m} \text{ et } f_1 < f_2$$

est donné figure 6.

IV.B.2) On a réalisé en laboratoire l'enregistrement d'un signal modulé. Le résultat est donné figure 7 en annexe. Expliquer en quoi ce signal représente correctement un signal modulé $s(t)$ dans le cas où $m < 1$. On précisera sur la figure 7 (à rendre avec la copie) les valeurs des fréquences f_{port} et f_m , les expressions et valeurs particulières de $s(t)$ marquées d'un point d'interrogation et on déterminera la valeur de m .

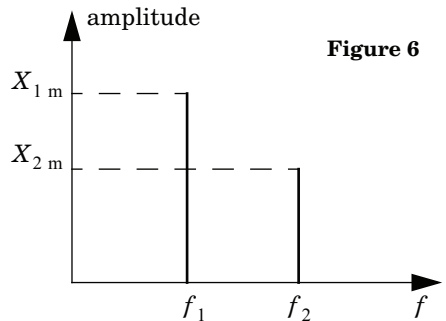


Figure 6

IV.B.3) Réécrire le signal $s(t)$ en le linéarisant (c'est-à-dire en le mettant sous la forme d'une somme de cosinus). Quelles fréquences contient ce signal ? Représenter l'allure du spectre de $s(t)$.

IV.B.4) On envoie dans la pratique un signal modulant audio, somme de signaux sinusoïdaux qui encombre la plage de fréquence

$$f_{m1} = 300 \text{ Hz} \leq f_m \leq f_{m2} = 4,50 \text{ kHz}.$$

La porteuse utilisée est celle émise par la station Europe 1 soit $f_{\text{port}} = 185 \text{ kHz}$. Le spectre du signal audio modulant est représenté figure 8.

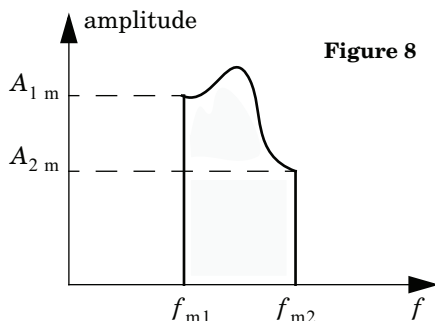


Figure 8

- Représenter le spectre du signal modulé $s(t)$.
- Quelle est la bande passante d'un filtre nécessaire à la transmission intégrale du signal $s(t)$ au niveau d'une antenne ? Quelle est la nature de ce filtre ?
- Compte tenu de la Partie IV.A, montrer l'intérêt de la modulation ainsi réalisée.

IV.C - Démodulation synchrone

On considère à nouveau un signal modulé noté

$$s(t) = A_p [1 + k A_m \cos(2\pi f_m t)] \cos(2\pi f_{\text{port}} t).$$

On admet que l'on dispose à la réception du signal modulé d'un oscillateur local synchrone délivrant le signal $p(t) = A_p \cos(2\pi f_{\text{port}} t)$ identique au signal porteur utilisé à l'émission. La figure 9 ci-dessous représente le principe de fonctionnement du circuit de démodulation situé après l'antenne réceptrice.

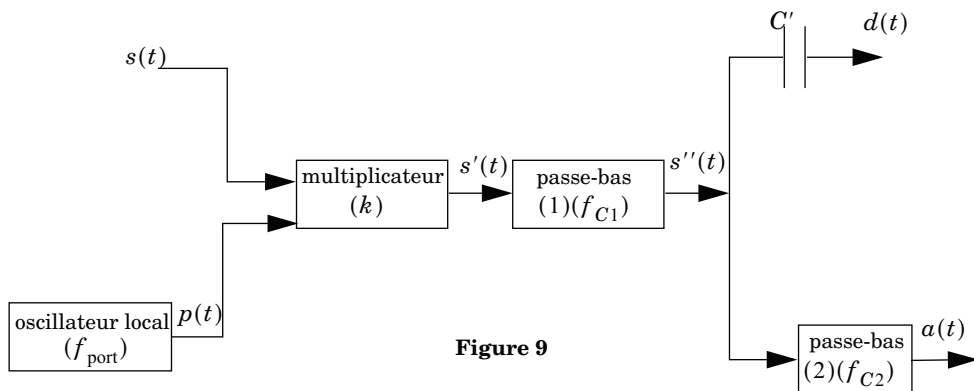


Figure 9

IV.C.1) Donner l'expression du signal $s'(t)$ obtenu à la sortie du multiplicateur. Le linéariser et représenter le spectre de ce signal.

IV.C.2) Le filtre passe-bas (1) a une fréquence de coupure f_{C1} telle que $f_m < f_{C1} < f_{\text{port}}$ et le filtre passe-bas (2) une fréquence de coupure $f_{C2} < f_m$. On considérera dans un premier temps que les filtres sont parfaits. C'est-à-dire que chaque filtre admet un gain $|H| = 1$ pour des fréquences inférieures à sa fréquence de coupure et un gain nul pour toute fréquence supérieure à sa fréquence de coupure.

- a) Exprimer le signal $s''(t)$ et donner son spectre.
- b) On souhaite, uniquement pour cette question, utiliser le filtre étudié dans la Partie III pour réaliser le filtre (1). Le cahier des charges impose une atténuation de 80 dB pour les signaux de fréquences $2f_{\text{port}}$ par rapport aux signaux continus.

Justifier cette contrainte et calculer ω_0 et R lorsque $C = 1,00 \text{ nF}$ et $f_{\text{port}} = 185 \text{ kHz}$.

- c) À quoi sert le condensateur de capacité C' représenté sur le schéma bloc ? Donner alors l'expression du signal $d(t)$ et son spectre.
- d) Exprimer le signal $a(t)$ obtenu à la sortie du filtre (2).
- e) Montrer finalement que l'analyse des signaux $a(t)$ et $d(t)$ permet de reconstituer le signal modulant $e(t) = A_m \cos(2\pi f_m t)$.

••• FIN •••

Annexe du sujet Physique 2

Filière TSI

Cette annexe doit être rendue avec les autres copies. Il ne pourra pas être délivré d'autres exemplaires de ce document.

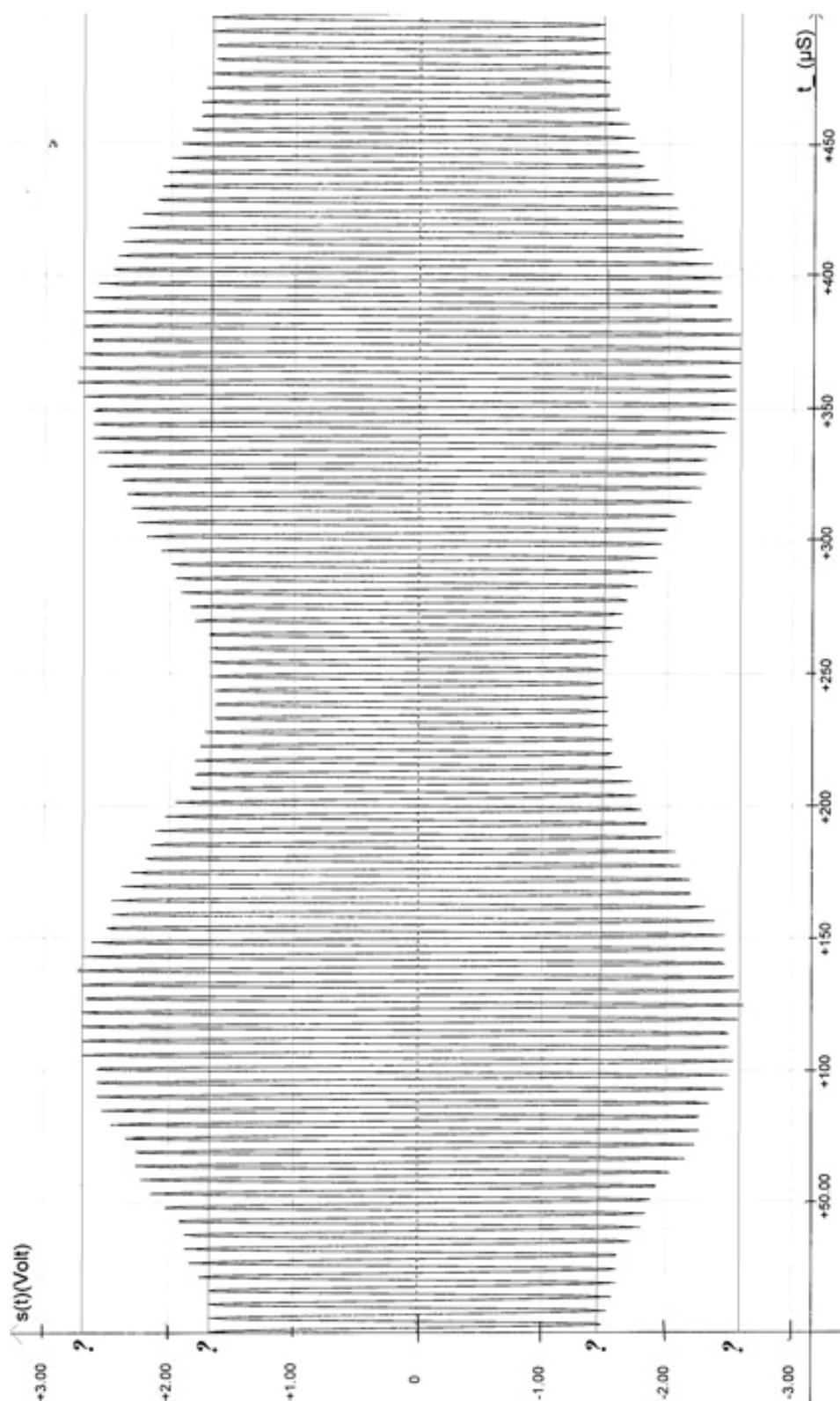


Figure 7

Les calculatrices sont autorisées.

N.B. : Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Instructions générales

Notation :

A en solution aqueuse est noté A ou A(aq), A en phase solide est noté A(s) et A en phase gazeuse est noté A(g).

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.

Toute application numérique ne comportant pas d'unité ne donnera pas lieu à attribution de points.

Les diverses parties sont indépendantes et peuvent être traitées dans l'ordre choisi par le candidat. Il prendra toutefois soin de bien numéroter les questions.

La feuille annexe est à rendre avec la copie.

A propos du Chrome

Données

Constantes :

Les gaz sont assimilés à des gaz parfaits ; constante des gaz parfaits $R = 8,314 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$.

$$\frac{RT \ln 10}{F} = 0,06 \text{ V à } 298 \text{ K.}$$

Températures de fusion et d'ébullition de quelques corps purs sous $P^{\circ} = 1 \text{ bar}$:

Corps pur	Température de fusion en K	Température d'ébullition en K
Aluminium Al	933	2740
Alumine Al_2O_3	2290	3250
Chrome Cr	2130	2940
Oxyde de chrome (III) Cr_2O_3	2710	4270

Données thermodynamiques :

	H ₂ (g)	O ₂ (g)	H ₂ O(g)	Al(s)	Al ₂ O ₃ (s)	Cr(s)	Cr ₂ O ₃ (s)
$\Delta_f H^\circ$ en kJ.mol ⁻¹			- 242		- 1676		- 1140
S° en J.K ⁻¹ .mol ⁻¹	131	205	189	28	51	24	81
$\Delta_{fus} H^\circ$ en kJ.mol ⁻¹				11	109	15	

Les enthalpies standard de formation $\Delta_f H^\circ$ et les entropies standard S° sont supposées indépendantes de la température. $\Delta_{fus} H^\circ$ désigne l'enthalpie standard de fusion du corps considéré, elle est également supposée indépendante de la température.

Données en solution aqueuse à 25°C**Oxydo-réduction :**

Couple	Potentiel standard à 25°C en V
Cr ₂ O ₇ ²⁻ (aq)/Cr ³⁺ (aq)	1,33
Fe ³⁺ (aq)/Fe ²⁺ (aq)	0,77
CH ₃ COOH/CH ₃ CH ₂ OH	0,037

Constantes de réaction :

Produit de solubilité à 25 °C : Cr(OH)₃ (s) : $K_S = 10^{-31}$.

Constante d'équilibre thermodynamique de la réaction : $\text{Cr}^{3+}_{(aq)} + 4 \text{OH}^{-}_{(aq)} = \text{Cr(OH)}_4^{-}_{(aq)}$.
 $\beta_4 = 10^{30,6}$.

Constante d'acidité : $K_a (\text{CH}_3\text{COOH}_{(aq)}/\text{CH}_3\text{COO}^{-}_{(aq)}) = 10^{-4,5}$.

Produit ionique de l'eau : $K_e = 10^{-14}$.

Conductivités ioniques équivalentes molaires standard :

$\lambda^\circ(\text{H}^+) = 350 \text{ S.cm}^2.\text{mol}^{-1}$; $\lambda^\circ(\text{OH}^-) = 199 \text{ S.cm}^2.\text{mol}^{-1}$.

$\lambda^\circ(\text{H}^+)$ et $\lambda^\circ(\text{OH}^-)$ sont toutes les deux très supérieures à la conductivité molaire de tous les autres ions, ces dernières étant supposées identiques.

À propos de l'éthanol liquide CH₃CH₂OH:

densité à 20°C : 0,79.

masse molaire de l'éthanol : 46 g.mol⁻¹.

Partie B : Les ions du chrome en solution aqueuse

Il s'agit ici de déterminer le titre alcoolique d'un vin. Lors de cette étude différents thèmes de la chimie des solutions seront abordés : acidobasicité, précipitation, oxydoréduction, conductimétrie. Là encore les différentes questions sont largement indépendantes.

Les différentes espèces du chrome prises en compte seront : Cr^{3+} , $\text{Cr}(\text{OH})_3 (\text{s})$, $\text{Cr}(\text{OH})_4^-$, CrO_4^{2-} , $\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}$. Toutes les réactions ont lieu à 25°C .

Les données nécessaires sont regroupées en début d'épreuve.

1- L'ion dichromate : un oxydant puissant

B-1-1 $\text{Cr}(\text{OH})_3 (\text{s})$ est un hydroxyde amphotère. Cela signifie qu'en présence d'ions OH^- , Cr^{3+} précipite puis se redissout en formant l'ion tétrahydroxochromate (III) $\text{Cr}(\text{OH})_4^-$ lorsque le pH de la solution est suffisant.

A l'aide des données,

- Déterminer le pH de précipitation de l'hydroxyde de chrome pour une solution d'ions Cr^{3+} à une concentration $0,1 \text{ mol.L}^{-1}$.
- Ecrire la réaction de dissolution de l'hydroxyde de chrome en milieu basique. Calculer sa constante.
- Déterminer le pH de redissolution de l'hydroxyde de chrome.
- Préciser sur un diagramme les domaines d'existence et de prédominance des différentes espèces en fonction du pH.

B-1-2 Le diagramme potentiel pH simplifié du fer est donné en annexe. Il a été tracé pour une concentration en fer dissous égale à $0,1 \text{ mol.L}^{-1}$. Les espèces du fer prises en compte sont les suivantes: $\text{Fe}(\text{s})$, Fe^{2+} , Fe^{3+} , $\text{Fe}(\text{OH})_2 (\text{s})$, $\text{Fe}(\text{OH})_3 (\text{s})$.

- Déterminer le degré d'oxydation du fer dans chacune de ces espèces.
- Compléter le diagramme potentiel pH en y plaçant les différentes espèces. Justifier.

B-1-3 On étudie l'action du dichromate $\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}$ sur Fe^{2+} . On souhaite éviter la formation de tout précipité.

- Vers quel pH doit-on se placer ?
- Ecrire l'équation bilan de la réaction.
- Expliciter la loi de Nernst pour chaque couple.
- Etablir l'expression de la constante de la réaction en fonction des potentiels standard de chacun des deux couples. Calculer sa valeur et conclure.

B-1-4 On étudie maintenant l'action du dichromate sur l'éthanol $\text{CH}_3\text{CH}_2\text{OH}$ à $\text{pH} < 4$.

A l'aide des données,

- Préciser sur un diagramme les domaines de prédominance de CH_3COOH et CH_3COO^- en fonction du pH. En déduire le produit de l'oxydation de l'éthanol par le dichromate.
- Ecrire l'équation bilan de la réaction d'oxydoréduction.
- Calculer sa constante et conclure. (aucune démonstration n'est exigée)
- Pourquoi se place-t-on à $\text{pH} < 4$?

Annexe (à rendre avec la copie)

Diagramme d'Ellingham du chrome et de l'aluminium

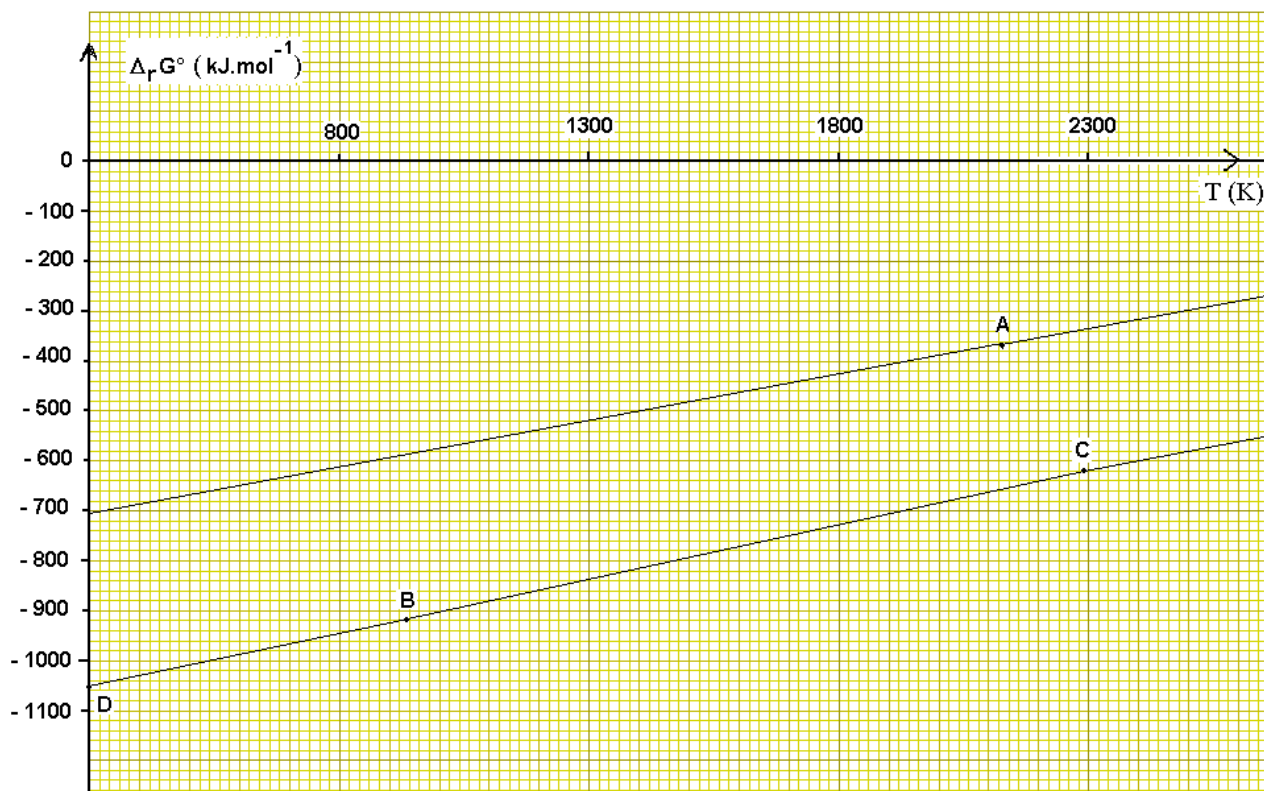


Diagramme potentiel - pH du fer

