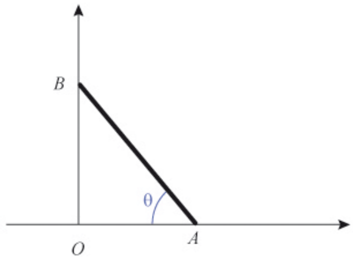
Exercices :
Mécanique du solide

1.4 Exercices d'application

1.4.1 Echelle adossée au mur

Une échelle AB de masse m, de longueur 2a est assimilée à une barre homogène d'épaisseur négligeable.

1) Quelle est la trajectoire du centre de masse G?
2) Quel est le nombre de degrés de liberté ? Quelle variable décrit le mouvement de la tige ? Définir le vecteur rotation associé au mouvement de la barre.
3) Le torseur cinématique est défini par le couple de vecteurs $\left(\vec{\Omega}, \vec{v_G}\right)$. Exprimer chacune de ces composantes vectorielles en fonction de a, θ et de leurs dérivées.



1.4.2 Mouvement de la Terre

Le mouvement de la Terre, dont le centre de masse est noté C, est composé dans le référentiel de Copernic d'une translation circulaire de rayon $a = 1{,}5.10^{11}$ m (révolution) autour du Soleil en une durée $T_1 = 1$ an et d'une rotation sur elle-même en $T_2 = 23$ h 56 mn 4 s = 86164 s. On suppose que l'axe de rotation $\mathbf{u_z}$ de la Terre est perpendiculaire au plan de son orbite.

1) Définir le référentiel barycentrique terrestre et décrire son mouvement par rapport au référentiel de Copernic.
2) Ecrire la vitesse d'un point M quelconque de la Terre dans le référentiel de Copernic.

1.4.3 Moment cinétique de la Terre

On étudie le mouvement de la Terre comme en 1.4.1. La Terre est assimilée à une sphère pleine.
Evaluer le moment cinétique de la Terre en O dans son référentiel barycentrique.

1.4.4 Eléments cinétiques d'une nacelle de grande roue

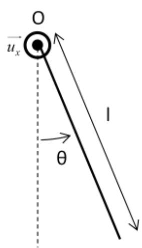
Une grande roue de fête foraine de rayon r tourne autour de son axe horizontal (Oz) dans le référentiel R. On considère une nacelle accrochée en A sur la roue, de masse m, de centre d'inertie G qui se trouve sur la verticale du point A, en dessous, à une distance a.
On repère l'angle $\theta = (u_x, OA)$.

1) Calculer la vitesse du centre de masse G de la nacelle dans R.
2) Calculer le moment cinétique en O de la nacelle dans R.

1.4.5 Pendule pesant

Soit une tige homogène de longueur l attachée en un point O et pouvant osciller librement dans le plan Oyz. La tige est donc en pivot parfait autour de l'axe Ox. Sa position est repérée par l'angle θ par rapport à la verticale. Initialement la tige est lâchée sans vitesse initiale avec un angle θ_0.

1) Trouver l'équation différentielle vérifiée par θ.
2) Pour des angles faibles, comment peut se simplifier cette équation ?
3) Donner alors l'évolution de l'angle θ en fonction du temps.



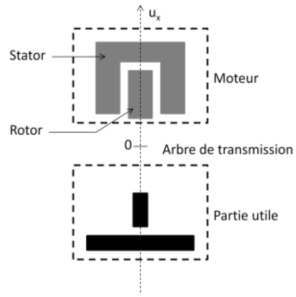
1.5 Exercices

1.5.1 Etude dynamique d'un moteur

On s'intéresse au fonctionnement d'une machine comportant une pièce tournante (perceuse, machine à laver le linge, …). Le rotor, partie tournante du moteur, entraîne la partie tournante utile de la machine (par exemple le tambour dans le cas d'une machine à laver le linge) grâce à un arbre de transmission. L'axe de rotation est noté u_x. La vitesse angulaire de rotation du rotor autour de u_x est notée ω. La partie fixe du moteur (stator) entraîne le rotor en exerçant sur lui un couple dont la valeur en projection sur u_x est $M_s > 0$.

1) En déduire le signe du couple M_u exercé par la partie utile tournant sur le rotor.

2) Souvent, l'ensemble est plongé dans un fluide visqueux (huile) dont l'action sur le rotor se ramène à un couple $M_f = -\alpha\omega$. On suppose que les actions de contact des différentes pièces entre elles sont parfaites, de telle sorte que leur moment projeté sur u_x, M_c, est nul (liaison pivot parfaite). On note J le moment d'inertie du rotor autour de l'axe de rotation. En déduire l'équation différentielle satisfaite par ω(t).



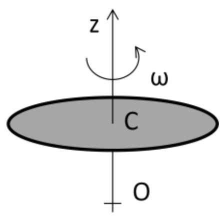
3) En supposant que les couples M_s et M_u sont à peu près constants dès la mise en rotation du rotor, trouver l'évolution de ω(t) sachant qu'on met le moteur en marche à t=0.

4) En déduire la vitesse angulaire de fonctionnement en régime permanent. Dépend-elle des frottements du fluide ? Ces derniers ont-ils une autre influence ? Que dire des couples M_s et M_u ?

1.5.2 Disque en liaison pivot

1) Considérons un disque en pivot parfait autour de l'axe Oz. Ce disque est initialement lancé à la vitesse angulaire ω_0. Evaluer l'évolution de la vitesse angulaire.

2) La liaison pivot n'est plus parfaite et engendre un couple de frottements : C = $-\alpha\omega$, où α est une constante positive. Répondre à la même question de précédemment.



1.5.3 Mouvement vertical d'un Yo-yo

Un Yo-yo est assimilé à un disque homogène, de masse m, de rayon R, autour duquel est enroulé un fil sans masse. L'autre extrémité du fil est maintenu fixe en O. A l'instant t = 0, on lâche le Yo-yo sans vitesse initiale, le fil étant vertical. On suppose que le fil ne glisse pas sur le disque.

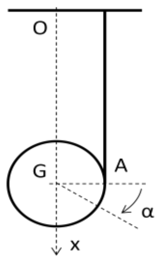
1) Soit α la position angulaire du yo-yo par rapport à l'horizontale et x la position verticale de son centre de gravité (voir schéma). Quelle relation géométrique existe-t-il entre α et x ?

2) Déterminer l'accélération de G.

3) Déterminer la tension du fil.

4) En déduire l'équation générale du mouvement.

Le moment d'inertie du disque par rapport à son axe est $J=1/2mR^2$.



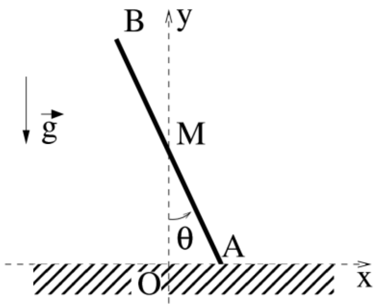
1.5.4 Chute d'une barre

Une barre rigide AB, homogène de masse m, de longueur 2l et de section négligeable, est posée verticalement sur le sol en A. Le contact de la barre avec le sol en A est supposé sans frottement. Soit θ l'angle que fait la barre par rapport à la verticale. A l'instant initial, la barre est très légèrement déplacée (sans vitesse initiale) de son équilibre instable et tombe.

En utilisant le théorème de la résultante dynamique et le théorème du moment cinétique :

1) Montrer que le mouvement du milieu M de AB est vertical.

2) Déterminer l'équation différentielle du mouvement vérifiée par l'angle θ.



1.5.5 Transmission d'effort par une poulie

Deux singes de même masse M sont au sol et tiennent les deux extrémités d'une corde, qui fait le tour d'une poulie de masse négligeable. Un des singes, noté A, entreprend de grimper à la corde, l'autre B se contente de se tenir à un même point de la corde. On désire savoir si l'un des singes peut arriver avant l'autre au sommet et, pour ce faire, déterminer une relation entre les accélérations $\ddot{z}_A$ et $\ddot{z}_B$, sachant qu'on ne dispose par de loi indiquant comment se répartit l'effort du singe A.

On distingue 3 systèmes correspondant :

- à la poulie P de centre O, pour laquelle les forces appliquées sont les tensions des fils $\overrightarrow{T_A}$ et $\overrightarrow{T_B}$ et des actions de liaison dont on supposera le moment nul en O ;

- le singe A soumis à son poids et à la tension du fil $\overrightarrow{T'_A}$

- le singe B soumis à son poids et à la tension du fil $\overrightarrow{T'_B}$

1) Justifier, en considérant que la masse linéique de la corde est nulle, que les tensions définies ci-dessus vérifient : $\overrightarrow{T'_A} = -\overrightarrow{T_A}$ et $\overrightarrow{T'_B} = -\overrightarrow{T_B}$

2) Appliquer la loi de la résultante cinétique pour les systèmes A et B et en déduire deux relations vérifiées respectivement par $\ddot{z}_A$ et $\ddot{z}_B$

3) Appliquer la loi du moment cinétique en O pour le système P. La loi de la résultante cinétique aurait-elle donné un renseignement utile dans le cas présent ?

4) Utiliser les équations des questions précédentes pour répondre à la question : « Un singe arrive-t-il avant l'autre au sommet ? »