

Outils mathématiques

1 Rappel sur les systèmes de coordonnées

A un référentiel d'étude s'associe un repère servant à définir ce référentiel. La position d'un point M est définie à un instant t par le vecteur position : $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$.

1.1 Coordonnées cartésiennes

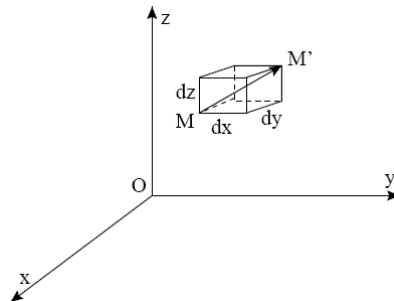
Dans le repère $\mathcal{R}(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$, on utilise les coordonnées cartésiennes (x, y, z) .

Vecteur position

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}$$

Déplacement élémentaire du point M

$$d\overrightarrow{OM} = d\vec{M} = dx\vec{u}_x + dy\vec{u}_y + dz\vec{u}_z = \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}$$



1.2 Coordonnées cylindriques

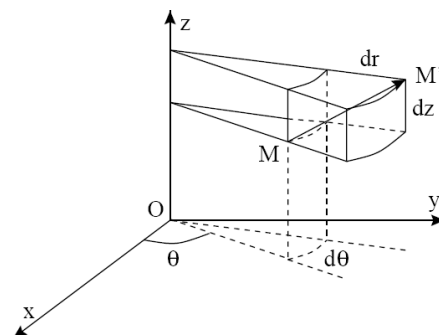
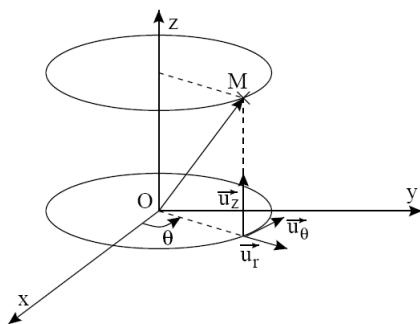
Dans le repère $\mathcal{R}_{cyl}(O, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$, on utilise les coordonnées cylindriques (r, θ, z) .

Vecteur position

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r + z\vec{u}_z = \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ z \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_{cyl}}$$

Déplacement élémentaire du point M

$$d\overrightarrow{OM} = d\vec{M} = dr\vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + dz\vec{u}_z = \begin{pmatrix} dr \\ r d\theta \\ dz \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_{cyl}}$$



1.3 Coordonnées sphériques

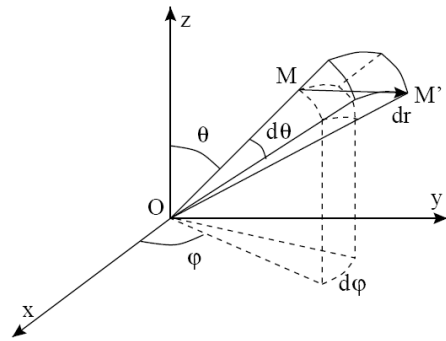
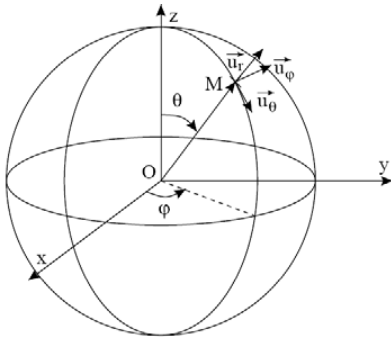
Dans le repère $\mathcal{R}_{sph}(O, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$, on utilise les coordonnées sphériques (r, θ, φ) .

Vecteur position

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r = \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_{sph}}$$

Déplacement élémentaire du point M

$$d\overrightarrow{OM} = d\vec{M} = dr\vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + r \sin \theta d\varphi \vec{u}_\varphi = \begin{pmatrix} dr \\ r d\theta \\ r \sin \theta d\varphi \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_{sph}}$$

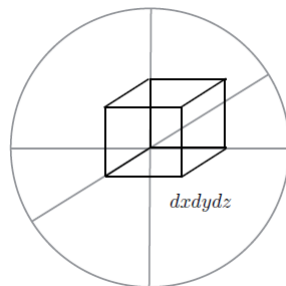


2 Surfaces et volumes élémentaires

2.1 Coordonnées cartésiennes

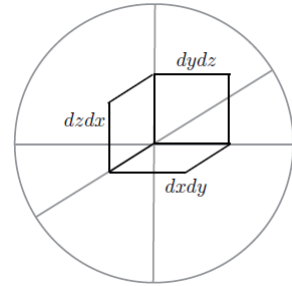
Volume
élémentaire

$$dV = dx dy dz$$



Surface élémentaire

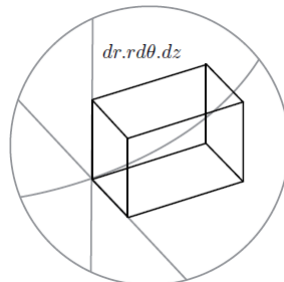
$$\begin{cases} x = cte & dS = dy dz \\ y = cte & dS = dx dz \\ z = cte & dS = dx dy \end{cases}$$



2.2 Coordonnées cylindriques

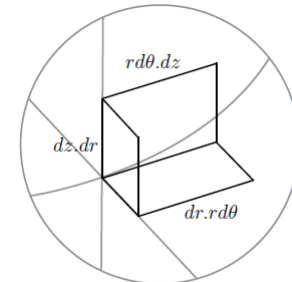
Volume
élémentaire

$$dV = r dr d\theta dz$$



Surface élémentaire

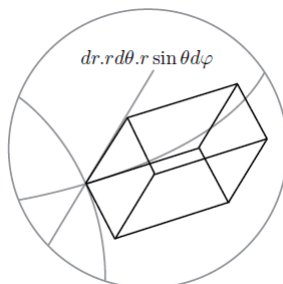
$$\begin{cases} r = cte & dS = r d\theta dz \\ \theta = cte & dS = dr dz \\ z = cte & dS = r dr d\theta \end{cases}$$



2.3 Coordonnées sphériques

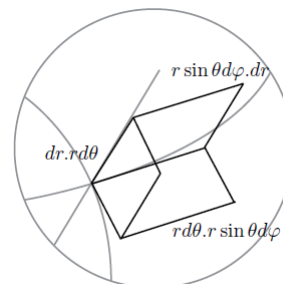
Volume élémentaire

$$dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$$



Surface élémentaire

$$\begin{cases} r = cte & dS = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi \\ \theta = cte & dS = r \sin \theta dr d\varphi \\ \varphi = cte & dS = r dr d\theta \end{cases}$$



3 Fonctions de plusieurs variables

Les grandeurs qui vont être étudiées en physique-chimie cette année peuvent dépendre à la fois de la position et du temps.

Par exemple, la pression P dans une base cartésienne pourra dépendre de x, y, z et t : $P(x, y, z, t)$

On dit qu'elle dépend de plusieurs variables.

3.1 Dérivation

On peut alors souhaiter dériver cette grandeur par rapport à une seule variable, on utilisera alors la notation de dérivée partielle.

Par exemple, dérivée partielle de la pression P par rapport à x : $\frac{\partial P(x, y, z, t)}{\partial x}$

On pourra aussi trouver une notation où l'on précisera quelles données sont fixées.

Par exemple, pour la dérivée partielle de la pression P par rapport à x , les coordonnées y, z et le temps t sont fixés, on pourra donc aussi écrire : $\left(\frac{\partial P(x, y, z, t)}{\partial x} \right)_{y, z, t}$

Si cette grandeur ne dépend plus que d'une seule variable, la notation change pour passer de ∂ à d .

Par exemple, si la pression P ne dépend que de x , sa dérivée s'écrira : $\frac{dP(x)}{dx}$

3.2 Différentielle

Si la fonction dépend de plusieurs variables, comme c'est le cas pour la pression d'un gaz parfait qui dépend de T et V d'après l'équation d'état : $PV = nRT$, alors sa différentielle peut se mettre sous la

$$\text{forme : } dP = \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V dT + \left(\frac{\partial P}{\partial V} \right)_T dV$$

On peut souhaiter exprimer les petites variations d'une grandeur autour d'un point. Dans le cours de physique-chimie, on pourra les confondre avec la différentielle de la grandeur autour de ce point.

Par exemple, si nous étudions les petites variations de la pression autour de x , on peut écrire :

$$P\left(x + \frac{dx}{2}, y, z\right) - P\left(x - \frac{dx}{2}, y, z\right) = \frac{\partial P}{\partial x} dx$$

3.3 Développement limité

L'expression ci-dessus provient du développement limité de la fonction. En effet, en physique, la résolution des problèmes ne requiert souvent que la connaissance du comportement de cette fonction au voisinage d'un point. On cherche donc à remplacer l'expression de la fonction au voisinage d'un point donné, par une expression plus simple à manipuler et donc à étudier.

Le développement limité à l'ordre p d'une fonction f au voisinage de x_0 est donnée par la formule de

$$\text{Taylor : } f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2!} f''(x_0) + \dots + \frac{h^p}{p!} f^{(p)}(x_0) + o(h^p)$$

On se limitera la plupart du temps au développement limité à l'ordre 1 en physique.

Revenons sur les petites variations de la pression autour de x vues précédemment :

$$\begin{aligned}
 P\left(x + \frac{dx}{2}, y, z\right) &= P(x, y, z) + \frac{dx}{2} \frac{\partial P}{\partial x} + o\left(\frac{dx}{2}\right) \\
 P\left(x - \frac{dx}{2}, y, z\right) &= P(x, y, z) - \frac{dx}{2} \frac{\partial P}{\partial x} + o\left(\frac{dx}{2}\right)
 \end{aligned}
 \Rightarrow P\left(x + \frac{dx}{2}, y, z\right) - P\left(x - \frac{dx}{2}, y, z\right) = \frac{\partial P}{\partial x} dx$$

3.4 Intégration

De la même manière que pour la dérivation, une grandeur dépendant de plusieurs variables peut être intégrée par rapport à l'une de ses variables.

Par exemple, intégrale de la pression P par rapport à x : $\int P(x, y, z, t) dx$.

Lorsqu'une grandeur dépend de plusieurs paramètres de l'espace, on peut aussi l'intégrer par rapport à une surface ou à un volume. Par exemple, pour trouver la résultante $\vec{F}_S$ des forces de pression, on intégrera la pression P par rapport à une surface : $\vec{F}_S = \iint d\vec{F}_S = \iint -P(M, t) dS \vec{n}$