

1 Mécanique du point

1.1 Bille dans un liquide

On considère une bille, de masse m et de rayon R , plongée dans un liquide de viscosité η et masse volumique ρ . La bille est suspendue à un ressort de constante de raideur k et de longueur à vide l_0 . La bille subit de la part du liquide une force de frottement fluide donnée par la loi de Stokes, $\vec{f} = -6\pi\eta R\vec{v}$, en plus de la poussée d'Archimède. La bille est animée d'une vitesse $\vec{v}$. Dans le liquide, sa pseudo-période d'oscillation est alors T . Sa période d'oscillation dans l'air, où le frottement est négligeable, est T_0 .

- 1) Soit la longueur à l'équilibre du ressort. Exprimer le en fonction des données du système.
- 2) On note z l'allongement du ressort par rapport à sa position d'équilibre. Montrer que z vérifie une équation différentielle de la forme : $\ddot{z} + 2\lambda\dot{z} + \omega_0^2 z = 0$, et exprimer λ et ω_0 .
- 3) A quelle condition, liant λ et ω_0 , obtient-on des oscillations ?
- 4) Calculer dans ce cas la période T des pseudo-oscillations.
- 5) Donner l'expression de η en fonction des caractéristiques de la sphère, de T et T_0 . En déduire un protocole expérimental pour mesurer η .

1.2 Décollement du toit d'un igloo

Un enfant de masse m glisse sans frottement sur un igloo sphérique de rayon R . L'enfant commence à glisser à $t = 0$ à partir du sommet sans vitesse initiale. On supposera l'enfant décrit correctement par un point matériel M . L'enfant est repéré est l'instant t par l'angle $\theta(t)$.

- 1) Donner deux équations décrivant le mouvement de l'enfant.
- 2) En déduire une relation entre $\dot{\theta}(t)$ et $\theta(t)$.
- 3) Donner l'expression de la réaction de l'igloo sur l'enfant en fonction de sa position θ .
- 4) L'enfant décolle-t-il ? Si oui, pour quel angle ?

1.3 2 masses reliées par un ressort

Deux masses m_1 et m_2 sont reliées par un ressort de raideur k et de longueur à vide l_0 . Elles peuvent se déplacer, sans frottement, sur un axe horizontal $x'x$. Pour $t < 0$, le ressort est non tendu et les masses sont au repos en $M_1(0)$ et $M_2(0)$. A partir de $t = 0$, on exerce sur m_2 une force horizontale constante $\vec{F} = F\vec{u}_x$. On note $x_1(t) = \overline{M_1(0)M_1(t)}$, $x_2(t) = \overline{M_2(0)M_2(t)}$. Déterminer les grandeurs $x_1(t)$ et $x_2(t)$.



1.4 CCP PC 2013

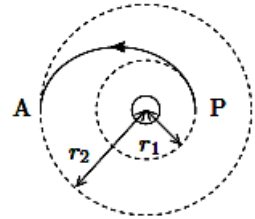
On considère une tige rigide OA , en liaison pivot parfaite en O et à laquelle est fixée une masse m en A . Le pendule est initialement à la verticale et est relié à un ressort de torsion (de constante de torsion C) qui le ramène vers sa position verticale.

- 1) Déterminer l'équation différentielle du mouvement de la masse m .
- 2) Déterminer l'énergie potentielle du pendule pour toute position.
- 3) Déterminer les positions d'équilibre, et leurs conditions d'existence, pour le pendule.

2 Mouvement à forces centrales

2.1 Orbite de transfert

On désire réaliser le transfert d'un satellite terrestre en attente sur une orbite circulaire « basse » de rayon $r_1 = 6700\text{km}$ vers une orbite circulaire « haute » de rayon $r_2 = 42000\text{km}$ (géostationnaire), en passant par une orbite de transfert, dite de Hohman, tangente aux deux orbites circulaires. On donne $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N.m}^2.\text{kg}^{-2}$, et $M_T = 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}$.

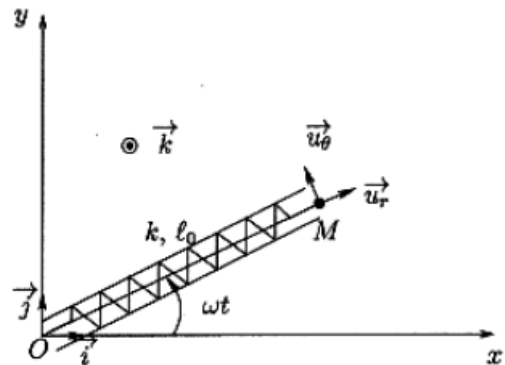


- 1) Exprimer en fonction de r_1 et r_2 le demi grand axe de l'ellipse de transfert.
- 2) Exprimer et calculer les vitesses v_1 et v_2 du satellite sur les orbites circulaires de rayons respectifs r_1 et r_2 .
- 3) Déterminer l'expression des vitesses v_P et v_A du satellite sur l'ellipse de transfert respectivement aux points P (juste après l'extinction des moteurs) et A (juste avant le rallumage des moteurs). Les calculer.
- 4) En déduire les accroissements de vitesse orthoradiale Δv_P et Δv_A .

3 Changement de référentiels

3.1 Mouvement dans un référentiel non galiléen

On considère une particule M de masse m , astreinte à se déplacer, sans frottements le long de l'axe $(O, \vec{u}_r)$. Le champ de pesanteur est dirigé suivant la verticale Oz : $\vec{g} = -g\vec{k}$. La masse m est accrochée au point M à l'extrémité d'un ressort de longueur à vide ℓ_0 , de constante de raideur k et dont l'autre extrémité est fixée en O. La position de M est repérée dans la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ par $\vec{OM} = r\vec{u}_r$. Le mouvement est étudié dans le référentiel R en rotation uniforme autour d'un axe Oz fixe, de vecteur vitesse $\vec{\Omega} = \omega\vec{k}$, et associé au repère $(O, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{k})$.



- 1) Faire un bilan des forces.
- 2) Montrer que la force d'inertie d'entraînement dérive d'une énergie potentielle centrifuge (ou d'inertie) $E_{p,ie}$ et donner son expression. En est-il de même pour la force d'inertie de Coriolis ?
- 3) Déterminer l'énergie potentielle totale et tracer l'allure de $E_p(r)$. On distinguera les 3 cas possibles selon la valeur de ω .
- 4) Déterminer la longueur ℓ_2 correspondant à la position d'équilibre dans le référentiel R. A quelle condition sur ω le résultat est-il possible ? Cet équilibre est-il stable ? Quel est alors le mouvement dans le référentiel du laboratoire ?

3.2 Pendule dans un ascenseur

Dans le référentiel terrestre R_1 (supposé galiléen), un ascenseur (assimilé à un solide auquel on attache le référentiel R_2), a un mouvement de translation rectiligne vertical. Un pendule simple constitué d'un fil sans masse et d'un point matériel M de masse m est suspendu en O dans l'ascenseur. Sa longueur est $l = OM$, θ est l'angle que fait le fil avec la verticale. L'accélération du champ de pesanteur est $\vec{g} = -g\vec{u}_z$. Déterminer la période T des petites oscillations du pendule dans les cas suivants :

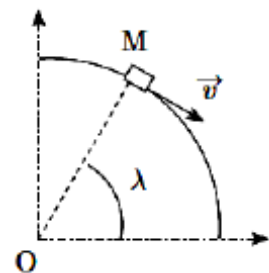
- 1) L'ascenseur est immobile.
- 2) L'ascenseur commence à monter : son accélération dans R_1 est $\vec{a} = +a\vec{u}_z$
- 3) L'ascenseur commence à descendre : son accélération dans R_1 est $\vec{a} = -a\vec{u}_z$

3.3 Force d'inertie sur un wagon allant vers le sud

On considère un wagon de masse $m = 20t$, assimilé à un point matériel M , circulant de nord vers le sud à la vitesse $v = 200\text{km/h}$, en un lieu de latitude $\lambda = 60^\circ$ à la surface de la Terre.

Données : $T = 86164s$ durée du jour sidéral terrestre, $g = 9,8\text{ m.s}^{-2}$, champ de pesanteur terrestre.

- 1) Dans quel sens la force d'inertie de Coriolis exercée sur le train est-elle orientée ? Calculer son intensité.



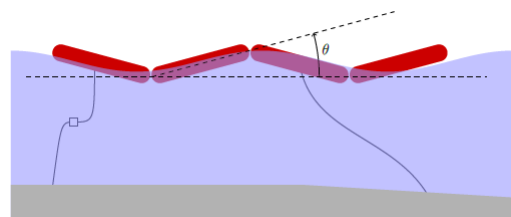
- 2) Pour minimiser les efforts latéraux subis par les rails, on les incline de manière à ce que la réaction exercée par ceux-ci soit normale au plan des rails. De quel angle α faut-il les incliner et dans quel sens ?

4 Mécanique du solide

4.1 Centrale 2011

Un Pelamis® est un dispositif constitué de flotteurs cylindriques couplés à des génératrices, fixé sur le fond marin, prélevant l'énergie de la houle.

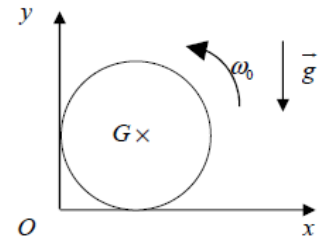
On note θ l'angle entre un flotteur et l'horizontale. Il subit de la part de ses voisins deux couples. Un couple de rappel élastique $-C\theta$ et un couple résistant $-\beta d\theta/dt$ qui entraîne une génératrice. Sur chaque flotteur s'exerce de plus un couple moteur dû à la houle : $\Gamma_0 \cos \omega t$. On note J le moment d'inertie d'un cylindre par rapport à son centre que l'on supposera fixe.



- 1) Déterminer l'équation du mouvement pour un flotteur ayant deux voisins.
- 2) En déduire l'expression de $\theta(t)$ en régime sinusoïdal forcé.
- 3) En déduire l'expression de la puissance moyenne fournie à la génératrice.
- 4) Γ_0 , J et ω étant fixés, déterminer les valeurs de C et β qui maximisent cette puissance. On utilisera éventuellement un logiciel de calcul formel. Commenter.
- 5) Définir l'efficacité et le rendement d'un tel dispositif. Discuter.

4.2 ENSSAT 2010

Un disque de masse m et de rayon r de moment d'inertie par rapport à son axe $J_G = \frac{1}{2}mr^2$ tourne initialement à la vitesse angulaire ω_0 (cf. figure). On suppose que le disque reste en permanence en contact avec les axes Ox et Oy .



1) On note f le coefficient de frottement de glissement. Calculer $\vec{R}$ et $\vec{R}'$, réactions du mur et du sol.

2) Déterminer $\omega(t)$ dans le cas où le cylindre tourne dans le sens indiqué et reste collé au dièdre formé par Ox et Oy .

4.3 Roulement d'un cylindre sur un plan incliné

Un cylindre de masse m et de rayon b roule selon la ligne de plus grande pente d'un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale. On appelle C le centre d'inertie du cylindre et I le point de contact entre le cylindre et le plan incliné. Soit $OI = x$, (O, x, y, z) le repère associé. Le moment d'inertie du solide par rapport à Cy est $J = mb^2/2$.

1) Etude du mouvement quand $0 < x < L$: le cylindre roule sans glisser sur le plan incliné.

a) Donner la relation entre ω , vitesse angulaire du cylindre, et la vitesse de C .

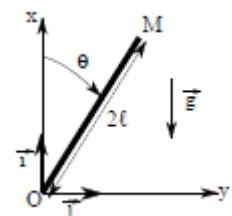
b) En utilisant une méthode énergétique, trouver une relation entre l'angle α et l'accélération de G .

c) Donner la relation entre α et le coefficient de glissement f pour qu'il y ait roulement sans glissement.

2) Etude du mouvement quand $x > L$: le coefficient de frottement est nul. Sachant qu'en $x = L$, $t = t_L$ et vitesse de C = vitesse de I , trouver pour $t > t_L$ la vitesse angulaire du cylindre et la vitesse de C .

4.4 Chute d'une barre pesante

Une barre OM de masse m , de longueur $2l$, posée quasi verticalement sur le sol se met à tomber en restant dans le plan vertical (Oxy) . Dans un premier temps, on envisage un mouvement sans glissement. L'extrémité basse de la barre, en O reste donc fixe. On connaît J le moment d'inertie de la barre autour de l'axe (Oz) .



1) Exprimer la réaction du support $\vec{R} = R_x \vec{i} + R_y \vec{j}$ en fonction de m , l , J , g et θ .

2) Donner les conditions du glissement ou non en O ?