

Exercices : Electromagnétisme

5.6 Exercices d'application

5.6.1 Champ électromagnétique

On considère une situation dans laquelle le champ électrique s'écrit : $\vec{E}(x,t) = E_0 \cos(\omega t - kx) \vec{u}_x$

En déduire l'expression du champ magnétique. Puis calculer séparément les densités de charge et de courant et vérifier la relation qui les lie.

5.6.2 Courants électriques et courants de déplacement

On se place dans un milieu ohmique de conductivité $\Upsilon (\vec{j} = \Upsilon \vec{E})$, en régime sinusoïdal forcé de fréquence ν .

- 1) Montrer que $|\vec{j}| > |\vec{j}_D|$ pour peu que $\nu < \nu_{\max}$. Exprimer $\nu_{\max}$ en fonction de ϵ_0 et Υ .
- 2) Application numérique :
 - dans le cas du cuivre ($\Upsilon = 5,8.10^7 \text{ S.m}^{-1}$) ;
 - dans le cas de l'eau ($\Upsilon = 1,0.10^{-9} \text{ S.m}^{-1}$).

5.7 Exercices

5.7.1 Câble coaxial

Un câble coaxial cylindrique d'axe (Oz), de rayon intérieur a et de rayon extérieur b est le siège d'un champ électromagnétique dont les champs électrique et magnétique sont, en coordonnées cylindriques d'axe (Oz) :

$$\vec{E}(M,t) = E(r) \cos(\omega t - kz) \vec{u}_r \quad \text{et} \quad \vec{B}(M,t) = \vec{B}_0(r) \cos(\omega t - kz)$$

avec $\omega = ck$, où c est la vitesse de la lumière dans le vide.

Les cylindres de rayon a et b sont des conducteurs parfaits : les champs électrique et magnétique sont nuls pour $r > b$ et pour $r < a$. L'espace situé entre les cylindres de rayon a et b est vide.

- 1) Calculer $E(r)$ en fonction de r , a et $E_a = \lim_{r \rightarrow a^+} E(r)$.
- 2) Calculer $\vec{B}_0(r)$. On donne : $\text{rot}(\lambda \vec{a}) = \lambda \text{rot} \vec{a} + \text{grad} \lambda \wedge \vec{a}$
- 3) Déterminer les densités surfaciques de charges σ_a et σ_b , et de courant $\vec{j}_{s,a}$ et $\vec{j}_{s,b}$, sur les armatures cylindriques (en $r = a$ et $r = b$). Vérifier la compatibilité de ces expressions avec l'équation de conservation de la charge.
- 4) Déterminer le potentiel scalaire $V(r, z, t)$ et le potentiel vecteur $\vec{A}(r, z, t)$ dont dérive le champ électromagnétique entre les conducteurs.

On supposera que $\vec{A} = A(r, z, t) \vec{u}_z$ et on montrera que $A(r, z, t) = \frac{a}{c} \ln \frac{r}{b} E_a \cos(\omega t - kz)$ convient.

On prendra $V = 0$ en tout point du conducteur extérieur.

- 5) Soit $U(z, t) = V(a, z, t)$ le potentiel du conducteur intérieur à l'abscisse z à l'instant t et $I(z, t)$ l'intensité du courant électrique porté par ce même conducteur.

Montrer que $Z_c = U(z, t)/I(z, t)$ est indépendant de z et de t . Donner son expression.

5.7.2 Rôle du courant de déplacement

Une sphère conductrice de centre O et rayon R, initialement non chargée, est bombardée de toute part par des particules α^4 avec un débit N ; on suppose qu'elle les absorbe.

On propose une description simplifiée en considérant un modèle continu de densité de courant j radiale et fonction de la seule distance à O notée r . La vitesse des particules est supposée sensiblement constante $\vec{v} = -v_0 \vec{u}_r$. Les expressions des différentes grandeurs sont recherchées dans l'espace extérieur à la sphère : $r > R$.

- 1) Proposer une expression pour $j(M)$. En déduire la densité volumique de charges $\rho(M)$.
- 2) Après avoir soigneusement examiné les symétries et invariances du problème, déterminer les champs électrique et magnétique en tout point.
- 3) Examiner l'équation de Maxwell-Ampère et discuter l'intérêt du terme de courant de déplacement.