Éléments de statique des fluides dans un référentiel galiléen

Hypothèses : régime stationnaire, référentiel galiléen, base cartésienne

Système fermé : particule de fluide centrée sur le point $M(x,y,z)$ de volume $dV = dxdydz$, de masse $dm = \mu(M)dV$

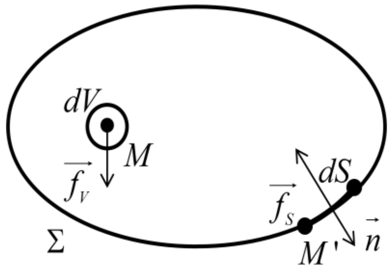
Sujet : étude du champ de pression $P(M)$

1 Forces au sein d'un fluide au repos

Soit la surface fermée Σ, les actions mécaniques se décomposent en deux types de forces :

Forces volumiques : actions à distance de longue portée

La force $\overrightarrow{dF_V}$ élémentaire exercée sur l'élément de volume dV s'exprime en fonction de la densité volumique de force $\overrightarrow{f_V}$ (N.m^{-3}) par : $\overrightarrow{dF_V} = \overrightarrow{f_V}(M)dV$



Forces surfaciques : actions à plus courte portée

La force $\overrightarrow{dF_S}$ élémentaire exercée sur l'élément de surface dS s'exprime en fonction de la densité surfacique de force $\overrightarrow{f_S}$ (N.m^{-2}) par : $\overrightarrow{dF_S} = \overrightarrow{f_S}(M')dS$

Exemple : - le poids : $\overrightarrow{f_V}_{\,pesanteur} = \dfrac{\overrightarrow{dF_V}}{dV} = \dfrac{dm\vec{g}}{dV} = \mu\vec{g}$ avec μ la masse volumique du fluide

- les forces de pression : $\overrightarrow{f_S}_{\,pression} = \dfrac{\overrightarrow{dF_S}}{dS} = \dfrac{-P(M)dS\vec{n}}{dS} = -P(M)\vec{n}$

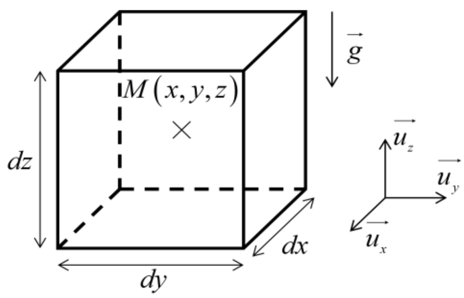
2 Relation de statique des fluides

Bilan des forces :

Force de pesanteur : $\overrightarrow{dF_V} = dm\vec{g} = -\mu(M)gdV\overrightarrow{u_z}$

Forces de pression:

$$\overrightarrow{dF_S} = \begin{pmatrix} \left(P\left(x-\frac{dx}{2},y,z\right) - P\left(x+\frac{dx}{2},y,z\right)\right)dydz\overrightarrow{u_x} \\ \left(P\left(x,y-\frac{dy}{2},z\right) - P\left(x,y+\frac{dy}{2},z\right)\right)dxdz\overrightarrow{u_y} \\ \left(P\left(x,y,z-\frac{dz}{2}\right) - P\left(x,y,z+\frac{dz}{2}\right)\right)dxdy\overrightarrow{u_z} \end{pmatrix}$$



Principe fondamental de la dynamique : $\overrightarrow{dF_V} + \overrightarrow{dF_S} = \vec{0}$

Projection sur les axes : $\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial x}(x,y,z) = 0 \\ \dfrac{\partial P}{\partial y}(x,y,z) = 0 \\ \dfrac{dP}{dz}(z) = -\mu(z)g \end{cases}$ => la pression est indépendant des coordonnées x et y

Si le champ de pesanteur est noté $\vec{g} = -g\vec{u_z}$, alors un fluide au repos dans un référentiel galiléen possède une pression P ne dépendant que de la coordonnée cartésienne z par la loi, appelée **relation de statique des fluides** :

$$\frac{dP}{dz} = -\mu g \qquad (1)$$

Remarques :

La pression diminue avec l'altitude (atmosphère) ou augmente avec la profondeur (océan).

Si l'axe (Oz) est descendant, la relation devient : $\frac{dP}{dz} = \mu g$

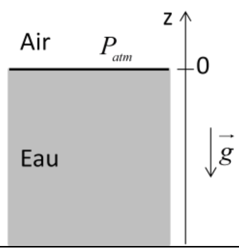
3 Exemples

Cas d'un fluide incompressible et homogène :

Hypothèses : Pression à la surface de l'eau P_{atm} et on oriente l'axe (Oz) vers le haut

Dans un fluide incompressible et homogène, la pression augmente avec la profondeur selon la relation :

$$P(z) = P_{atm} - \mu g z$$



Cas de l'atmosphère isotherme dans le modèle du gaz parfait :

Hypothèses : Fluide compressible, l'atmosphère est à la température uniforme T_0, pression à l'altitude z = 0 P_{atm} et on oriente l'axe (Oz) vers le haut

La masse volumique dépendant de la pression, avec la relation des gaz parfaits : $\mu = \frac{m}{V} = \frac{PM}{RT_0}$

Relation de statique des fluides : $\frac{dP}{P} = -\frac{Mg}{RT_0}dz$ intégrée entre l'altitude z = 0 du sol et l'altitude z :

$$P(z) = P_{atm} \exp\left(-\frac{Mg}{RT_0}z\right)$$

Dans le cas de l'atmosphère isotherme dans le modèle du gaz parfait, la pression diminue avec l'altitude selon la relation :

$$P(z) = P_{atm} \exp\left(-\frac{z}{H}\right) \quad avec \quad H = \frac{RT_0}{Mg}$$

Comparaison des deux modèles :

Lorsque la variation d'altitude est très faible :

$P(z) = P_{atm} \exp\left(-\frac{Mg}{RT_0}z\right) \simeq P_{atm} - \frac{P_{atm}M}{RT_0}gz \simeq P_{atm} - \mu(z=0)gz$ => Cohérence entre les deux modèles