1 Electrostatique

1.1 Demi-sphère électrisée

1 On considère une demi-sphère (S) de centre O, de rayon R, portant une densité surfacique de charge $\sigma > 0$ (uniforme) sur sa surface demi-sphérique.

a) Calculer le potentiel créé au point O.

b) Calculer le champ électrique créé au point O.

2. Désormais la demi-sphère (S) est chargée avec une densité surfacique non uniforme $\sigma_M = \sigma_0 \cos\theta$ (Fig. 37).

a) Calculer le potentiel créé au point O.

b) Calculer le champ créé au point O.

c) En déduire sans calculs supplémentaires le potentiel et le champ créés par une sphère O, R chargée en surface $\sigma = \sigma_0 \cos\theta$ au point O.

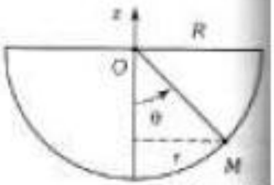


Figure 37

1.2 Champ électrostatique crée par une spire circulaire chargée

Planche ES 207. Champ électrostatique créé par une spire circulaire chargée. (CCP).

On considère une spire de rayon R et de charge linéique λ uniforme, d'axe Oz. On adopte la base des coordonnées cylindriques $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$.

1.a) Donner le champ électrostatique créé en tout point de l'axe Oz de la spire.

1.b) Déterminer par des arguments de symétrie que ce champ n'a pas de composante selon $\vec{u}_\theta$ si M est peu écarté de l'axe.

1.c) Montrer que dans ce cas E ne dépend que de r et z.

2.a) Exprimer le flux de ce champ $\vec{E}$ à travers le cylindre fermé de rayon r compris entre z et $z+dz$.

2.b) Déterminer les composantes E_r et E_z du champ au point $P(r, \theta, z)$.

2.c) Décrire les lignes de champ et les équipotentielles si $\lambda > 0$.

3. Que se passe-t-il si M est très éloigné de la spire ?

2 Magnétostatique

2.1 ENSSAT 2011

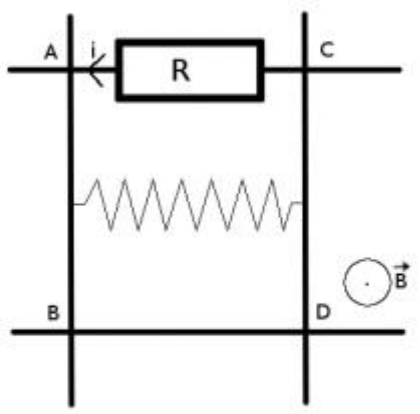
Exercice 1 :
Calculer le champ magnétique créé en tout point de l'espace par un fil supposé infini parcouru par un courant d'intensité I.

3 Induction

3.1 Oscillation de deux barres

Mines Ponts MP 2013 :

Exercice 1 :



On considère deux tiges parallèles (AB) et (CD) se déplaçant sans frottements sur deux rails fixes distants de a. On repère les deux tiges par leurs abscisses $x_1(t)$et $x_2(t)$. La résistance R est très grande devant celle des autres conducteurs. Le champ magnétique est uniforme et constant.

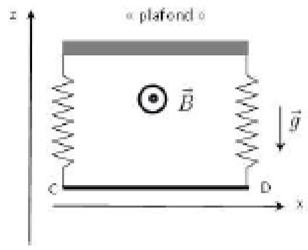
1. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $D=x_2-x_1$.

2. Commenter les différents régimes possibles.

3. Déterminer x_2.

3.2 Oscillations verticales d'une barre

Planche IEM 210. Oscillateur amorti par induction électromagnétique. (CCP).



Une tige CD métallique de masse m et de longueur L est suspendue par ses deux extrémités à deux ressorts identiques de constante de raideur k et de longueur à vide ℓ_0.
Un courant électrique peut circuler à travers les ressorts et le « plafond ». on note R la résistance électrique de tout le circuit et on négligera le phénomène d'induction dans les ressorts et d'auto-induction dans le circuit. On note g l'accélération de la pesanteur. Un champ magnétique uniforme et constant $\vec{B}$ est appliqué orthogonalement au plan de la figure.

1. Le système est au repos. Quelle est la longueur des ressorts dans ce cas ? (on placera l'origine des l'axe (Oz) au niveau de la barre quand elle est à l'équilibre).

2.a) On choisit d'orienter la tige dans le sens de C vers D. La vitesse de la barre est notée $\frac{dz}{dt}\vec{e}_z$. Exprimer en fonction des données la force électromotrice induite dans la tige e_{ind} .

2.b) Exprimer en fonction des données la force de Laplace qui s'applique sur la tige.

2.c) Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $z(t)$. On posera : $\frac{B^2L^2}{mR} = 2\alpha$ et $\frac{2k}{m} = \omega_0^2$.

3. On suppose que $\omega_0^2 - \alpha^2 = \gamma^2 > 0$. Quel est le régime obtenu ? Déterminer complètement $z(t)$, en fonction de α et γ, en prenant comme conditions initiales : $z(0) = 0$, $\frac{dz}{dt}(0) = V_0 > 0$. Tracer l'allure de $z(t)$.

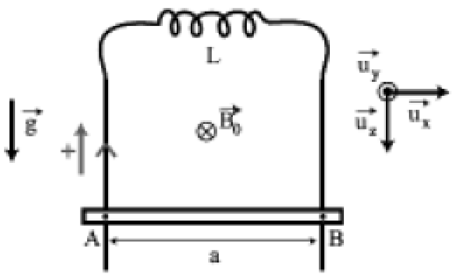
4.a Appliquer le théorème de l'énergie cinétique à la barre entre l'instant de départ et l'instant infini pour exprimer le travail de la force de Laplace.

4.b En déduire sans calcul supplémentaire l'énergie Joule dissipée entre l'instant initial et l'instant infini.

3.3 Induction électromagnétique et conversion de puissance

Exercice EM 11 (CCP-II-3) : Induction électromagnétique et conversion de puissance

Une tige rectiligne de longueur a, de masse m et de résistance R effectue un mouvement de translation le long de la verticale descendante $\vec{u}_z$ en restant parallèle à une direction horizontale et tout en fermant un circuit rectangulaire qui comporte une bobine d'inductance L. La résistance totale du circuit est R quelle que soit la position de la tige. L'ensemble du dispositif est plongé dans un champ magnétique $\vec{B} = -B\vec{u}_y$ uniforme et permanent. La tige est abandonnée sans vitesse initiale à la date $t = 0$. Son glissement s'effectue sans frottements. On notera v sa vitesse.

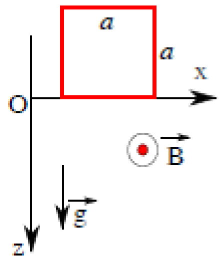


1. En notant i l'intensité du courant qui circule à l'instant t dans le circuit, écrire une équation différentielle faisant intervenir i et sa dérivée par rapport au temps.
2. Établir une équation différentielle liant v et sa dérivée par rapport au temps.
3. En combinant convenablement les deux équations précédentes, faire apparaître une équation en puissance. On écrira le premier membre comme la dérivée d'une énergie que l'on identifiera.
4. Écrire une équation différentielle faisant intervenir uniquement l'intensité i.
5. Dans le cas d'une résistance assez grande, décrire qualitativement l'évolution temporelle du courant $i(t)$ dans le circuit et la vitesse de la barre $v(t)$. Mettre en évidence un couple de valeurs particulières i_0 et v_0 dont on explicitera la signification physique.
6. Dans l'hypothèse inverse d'une résistance négligeable, calculer explicitement les fonctions $i(t)$, $v(t)$ et $z(t)$. Analyser la situation obtenue d'un point de vue énergétique.

3.4 Chute d'un cadre dans B inhomogène

Planche IEM 213 : Chute d'un cadre dans B inhomogène (ENTPE-12).

Un cadre métallique carré de côté de longueur a et de résistance électrique totale R est placé à l'origine dans le plan vertical (xOz). le champ de pesanteur est $\vec{g} = g\vec{e_z}$. Pour $z \geqslant 0$, le cadre est plongé dans un champ magnétique $\vec{B} = (B_0 - \alpha z)\vec{e}_y$.



1°) Justifier qualitativement le sens du courant induit dans le cadre.

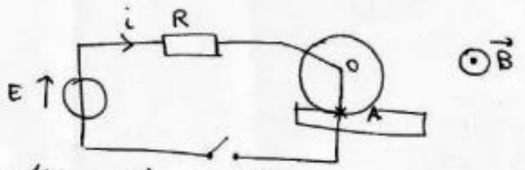
2°) Calculer la force électromotrice induite.

3°) Calculer la résultante $\vec{F}$ des forces de Laplace.

3.5 Roue de Barlow

Physique (Petites Mines)

On a ce circuit :



- La roue est de rayon a, la vitesse angulaire de la roue est $\vec{\omega} = \omega \vec{u_z}$.

Le circuit est plongé dans le champ magnétique $\vec{B} = B_0 \vec{u_z}$.

La roue est conductrice, et est plongée dans une solution de mercure, qui va permettre de conduire le courant dans le reste du circuit.

① On ferme l'interrupteur. Expliquer les phénomènes physiques qui se passent. Dans quel sens tourne la roue ? Expliquer la loi de Lenz.

② Calculer le champ électromoteur. En déduire la fem eind.

③ Etablir l'équation électrique du système.

④ Etablir l'équation mécanique du système, en notant J le moment d'inertie de la roue, et en considérant la liaison pivot - axe parfaite.

⑤ Résoudre les équations

3.6 Barres en rotation dans un champ magnétique

3.C.2 - Barres en rotation dans un champ magnétique ***

(Mines-Pont 2007)

Deux barres conductrices homogènes identiques en rotation autour d'un axe horizontal Δ ont un moment d'inertie J autour de cet axe. A l'autre extrémité, elles se déplacent dans des glissières reliées par un fil de résistance R. Le système est plongé dans un champ magnétique $\vec{B}$ parallèle à Δ. On néglige tout frottement.

On appelle φ_1 et φ_2 les angles que font les barres 1 et 2 avec la verticale.

1) Déterminer :

1.a) l'équation électrique qui donne le courant i circulant dans le circuit en fonction de φ_1 et φ_2 ;

1.b) les équations mécaniques qui donnent l'évolution de φ_1 et φ_2 en fonction de i.

Eléments de correction:

1)

1.a) Le flux magnétique est : $\Phi = B_0.\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2.\pi}.\pi.L^2$.

L'équation électrique est donc :

$$i = \frac{B_0.L^2}{2.R}(\dot{\varphi_1} - \dot{\varphi_2})$$

1.b) Théorème du moment cinétique pour k ($i_1 = +i$ et $i_2 = -i$) :

$$J.\ddot{\varphi}_k + \frac{m.L.g}{2}\varphi_k = -\frac{B_0.i_k.L^2}{2}$$

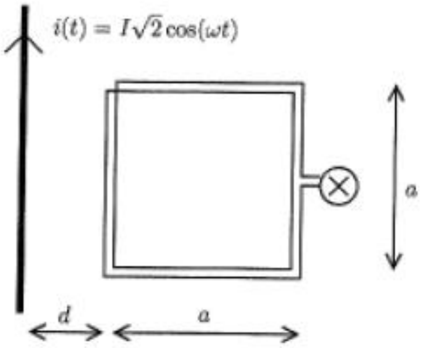
3.7 ENSSAT 2012

Exercice 1 :
On considère un solénoïde de longueur H , de section circulaire de rayon R1 , comportant n1 spires par unité de longueur , parcouru par un courant d'intensité I1 (on considérera que ce solénoïde se comporte comme un solénoïde infini) .
1- Déterminer la géométrie du champ magnétique créé par ce solénoïde . En supposant le champ nul à l'extérieur du solénoïde , déterminer le champ en un point intérieur au solénoïde .
2- Quelle est la géométrie du potentiel vecteur ? En utilisant la relation intégrale liant le champ magnétique et son potentiel vecteur , déterminer le potentiel vecteur créé en tout point de l'espace par ce solénoïde .
3- Déterminer l'inductance propre de ce solénoïde .
4- On entoure ce solénoïde d'un solénoïde de même longueur H , de rayon R2 > R1 , comportant n2 spires par unité de longueur parcouru par un courant d'intensité I2 . Déterminer l'inductance mutuelle des deux solénoïdes . Les deux solénoïdes se comportent comme des solénoïdes infinis .

3.8 Induction électromagnétique

Exercice EM 4 (CCP-I-3) : Induction électromagnétique

Une ligne haute tension transporte un courant sinusoïdal de fréquence $f = 50$ Hz et de valeur efficace $I = 1$ kA. On approche une bobine plate de N spires carrées de côté $a = 30$ cm à une distance $d = 2$ cm comme indiqué sur le schéma. Cette bobine, d'inductance et de résistance négligeables, est fermée sur une ampoule qui éclaire si la tension efficace à ses bornes est supérieure à $1,5$ V.



1) Déterminer l'inductance mutuelle M entre les 2 circuits.

2) En déduire le nombre de spires nécessaire pour la bobine.

Données :
Perméabilité du vide : $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}$ H.m^{-1} ;
Permitivité du vide : $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{36\pi}.10^{-9}$ F.m^{-1}.

4 Energie électromagnétique

5 Ondes électromagnétiques

5.3 Guide d'onde plan

Guide d'ondes plan

On considère un guide d'onde diélectrique, composé d'un film diélectrique d'indice n_1 situé entre les plans $x = 0$ et $x = d$, déposé sur un substrat diélectrique d'indice $n_2 < n_1$ remplissant le demi-espace $x < 0$. L'ensemble est placé dans l'air, qui remplit donc le demi-espace $x > d$. On cherche des ondes de pulsation ω se propageant globalement dans la direction z à l'intérieur du guide.

On rappelle (ou on donne) que les diélectriques ont une perméabilité magnétique μ_0 égale à celle du vide, et une permittivité électrique $\epsilon_i = n_i^2\epsilon_0$

1. *A priori*, on doit ici déterminer six fonctions de quatre variables : les composantes de $\mathbf{E} = \mathbf{E}(x, y, z, t)$ et de $\mathbf{B} = \mathbf{B}(x, y, z, t)$. Montrer que le problème se réduit à trouver :

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}(x)e^{i(\omega t-\beta z)} \qquad \text{et} \qquad \mathbf{B} = \mathbf{B}(x)e^{i(\omega t-\beta z)} \tag{3.1}$$

où β est appelée *constante de propagation*. Pourquoi peut-elle être différente de k ?

2. On admet que l'équation de Maxwell-Faraday s'écrit (en composantes) de la façon suivante :

$$\beta E_y(x) = -\omega B_x(x) \tag{3.2}$$
$$E_z'(x) + i\beta E_x(x) = i\omega B_y(x) \tag{3.3}$$
$$E'y(x) = -i\omega B_z(x) \tag{3.4}$$

et l'équation de Maxwell-Ampère :

$$\beta B_y(x) = \mu_0\epsilon\omega E_x(x) \tag{3.5}$$
$$B_z'(x) + i\beta B_x(x) = -i\omega\mu_0\epsilon E_y(x) \tag{3.6}$$
$$B_y'(x) = i\epsilon\mu_0\omega E_z(x) \tag{3.7}$$

où $\epsilon = n^2\epsilon_0$ (milieu diélectrique). Montrer que ces équations se séparent en deux groupes indépendants de trois composantes des champs chacun. Identifier les ondes TE (transverse électrique) et TM (transverse magnétique), et vérifier que la connaissance de la seule composante transverse permet de déduire les deux autres – et donc de résoudre le problème.

3. Dans toute la suite on se limite au cas des ondes TE. Les ondes TM vérifient exactement les mêmes équations, seuls certains arguments pour les établir diffèrent, et pour forcer l'analogie on note $\phi(x) = E_y(x)$. Montrer que dans les trois milieux considérés $\phi(x)$ est solution de l'équation différentielle :

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} - (\beta^2 - k_0^2n_i^2)\phi = 0 \tag{3.8}$$

4. *(Question de cours)* Rappeler les relations de passages pour les champs électrique et magnétique aux interfaces entre le guide et le substrat. En déduire les conditions de continuité pour ϕ et ϕ'. Préciser ce que valent ϕ et ϕ' à l'infini.

5. On suppose $k_0n_2 < \beta < k_0n_1$. Quelle est la forme analytique de ϕ dans chacun des milieux (on posera $\Omega_i^2 = |\beta^2 - k_0^2n_i^2|$) ? Justifier la dénomination de *mode guidé* qu'on utilise dans ce cas.

6. On écrira $\phi(0 < x < d) = A\cos(\Omega_1 x) + B\sin(\Omega_1 x)$. En déduire l'expression de ϕ dans le substrat et dans l'air.

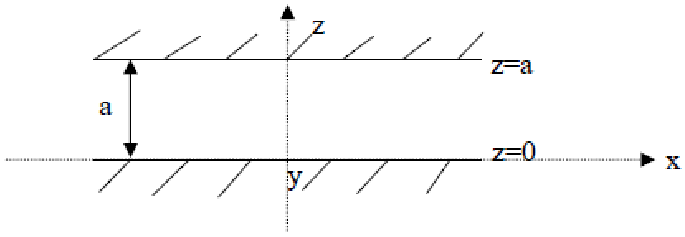
7. En déduire la relation implicite entre β (*via* les Ω) et d autorisant la propagation d'un mode TE s'écrit

$$\tan\Omega_1 d = \frac{\frac{\Omega_2}{\Omega_1} + \frac{\Omega_0}{\Omega_1}}{1 - \frac{\Omega_0}{\Omega_1}\frac{\Omega_2}{\Omega_1}} \tag{3.9}$$

8. Montrer enfin qu'il n'existe qu'un nombre fini de modes guidés dans un guide d'onde donné.

5.4 ENSSAT 2011

Exercice 2 :
L'espace est rapporté au trièdre Oxyz direct et orthonormé, de base (**ux** , **uy** , **uz**). Une onde électromagnétique TE (transversale électrique) de pulsation w, polarisée rectilignement , se propage dans le vide suivant la direction Ox entre deux plans métalliques parfaits z = 0 et z = a ; le champ électrique de cette onde en M (x , y , z) entre les conducteurs est **E** = Eo(z) cos (wt – kx) **uy**.



1- Déterminer l'équation d'onde vérifiée par le champ électrique entre les deux plans métalliques. Montrer que l'amplitude Eo(z) de cette onde obéit à une équation différentielle du second ordre.
2- a- Déterminer la loi Eo(z) dans les trois cas : w < k c, w = k c et w > k c (c étant la vitesse de la lumière). Conclusion ?
b- Déterminer l'équation de dispersion dans le guide d'onde. Montrer qu'il ne peut y avoir propagation des ondes de mode N (N entier) que pour des fréquences f supérieures à une fréquence de coupure f_N qu'on exprimera en fonction de a, |N| et c.
c- Sur quelle fréquence minimale et quelle longueur d'onde maximale les gardiens d'un grand parking souterrain (construit en béton armé sur un niveau) peuvent-ils communiquer entre eux si la distance verticale sol plafond est 2,65 m.
3- Déterminer les champs électrique **E** (x , t) et magnétique **B** (x , t) de l'onde, lorsqu'elle existe.
4- Déterminer la vitesse de phase de l'onde.

5.5 Centrale MP 2012

Réflexion de l'onde émise par un téléphone portable

On désire modéliser, de manière simple, les problèmes de réflexion des ondes sur un immeuble en téléphonie mobile. Le champ électrique de l'onde émise par une station de base s'écrit

$$\underline{E}_i(x,t) = E_0 \exp\left(j\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}x\right)\right)\vec{e}_z$$

où ω représente la pulsation temporelle et λ la longueur d'onde.

On prendra une fréquence temporelle $f = 860$ MHz.

Un immeuble situé en $x = L$ réfléchit l'onde sans l'atténuer et sans modifier sa polarisation. Ainsi

$$\underline{r} = \frac{\underline{E}_r(x=L,t)}{\underline{E}_i(x=L,t)} = e^{j\phi}$$

où $\underline{E}_r(x,t)$ désigne le champ électrique de l'onde réfléchie réputée plane, progressive, monochromatique.

On admet que la puissance $\mathcal{P}$ reçue par le téléphone mobile est proportionnelle à la valeur moyenne dans le temps du carré du champ électrique. Il existe une puissance $\mathcal{P}_S$ en dessous de laquelle la réception d'un signal est impossible. On admettra que la moyenne suivant x de $\mathcal{P}$ est égale à $10\mathcal{P}_S$.

1. Écrire le champ électrique de l'onde résultante et caractériser cette onde.

2. Le téléphone mobile se déplace à une vitesse v constante suivant l'axe des x. Quelle est la durée moyenne des coupures ? On fera l'application numérique pour $v = 4{,}0\ \text{km}\cdot\text{h}^{-1}$ et $v = 40\ \text{km}\cdot\text{h}^{-1}$. Commenter.

3. Par ailleurs en milieu urbain, les retards des trajets réfléchis par rapport aux trajets directs sont de l'ordre de 1 μs.

   a. Quelle est la valeur typique de $L - x$ associée à ce retard ?

   b. On suppose que pour cette valeur typique de $L - x$ et pour la fréquence f, le signal reçu par le mobile de la part de la station de base a une puissance nulle. On augmente alors la fréquence de f à $f + \delta f$ pour rétablir la communication. Déterminer numériquement la valeur minimale à donner à δf.