

Electrostatique

1 Champ électrostatique créé par une distribution discrète de charges

1.1 Charges électriques

1.1.1 Expérience d'électrisation

1.1.2 Charges électrique

Au niveau microscopique, les particules chargées, aussi appelées **porteurs de charges**.

Propriété :

La charge q d'une particule microscopique est toujours un multiple entier relatif de la charge élémentaire e , de charge $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ (Coulomb).

Remarque :

Pour un système fermé composé d'un ensemble de particules, la charge est quantifiée, extensive, additive et conservative.

1.2 Loi de Coulomb

1.2.1 Expérience de Coulomb

1.2.2 Enoncé

Définition :

Soit une particule chargée en M_1 de charge q_1 , respectivement M_2 de charge q_2 . On note r la distance entre ces deux points et $\vec{u}_{12}$ le vecteur unitaire de direction M_1 vers M_2 , soit : $\vec{u}_{12} = \frac{\overrightarrow{M_1 M_2}}{M_1 M_2}$.

La force exercée par la charge q_1 sur la charge q_2 , appelée **force de Coulomb**, s'écrit dans le vide :

$$\vec{F}_{1/2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{u}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{(M_1 M_2)^3} \overrightarrow{M_1 M_2} \quad (1)$$

Remarques :

$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$ permittivité du vide

Dans un milieu diélectrique, on aura : $\vec{F}_{1/2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{u}_{12}$ avec ϵ_r permittivité relative (sans unité).

Dans l'air, $\epsilon_r \approx 1$, dans l'eau : $\epsilon_r \approx 80$.

D'après le principe des actions réciproques, on aura : $\vec{F}_{1/2} = -\vec{F}_{2/1}$

1.2.3 Analogie avec la force gravitationnelle

Définition :

Soit une masse m_1 en M_1 et une masse m_2 en M_2 . On note r la distance entre ces deux points et $\vec{u}_{12}$ le vecteur unitaire de direction M_1 vers M_2 . La force exercée par la masse m_1 sur la masse m_2 , appelée

force gravitationnelle, s'écrit : $\vec{F}_{1/2} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{u}_{12}$

Remarque :

Les masses étant toujours positives, cette force est une force d'attraction.

Ordre de grandeur :

On pourra donc négliger l'influence de la gravitation (donc du poids) pour l'étude du mouvement des particules chargées.

1.3 Champ électrostatique créé par une charge ponctuelle

1.3.1 Définition

1.3.2 Champ électrostatique créé par une charge ponctuelle

Définition :

Soit une charge ponctuelle Q située au point O , origine du repère. Si on place une charge q en un point M quelconque de l'espace. Le champ électrique créé par Q en M est :

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \vec{u}_r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{OM}}{(OM)^3} \quad (2)$$

Remarques :

L'unité du champ électrostatique est donc en $N.C^{-1}$ ou encore plus communément en $V.m^{-1}$

Le champ électrostatique est radial et varie comme l'inverse de la distance au carré

Il n'est pas défini au point O .

1.4 Champ électrostatique créé par un ensemble de charges ponctuelles

Dans le cas d'une distribution de charges ponctuelles, où l'on note Q_i la valeur de la charge portée par la particule A_i on procède par superposition en ajoutant le champ électrostatique créé, au point M , par chacune des charges :

$$\vec{E}(M) = \sum_i \frac{Q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{A_iM}}{(A_iM)^3} = \sum_i \vec{E}_i(M) \quad (3)$$

Remarque :

C'est ce qu'on appelle le **principe de superposition**.

2 Distributions continues de charges

2.1 Distribution volumique de charge électrique

2.1.1 Changement d'échelle

Changement d'échelle pour l'échelle **mésoscopique**.

On décompose un volume total V en volumes élémentaires tel que :

un volume élémentaire $d\tau$ contient un nombre de particules dN suffisamment grand et porte la charge élémentaire dq .

On définit une **densité de particules chargées** (m^{-3}), n , telle que : $n = \frac{dN}{d\tau}$ supposée uniforme.

Définition :

On définit la **densité volumique de charges** ρ ($C.m^{-3}$) par :

$$\rho = \frac{dq}{d\tau} \quad (4)$$

Remarques :

Charge totale Q de la distribution volumique : $Q = \iiint_V dq = \iiint_V \rho d\tau$

Si porteurs de charges tous identiques portant une charge q : $\rho = nq$

Si plusieurs types de porteurs différents : $\rho = \sum_i n_i q_i$

2.1.2 Calcul du champ électrostatique

Charge élémentaire dq située au point P à l'origine d'un champ électrostatique élémentaire en M :

$$\vec{dE}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \vec{u}_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho(P)}{r^2} d\tau \vec{u}_r = \frac{\rho(P)}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{PM}}{(PM)^3} d\tau \quad (5)$$

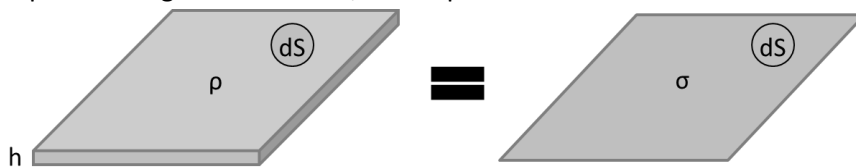
Champ électrostatique total résultant de la distribution de charge, il suffit alors d'intégrer sur le

volume V (théorème de superposition) : $\vec{E}(M) = \iiint_V \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho(P)}{r^2} \vec{u}_r d\tau = \iiint_V \frac{\rho(P)}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{PM}}{(PM)^3} d\tau$

2.2 Distribution surfacique de charge électrique

2.2.1 Définition

Lorsque les charges de la distribution sont localisées dans un volume de faible épaisseur h (très inférieure aux dimensions latérales), on peut modéliser la distribution comme une distribution continue surfacique de charges de surface S , décomposable en surfaces élémentaires dS .



Définition :

On définit la densité surfacique de charges σ (C.m⁻²) par :

$$\sigma = \frac{dq}{dS} \quad (6)$$

Remarque :

On peut repasser à la distribution volumique par : $\sigma = h\rho$

Une distribution surfacique n'est qu'un modèle.

2.2.2 Calcul du champ électrostatique

Charge élémentaire dq située au point P à l'origine d'un champ électrostatique élémentaire en M :

$$\vec{dE}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \vec{u}_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma(P)}{r^2} dS \vec{u}_r = \frac{\sigma(P)}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{PM}}{(PM)^3} dS \quad (7)$$

Champ électrostatique total résultant de la distribution de charge, il suffit alors d'intégrer sur la

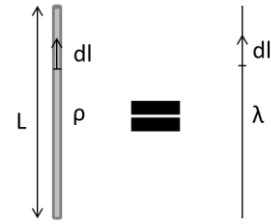
surface S (théorème de superposition) : $\vec{E}(M) = \iint_S \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma(P)}{r^2} \vec{u}_r dS = \iint_S \frac{\sigma(P)}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{PM}}{(PM)^3} dS$

Remarque :

Le champ électrostatique n'est pas défini sur la distribution surfacique de charges.

2.3 Distribution linéique de charge électrique

Lorsque les charges de la distribution sont localisées dans un volume de longueur L très grande devant les dimensions latérales r , on peut modéliser la distribution comme une distribution continue linéique de charges de longueur L , décomposable en surfaces élémentaires dl .



Définition :

On définit la densité linéique de charges λ (C.m^{-1}) par :

$$\lambda = \frac{dq}{dl} \quad (8)$$

Remarque :

On peut repasser à la distribution volumique par : $\lambda = S\rho$

Une distribution linéique n'est qu'un modèle.

2.3.1 Calcul du champ électrostatique

Charge élémentaire dq située au point P à l'origine d'un champ électrostatique élémentaire en M :

$$\vec{dE}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \vec{u}_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda(P)}{r^2} dl \vec{u}_r = \frac{\lambda(P)}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{PM}}{(PM)^3} dl \quad (9)$$

Champ électrostatique total résultant de la distribution de charge, il suffit alors d'intégrer sur la

longueur L (théorème de superposition) : $\vec{E}(M) = \int_L \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda(P)}{r^2} \vec{u}_r dl = \int_L \frac{\lambda(P)}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{PM}}{(PM)^3} dl$

Remarque :

Le champ électrostatique n'est pas défini sur la distribution linéique de charges.

3 Symétries et invariances du champ électrostatique

3.1 Principe de Curie

Principe de Curie :

Lorsque des causes produisent des effets, les symétries des causes doivent se retrouver dans celles des effets.

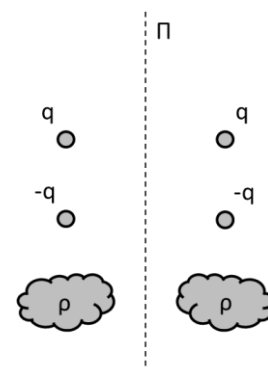
Remarque :

Réciproque fausse

3.2 Symétries de la distribution de charges

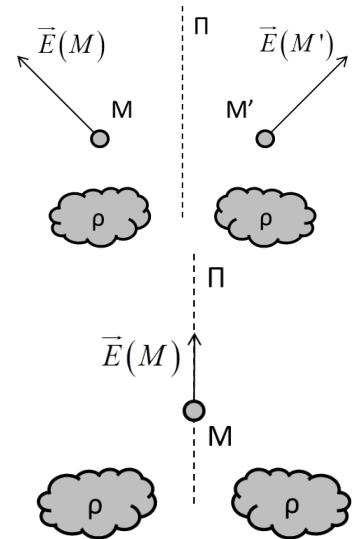
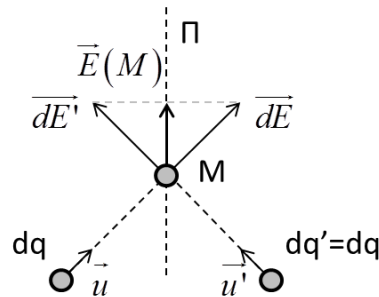
3.2.1 Plan de symétrie

Une distribution de charge possède un plan de symétrie Π si Π est un plan de symétrie géométrique de la distribution et que les charges sont identiques de chaque côté du plan Π .



Si le plan Π est un plan de symétrie de la distribution de charge, alors en deux points M et M' symétrique par rapport au même plan Π , les champs électrostatiques seront symétriques par rapport à Π .

Si M appartient au plan de symétrie Π , le champ électrostatique est inclus dans le plan de symétrie Π : $\vec{E}(M) \in \Pi$

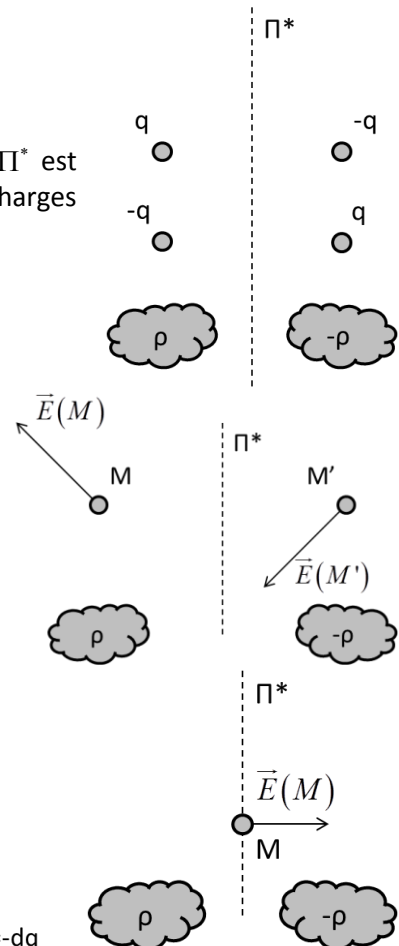
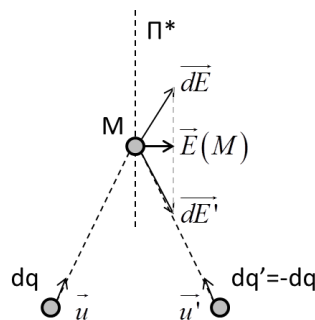


3.2.2 Plan d'anti-symétrie

Une distribution de charge possède un plan d'anti-symétrie Π^* si Π^* est un plan de symétrie géométrique de la distribution et que les charges sont opposées de chaque côté du plan Π^* .

Si le plan Π^* est un plan de symétrie de la distribution de charge, alors en deux points M et M' symétrique par rapport au même plan Π^* , les champs électrostatiques seront anti-symétriques par rapport à Π^* .

Si M appartient au plan d'anti-symétrie Π^* , alors le champ électrostatique est perpendiculaire au plan d'anti-symétrie Π^* : $\vec{E}(M) \perp \Pi^*$



3.2.3 Symétrie du champ électrostatique

Propriété :

Le champ électrostatique a les mêmes propriétés de symétrie que la distribution de charges.

Remarque :

On dit que c'est un vecteur polaire.

Conséquence :

Pour trouver la direction du champ électrostatique en un point M, on cherchera donc les plans de symétrie et d'anti-symétrie de la distribution de charge contenant le point M.

Propriété :

Distribution de charges à haut degré de symétrie si l'étude des propriétés de symétries de la distribution permet de connaître la direction du champ électrostatique en tout point de l'espace.

3.3 Invariances de la distribution de charges

3.3.1 Invariance par translation

Une distribution de charges est invariante par translation suivant un axe, si pour tout point P et son translaté P' sa densité de charge vérifie : $\rho(P) = \rho(P')$.

Alors le champ électrostatique sera indépendant de la coordonnée de P selon l'axe de translation.

3.3.2 Invariance par rotation

Une distribution de charges est invariante par rotation autour d'un axe, si la densité de charge est la même en tout point P' obtenu par rotation de P autour de l'axe.

Alors le champ électrostatique sera indépendant de la coordonnée angulaire de P par rapport à l'axe de rotation.

3.3.3 Invariances du champ électrostatique

Propriété :

Le champ électrostatique a les mêmes propriétés d'invariances que la distribution de charges.

Conséquence :

Pour trouver la dépendance aux coordonnées du champ électrostatique, on cherchera donc les invariances de la distribution de charge.

4 Potentiel électrostatique

4.1 Énergie potentielle électrostatique d'une charge placée dans un champ électrostatique extérieur

4.1.1 Rappel : travail et énergie potentielle

4.1.2 Énergie potentielle de la force de Coulomb

La force de Coulomb est une force centrale, donc conservative et dérive d'une énergie potentielle.

Propriété :

L'énergie potentielle de la force de Coulomb, dans le cas d'une charge ponctuelle Q placée à l'origine du repère, agissant sur une particule de charge q en M, s'écrit :

$$E_p(M) = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (10)$$

Remarque :

Le choix d'une valeur nulle à l'infini est arbitraire, on pourrait laisser une constante.

4.1.3 Analogie avec la force gravitationnelle

Dans le cas d'une masse ponctuelle m' placée à l'origine du repère, agissant sur une masse m en M (à

la distance r), l'énergie potentielle s'écrit : $E_p(M) = -\frac{Gmm'}{r}$

4.2 Circulation du champ électrostatique

Définition :

On appelle circulation du champ électrostatique entre les points A et B, l'intégrale :

$$C = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (11)$$

Propriété :

On retrouve la différence de potentiel entre deux points A et B en calculant la circulation du champ électrostatique entre ces mêmes points.

$$V(A) - V(B) = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (12)$$

Remarque :

La circulation du champ électrostatique ne dépend pas du chemin suivi.

Propriété :

Le champ électrostatique est dit à circulation conservative : $\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$

Remarque :

Le potentiel électrostatique (V) est alors issu du rapport : $V(M) = \frac{E_p(M)}{q}$

Le potentiel électrostatique est donc défini à une constante près.

4.3 Potentiel créé par une distribution de charges

Soit une charge ponctuelle Q située au point O, origine du repère. Si on place une charge q en un point M quelconque de l'espace. Le potentiel électrostatique créé par Q en M est :

$$V(M) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 OM} \quad (13)$$

Dans le cas d'une distribution de charges ponctuelles, où l'on note Q_i la valeur de la charge portée par la particule A_i on procède par superposition en ajoutant le potentiel électrostatique créé, au point M, par chacune des charges :

$$V(M) = \sum_i \frac{Q_i}{4\pi\epsilon_0 A_i M} \quad (14)$$

Dans le cas d'une distribution volumique de charge de densité volumique ρ située au point P, le potentiel électrostatique élémentaire au point M est donné par :

$$dV(M) = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{\rho(P)}{4\pi\epsilon_0 r} d\tau \quad (15)$$

Potentiel électrostatique total : $V(M) = \iiint_V \frac{\rho(P)}{4\pi\epsilon_0 r} d\tau = \iiint_V \frac{\rho(P)}{4\pi\epsilon_0 PM} d\tau$

Dans le cas d'une distribution surfacique de charge de densité surfacique σ située au point P, le potentiel électrostatique élémentaire au point M est donné par :

$$dV(M) = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{\sigma(P)}{4\pi\epsilon_0 r} dS \quad (16)$$

Potentiel électrostatique total :
$$V(M) = \iint_S \frac{\sigma(P)}{4\pi\epsilon_0 r} dS = \iint_S \frac{\sigma(P)}{4\pi\epsilon_0 PM} dS$$

Dans le cas d'une distribution linéique de charge de densité linéique λ située au point P, le potentiel électrostatique élémentaire au point M est donné par :

$$dV(M) = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{\lambda(P)}{4\pi\epsilon_0 r} dl \quad (17)$$

Potentiel électrostatique total :
$$V(M) = \int_L \frac{\lambda(P)}{4\pi\epsilon_0 r} dl = \int_L \frac{\lambda(P)}{4\pi\epsilon_0 PM} dl$$

4.4 Relation entre champ et potentiel électrostatique

On retiendra l'expression du gradient en coordonnées cartésiennes :

$$\vec{\text{grad}}V = \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)\vec{u}_x + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)\vec{u}_y + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)\vec{u}_z \quad (18)$$

Propriété :

On peut retrouver le champ électrostatique à partir du potentiel électrostatique par :

$$\vec{E} = -\vec{\text{grad}}V \quad (19)$$

Remarque :

On retrouve l'unité du champ électrostatique (V.m^{-1}) à partir de cette équation.

Propriété :

Le potentiel électrostatique possède les mêmes propriétés d'invariance que le champ électrostatique et donc que la distribution de charges.

5 Théorème de Gauss

5.1 Flux du champ électrostatique

Définition :

Le flux du champ électrostatique à travers une surface S est égal à l'intégrale du champ électrostatique à travers cette surface :

$$\iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} \quad (20)$$

Propriété :

Lorsqu'une surface Σ est fermée et orientée vers l'extérieur, le flux du champ à travers Σ est qualifié de flux sortant et on le note : $\oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S}$

5.2 Cas d'une charge ponctuelle

On considère une charge ponctuelle Q placée en O, qui crée le champ électrostatique

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \vec{u}_r. \text{ On prend comme surface fermée une sphère de rayon } r \text{ et de centre O, qui}$$

passé donc par le point M.

Calculons le flux du champ à travers cette surface fermée :

La normale à la surface est colinéaire à la direction du champ d'où :

$$\oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oiint_{\Sigma} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \vec{u}_r \cdot d\vec{S} = \oiint_{\Sigma} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} dS$$

De plus, la coordonnée r est constante sur la sphère, donc le champ uniforme sur la sphère :

$$\oiint_{\Sigma} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} dS = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \oiint_{\Sigma} dS = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Le flux sortant de la sphère du champ électrostatique créé par une charge située en son centre est indépendant du rayon et vaut $\frac{Q}{\epsilon_0}$.

Remarque :

Résultat valable si charge plus au centre de la sphère, mais néanmoins à l'intérieur de celle-ci.

Résultat valable si la surface n'est plus une sphère mais une surface fermée entourant la charge.

Si charge à l'extérieur de la surface fermée, le flux du champ électrostatique sortant sera nul.

5.3 Théorème de Gauss

Théorème de Gauss :

Le flux du champ électrostatique sortant d'une surface fermée Σ est égal au rapport de la charge intérieure à la permittivité du vide :

$$\oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} \quad (21)$$

Remarques :

On appelle **surface de Gauss** la surface fermée choisie pour appliquer le théorème de Gauss.

La charge intérieure Q_{int} comprend toutes les charges se trouvant dans la surface de Gauss.

Le théorème de Gauss s'utilisera quand la distribution de charge présente un haut degré de symétrie.

5.4 Théorème de Gauss pour la gravitation

Théorème de Gauss pour la gravitation:

Le flux du champ de gravité sortant d'une surface fermée Σ est égal au rapport de la masse intérieure par la constante $-4\pi G$:

$$\oiint_{\Sigma} \vec{G} \cdot d\vec{S} = -4\pi G M_{\text{int}} \quad (22)$$

On peut répertorier les analogies entre champ électrostatique et champ de gravitation dans le tableau suivant :

Champ électrique	Champ de gravitation
Force de Coulomb : $\vec{F}_{1/2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{u}_{12}$	Force gravitationnelle : $\vec{F}_{1/2} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{u}_{12}$
Charge : q	Masse : m
Constante : $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$	Constante : $-G$
Champ électrique : $\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \vec{u}_r$	Champ de gravitation : $\vec{G}(M) = -G \frac{M}{r^2} \vec{u}_r$
Théorème de Gauss : $\oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$	Théorème de Gauss : $\oiint_{\Sigma} \vec{G} \cdot d\vec{S} = -4\pi G M_{\text{int}}$

6 Distributions à haut degré de symétrie

6.1 Méthode de résolution

Méthode de résolution (en utilisant le théorème de Gauss) :

- 1- Rechercher les symétries et invariances.
- 2- Choisir la surface fermée de Gauss
- 3- Calcul du champ électrostatique

6.2 Sphère uniformément chargée en volume

On considère une sphère de centre O et de rayon R contenant une densité volumique de charge uniforme ρ_0 . On désire établir l'expression du champ électrostatique créé en tout point de l'espace.

On se place dans une base sphérique.

6.2.1 Symétries et invariances

Symétries :

Les plans passant par le centre de la sphère et par le point $M(r, \varphi, \theta)$ sont des plans de symétrie de la distribution de charges. Le champ électrique sera donc compris dans l'intersection de ces deux plans : $\vec{E} = E(M)\vec{u}_r$

Invariances :

La distribution de charge est invariante par rotation selon φ et θ , d'où : $\vec{E} = E(r, \varphi, \theta)\vec{u}_r = E(r)\vec{u}_r$

6.2.2 Surface de Gauss

On choisit une sphère de centre O et de rayon r, pour respecter les symétries du problème et passer par le point M.

On remarque en effet que :

- le champ électrique étant radial, il sera normal à la sphère en tout point
- le champ ne dépendant que de r, sa valeur sera uniforme sur toute la sphère

6.2.3 Théorème de Gauss

Calcul du flux : $\oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oiint_{\Sigma} E(r)\vec{u}_r \cdot dS\vec{u}_r = \oiint_{\Sigma} E(r)dS = E(r)\oiint_{\Sigma} dS = E(r)4\pi r^2$

Calcul de la charge intérieure :
$$\begin{cases} r \leq R & Q_{\text{int}} = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_0 \\ r > R & Q_{\text{int}} = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_0 \end{cases}$$

On en déduit pour le champ électrostatique :
$$\begin{cases} r \leq R & \vec{E} = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} r\vec{u}_r \\ r > R & \vec{E} = \frac{\rho_0 R^3}{3\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r \end{cases}$$

6.2.4 Graphe du champ électrostatique

Il présente deux portions :

- une évolution linéaire partant de O et croissant jusqu'à $r=R$
- une décroissance en $1/r^2$ de $r=R$ à l'infini

Remarque :

Dans le cas $r > R$, le champ électrostatique peut aussi s'écrire : $\vec{E} = \frac{Q_{\text{int}}}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$

Le champ électrostatique créé à l'extérieur d'une distribution à symétrie sphérique est le même que celui d'une charge ponctuelle concentrant la charge totale et placée au centre de la distribution.

6.3 Cylindre « infini » uniformément chargé en volume

On considère un cylindre infini d'axe Oz et de rayon R contenant une densité volumique de charge uniforme ρ_0 . On désire établir l'expression du champ électrostatique créé en tout point de l'espace.

On se place dans une base cylindrique.

6.3.1 Symétries et invariances

Symétries :

Le plan contenant l'axe du cylindre et le plan perpendiculaire à l'axe du cylindre passants par le point M sont des plans de symétrie de la distribution de charges. Le champ électrique sera donc compris dans l'intersection de ces deux plans : $\vec{E} = E(M)\vec{u}_r$

Invariances :

La distribution de charge est invariante par translation le long de l'axe du cylindre et par rotation autour du même axe, d'où : $\vec{E} = E(r, \theta, z)\vec{u}_r = E(r)\vec{u}_r$

6.3.2 Surface de Gauss

On choisit un cylindre fermé d'axe Oz, de rayon r et de hauteur h, pour respecter les symétries du problème et passer par le point M.

On remarque en effet que :

- le champ électrique étant radial, il sera normal à la surface latérale du cylindre fermé en tout point et perpendiculaire à la normale des surfaces transversales du cylindre
- le champ ne dépendant que de r, sa valeur sera uniforme sur la surface latérale du cylindre fermé

6.3.3 Théorème de Gauss

Calcul du flux :

$$\oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_{\text{latérale}} E(r)\vec{u}_r \cdot dS\vec{u}_r + \iint_{\text{transversales}} E(r)\vec{u}_r \cdot dS\vec{u}_z = \iint_{\text{latérale}} E(r)dS = E(r) \iint_{\text{latérale}} dS = E(r)2\pi rh$$

Calcul de la charge intérieure :

$$\begin{cases} r \leq R & Q_{\text{int}} = \pi r^2 h \rho_0 \\ r > R & Q_{\text{int}} = \pi R^2 h \rho_0 \end{cases}$$

On en déduit pour le champ électrostatique :

$$\begin{cases} r \leq R & \vec{E} = \frac{\rho_0}{2\epsilon_0} r \vec{u}_r \\ r > R & \vec{E} = \frac{\rho_0 R^2}{2\epsilon_0 r} \vec{u}_r \end{cases}$$

6.3.4 Graphe du champ électrostatique

Il présente deux portions :

- une évolution linéaire partant de 0 et croissant jusqu'à r=R
- une décroissance en 1/r de r=R à l'infini

6.4 Plan « infini » uniformément chargé en surface

On considère un plan infini assimilé à xOy contenant une densité surfacique de charge uniforme σ_0 .

On désire établir l'expression du champ électrostatique créé en tout point de l'espace.

On se place dans une base cartésienne.

6.4.1 Symétries et invariances

Symétries :

Les plans contenant l'axe Oz et passant par le point M (xMz et yMz) sont des plans de symétrie de la distribution de charges. Le champ électrique sera donc compris dans l'intersection de ces deux plans : $\vec{E} = E(M)\vec{u}_z$

Invariances :

La distribution de charge est invariante par translation selon x et y, d'où : $\vec{E} = E(x, y, z)\vec{u}_z = E(z)\vec{u}_z$

Parité :

De plus, le plan contenant la distribution de charge (xOy) est un plan de symétrie de la distribution de charge. Le champ électrostatique sera donc symétrique par rapport à ce plan. Donc pour $M(x, y, z)$ et $M'(x, y, -z)$, le champ électrostatique sera : $E(-z) = -E(z)$

La fonction est impaire.

6.4.2 Surface de Gauss

On choisit un cylindre d'axe Oz, de rayon R et de hauteur h fermé par des disques aux côtes z et -z ($h=2z$), pour respecter les symétries du problème et passer par le point M.

On remarque en effet que :

- le champ électrique étant Oz, il sera normal aux disques et perpendiculaire à la normale des surfaces transversales du cylindre
- le champ ne dépendant que de z, sa valeur sera uniforme sur le disque se trouvant en z

6.4.3 Théorème de Gauss

Calcul du flux :

$$\begin{aligned} \oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} &= \iint_{\text{latérale}} E(z)\vec{u}_z \cdot dS\vec{u}_r + \iint_{\text{disque}(z)} E(z)\vec{u}_z \cdot dS\vec{u}_z + \iint_{\text{disque}(-z)} E(-z)\vec{u}_z \cdot dS(-\vec{u}_z) \\ &= \iint_{\text{disque}(z)} E(z) \cdot dS + \iint_{\text{disque}(-z)} E(z) \cdot dS = 2E(z) \iint_{\text{disque}(z)} dS = 2E(z)\pi R^2 \quad \text{pour } z > 0 \end{aligned}$$

Calcul de la charge intérieure : $Q_{\text{int}} = \pi R^2 \sigma_0$

On en déduit pour le champ électrostatique : $\vec{E} = \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \vec{u}_z \quad \text{pour } z > 0 \Rightarrow \vec{E} = -\frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \vec{u}_z \quad \text{pour } z < 0$

6.4.4 Graphe du champ électrostatique

L'étude précédente fait apparaître une discontinuité en $z = 0$ telle que : $\vec{E}(z = 0^+) - \vec{E}(z = 0^-) = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} \vec{u}_z$

Cette discontinuité se retrouvera à chaque fois que l'on aura une distribution surfacique de charges.

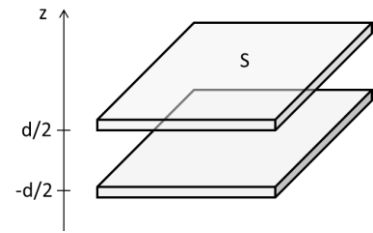
7 Étude du condensateur plan

7.1 Description

Un condensateur plan est constitué de deux armatures conductrices qui se font face. Ici, on supposera que ce sont des carrés d'axe Oz et d'aire S séparés par une distance d, appelée écartement.

Lorsque ce composant est branché sur un générateur, qui impose une différence de potentiel U entre les deux armatures, un champ électrique apparaît dans l'espace inter-armatures.

On suppose ici que l'écartement est très faible devant les dimensions latérales, ce qui revient à supposer deux plans infinis chargés en surface aux niveaux des armatures.



7.2 Champ électrique entre les armatures

7.2.1 Potentiel des armatures

La différence de potentiel étant de U entre les armatures, avec :

- électrode en $z = d/2$ au potentiel $U/2$
- électrode en $z = -d/2$ au potentiel $-U/2$

On suppose ainsi que le potentiel électrostatique est nul en $z = 0$.

7.2.2 Distribution de charges sur les armatures

Les charges se trouvant sur les deux armatures sont de signes opposés : σ la densité surfacique de charge sur l'armature supérieure et $-\sigma$ la densité surfacique de charge sur l'armature inférieure.

7.2.3 Symétries et invariances

Ce sont les mêmes que celles du plan infini chargé surfaciquement, soit : $\vec{E} = E(z)\vec{u}_z$

7.2.4 Champ électrostatique

On utilise le principe de superposition pour trouver le champ électrique total entre les deux armatures :

$$\text{L'armature supérieure crée le champ : } \begin{cases} \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_z & \text{pour } z > \frac{d}{2} \\ \vec{E}_1 = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_z & \text{pour } z < \frac{d}{2} \end{cases}$$

$$\text{L'armature inférieure crée le champ : } \begin{cases} \vec{E}_2 = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_z & \text{pour } z > -\frac{d}{2} \\ \vec{E}_2 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_z & \text{pour } z < -\frac{d}{2} \end{cases}$$

$$\text{Soit finalement : } \begin{cases} \vec{E} = \vec{0} & \text{pour } z > \frac{d}{2} \\ \vec{E} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_z & \text{pour } -\frac{d}{2} < z < \frac{d}{2} \\ \vec{E} = \vec{0} & \text{pour } z < -\frac{d}{2} \end{cases}$$

7.3 Capacité du condensateur

Différence de potentiel entre les deux armatures : $U = V\left(\frac{d}{2}\right) - V\left(-\frac{d}{2}\right) = \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{\sigma d}{\epsilon_0} = Ed$

Or, la capacité d'un condensateur est définie par : $C = \frac{Q}{U}$ avec Q : charge portée par l'armature supérieure telle que $Q = \sigma S$

Propriété :

Dans un condensateur plan, la capacité est égale à : $C = \frac{\epsilon_0 S}{d}$

7.4 Aspect énergétique

Un condensateur emmagasine une énergie électrique égale à : $U_E = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} CU^2$

Si on remplace par les expressions précédentes : $U_E = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 S}{d} E^2 d^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 S d E^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 V E^2$

On en déduit que dans le cas d'un condensateur plan, la densité volumique d'énergie est donnée

par : $u_E = \frac{dU_E}{dV} = \frac{\epsilon_0}{2} E^2$

8 Topographie du champ électrostatique

8.1 Définitions

Définitions :

Le champ électrique est tangent à des courbes appelées **lignes de champ** qui sont orientées dans le sens du champ.

Un **tube de champ** est formé par un ensemble de lignes de champ qui s'appuyant sur un contour fermé.

Une **surface équipotentielle** est une surface formée d'un ensemble de points aux même potentiel.

8.2 Propriétés

8.2.1 Issue de la relation entre champ et potentiel électrostatique

Propriété :

La relation entre champ et potentiel électrostatique $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V$ montre que :

- le champ électrique est orienté vers les potentiels décroissants.
- le champ électrique est perpendiculaire en tout point à une surface équipotentielle

Conséquence :

Si une ligne de champ relie une point A à un point B et est orienté de A vers B alors $V_B < V_A$.

Une ligne de champ électrostatique ne peut donc pas être fermée sur elle-même.

Les lignes de champ sont perpendiculaires aux surfaces équipotentielles.

A écart de potentiel constant entre deux surfaces équipotentielles successives, un resserrement des surfaces équipotentielles s'interprète comme une intensification du champ électrique.

Remarque :

Même raisonnement qu'en conduction thermique

8.2.2 Issue du théorème de Gauss

Soit un point M où se trouve un maximum du potentiel, alors les lignes de champ sont orientées vers l'extérieur et d'après le théorème de Gauss, la charge contenue dans la sphère autour de ce point est positive.

Propriété :

Donc en un point M où le potentiel a un maximum relatif, se trouve une charge positive et inversement pour un minimum relatif et une charge négative.

8.2.3 Conservation du flux en un lieu vide de charge

On considère un tube de champ délimité par les sections S_1 , S_2 et la surface latérale S_{lat} . On suppose que le champ électrostatique est uniforme sur les sections S_1 et S_2 . Aucune charge ne se trouve dans cette zone de l'espace.

$$\text{Flux du champ : } \oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \vec{dS} = \iint_{S_1} \vec{E}_1 \cdot \vec{dS} + \iint_{S_2} \vec{E}_2 \cdot \vec{dS} + \iint_{S_{\text{lat}}} \vec{E} \cdot \vec{dS} = -S_1 E_1 + S_2 E_2 = 0$$

$$\text{On a alors : } \frac{E_1}{E_2} = \frac{S_2}{S_1}$$

Si les lignes de champ se resserrent alors $S_2 < S_1 \Rightarrow E_1 < E_2$ et le champ électrique est alors plus intense.

Remarque :

Même raisonnement en mécanique des fluides avec le débit volumique

8.2.4 Intersection de lignes de champ

Correspond à deux cas singuliers :

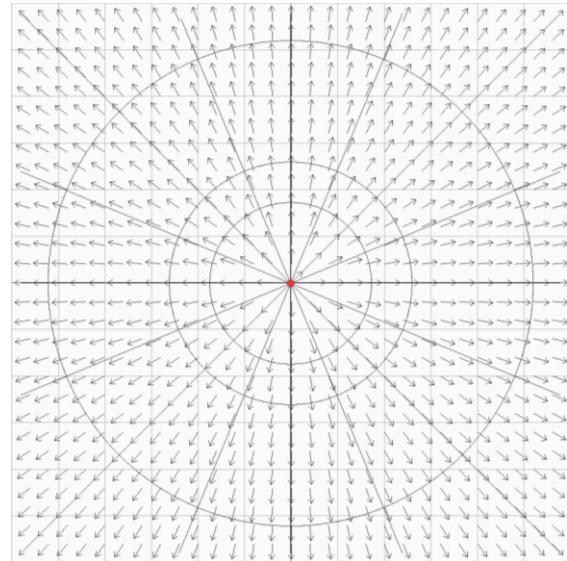
- point où se trouve une charge ponctuelle, puisque le potentiel γ est extrémal
- point où le champ est nul, seul vecteur à pouvoir avoir plusieurs directions

8.3 Exemples

8.3.1 Charge ponctuelle positive

Observations :

- les lignes de champ sont radiales : cohérent avec les symétries et invariances
- les lignes de champ sont orientées du centre vers la périphérie : charge positive en O, potentiel maximum en O
- les lignes de champ sont perpendiculaires aux équipotentiellles
- les lignes de champ sont plus resserrées au voisinage de la charge : le champ γ est plus intense
- les surfaces équipotentiellles sont plus resserrées au voisinage de la charge : le champ γ est plus intense



8.3.2 Charge opposées symétriques

Observations :

- les lignes de champ présentent une antisymétrie par rapport au plan entre les deux charges et une symétrie par rapport au plan contenant les deux charges
- les lignes de champ sont orientées de la charge positive vers la charge négative
- les lignes de champ sont perpendiculaires aux équipotentiellles
- les lignes de champ sont plus resserrées au voisinage des charges : le champ γ est plus intense
- les surfaces équipotentiellles sont plus resserrées au voisinage des charges : le champ γ est plus intense

