Magnétostatique

1 Distributions de courants électriques

1.1 Courant et intensité électrique

Définition :
L'intensité I du courant électrique à travers une surface S est liée à la charge dq qui traverse S entre les instants t et t + dt. Elle dépend de l'orientation de S. Elle s'exprime en ampère (A).

$$dq = Idt \quad (1)$$

1.2 Vecteur densité de courant volumique

On considère un ensemble de particules de charge q, de densité volumique n et animées d'un mouvement d'ensemble de vitesse $\vec{v}$. La densité volumique de charges mobiles est notée : $\rho_m = nq$.

Définition :
Le vecteur densité de courant volumique $\vec{j}$ associé à un mouvement d'ensemble à vitesse $\vec{v}$ est :

$$\vec{j} = qn\vec{v} = \rho_m \vec{v} \quad (2)$$

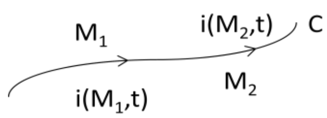
Définition :
L'intensité du courant électrique traversant une surface S est égale au flux du vecteur densité de courant volumique $\vec{j}(M,t)$ (A.m^{-2}) à travers cette surface.

$$I = \iint_S \vec{j}(M,t) \cdot \overrightarrow{dS} \quad (3)$$

1.3 Distributions de courants électriques filiformes

Un fil conducteur de faible section à l'échelle macroscopique peut être assimilé à une courbe C (sans épaisseur).

La flèche tracée indique l'orientation du vecteur unitaire normal à une section du fil.

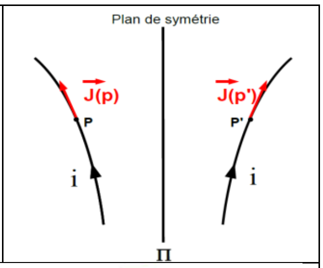


Remarques :
En régime permanent, la charge mobile étant uniformément répartie dans le conducteur et ne pouvant s'accumuler en aucun point du fil, nous pouvons en déduire les propriétés suivantes :
- un courant filiforme ne peut exister que sur un circuit fermé
- l'intensité i a la même valeur en tout point d'un fil sans dérivation.

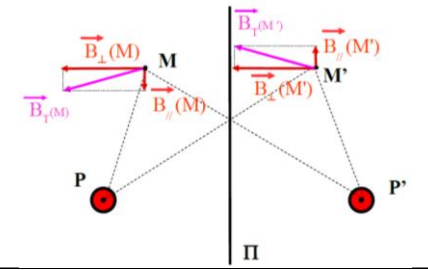
2 Symétries et invariances du champ magnétostatique

2.1.1 Plan de symétrie

Définition :
Une distribution de courant possède un plan de symétrie Π si :
- Π est un plan de symétrie géométrique de la distribution
- si tout point P de la distribution a une image P' appartenant à la distribution $\vec{j}(P')=sym\left[\vec{j}(P)\right]$



Propriété :
Si le plan Π est **plan de symétrie** de la distribution de courant, alors ce plan est un **plan d'antisymétrie pour le champ magnétostatique** :
- les composantes parallèles au plan sont opposées
- les composantes orthogonales au plan sont égales.



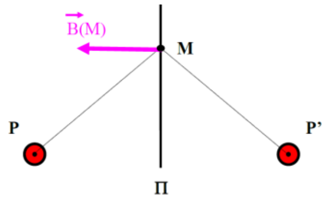
Conséquence :

Si M appartient au plan de symétrie Π, alors :

$$M=M' \quad \Rightarrow \quad \vec{B}_{\|}(M)=-\vec{B}_{\|}(M')=\vec{0}$$

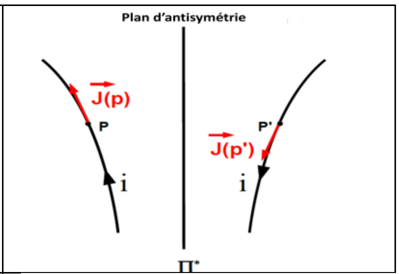
Le champ magnétique est perpendiculaire au plan de symétrie Π :

$$\vec{B}(M)\perp\Pi$$

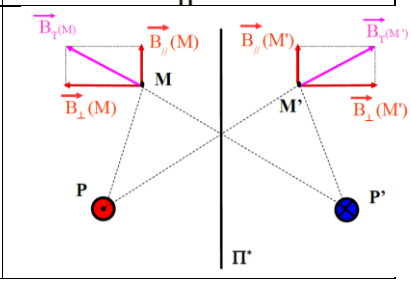


2.1.2 Plan d'antisymétrie

Définition :
Une distribution de courant possède un plan d'antisymétrie Π* si :
- Π* est un plan de symétrie géométrique de la distribution
- si tout point P de la distribution a une image P' appartenant à la distribution $\vec{j}(P')=-sym\left[\vec{j}(P)\right]$



Propriété :
Si le plan Π* est **plan d'antisymétrie** de la distribution de courant, alors ce plan est un **plan de symétrie pour le champ magnétostatique** :
- les composantes parallèles au plan sont égales
- les composantes orthogonales au plan sont opposées.



Conséquence :

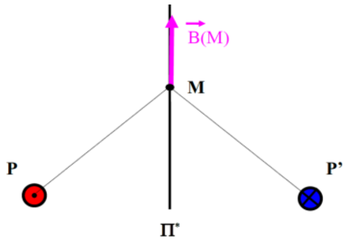
Si M appartient au plan d'antisymétrie Π*, alors : $M=M' \;\Rightarrow\; \vec{B}_{\perp}(M)=-\vec{B}_{\perp}(M')=\vec{0}$

Le champ magnétique appartient au plan d'antisymétrie Π* : $\vec{B}(M)\,\|\,\Pi*$

Si M appartient au plan d'antisymétrie Π*, alors :

$$M=M' \quad \Rightarrow \quad \vec{B}_{\perp}(M)=-\vec{B}_{\perp}(M')=\vec{0}$$

Le champ magnétique appartient au plan d'antisymétrie Π* : $\vec{B}(M)\,\|\,\Pi*$



2.1.3 Symétrie du champ magnétostatique

Le champ magnétostatique a des propriétés de symétrie opposées à celle de la distribution de courants.

Remarques :

Le champ magnétique a les propriétés de symétrie d'un **vecteur axial** ou « **pseudo-vecteur** ».

Pour trouver la direction du champ magnétostatique en un point M, on cherchera donc les plans de symétrie et d'anti-symétrie de la distribution de courants contenant le point M.

On dit qu'une distribution de charges présente un haut degré de symétrie si l'étude des propriétés de symétries de la distribution permet de connaître la direction du champ magnétostatique en tout point de l'espace.

2.2 Invariances de la distribution de courants

Définition :

Une distribution de courants est invariante par translation lorsque l'image de la distribution par la translation est la distribution elle-même.

Si la distribution de courants est invariante par translation selon un axe, le champ l'est aussi : il ne dépend donc pas de la coordonnée le long de cet axe.

Définition :

L'invariance par rotation correspond au cas où la distribution obtenue après rotation se superpose rigoureusement avec la distribution initiale que ce soit en position dans l'espace ou en valeur locale de la densité de courants.

Si la distribution de courants est invariante par rotation autour d'un axe, le champ l'est aussi : il ne dépend donc pas de la coordonnée angulaire qui définit la rotation autour de cet axe.

3 Propriétés du champ magnétique

3.1 Flux du champ magnétique

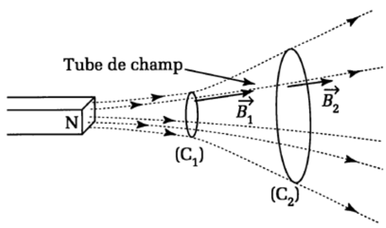
Propriété :

Le flux du champ magnétique ϕ (en Weber : Wb = T.m^2) à travers une surface fermée est nul. On dit que le champ magnétique est à **flux conservatif**.

$$\phi = \oiint_S \vec{B} \cdot \vec{dS} = 0 \qquad (4)$$

Conséquences :

Le flux du champ magnétique garde la même valeur à travers toutes les sections d'un même tube de champ. Il s'évase en se dirigeant vers les champs faibles.



3.2 Circulation du champ magnétique

Exemple : Fil rectiligne illimité de direction Oz

Le champ magnétique généré par ce fil se met sous la forme : $\vec{B}(M) = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}\vec{e_\theta}$

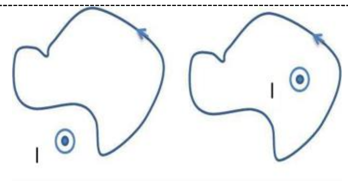
La circulation du champ magnétique sur un circuit fermé Γ est donnée par l'expression suivante :

$$\oint_\Gamma \vec{B} \cdot \vec{dl} = \oint_\Gamma \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\vec{e_\theta} \cdot \left(dr\vec{e_r} + rd\theta\vec{e_\theta} + dz\vec{e_z} \right) = \oint_\Gamma \frac{\mu_0 I}{2\pi r} rd\theta = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\oint_\Gamma d\theta$$

On peut distinguer deux cas :

Le circuit n'entoure pas le fil : $\oint_\Gamma d\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad C = 0$

Le circuit entoure le fil : $\oint_\Gamma d\theta = 2\pi \quad \Rightarrow \quad C = \mu_0 I$



3.3 Théorème d'Ampère

Théorème d'Ampère :
La circulation du champ magnétostatique créé par un ensemble de courants sur un contour fermé orienté est égale à la somme algébrique des courants enlacés I_{int} multipliée par μ_0 :

$$\oint_\Gamma \vec{B} \cdot \vec{dl} = \mu_0 I_{\text{int}} \qquad (5)$$

Remarque :
I_{int} correspond à la somme algébrique de toutes les intensités intérieures à Γ (ou enlacées par Γ). L'intensité est comptée positivement si elle traverse Γ dans le sens positif ou direct (règle du tire-bouchon).

3.4 Ordres de grandeur

Dispositif	B (T)
Champ magnétique terrestre, en surface	$0,47.10^{-5}$
Champ créé à 1 cm d'un fil rectiligne parcouru par 10 A	2.10^{-5}
Champ créé à 1 mm d'un aimant permanent	0,1 à 1
Electroaimant	10 à 100
Etoile à neutrons, en surface	10^{11}

4 Distributions à haut degré de symétrie

4.1 Méthode de résolution

Méthode de résolution (en utilisant le théorème d'Ampère) :

1- Rechercher les symétries et invariances.
2- Choisir le contour orienté et fermé d'Ampère
3- Calcul du champ magnétostatique

4.2 Fil rectiligne infini parcouru par un courant I

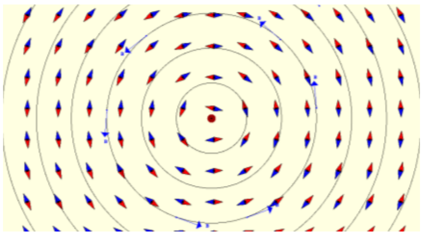
On considère un fil rectiligne infini confondu avec l'axe Oz et parcouru par un courant I. Le courant et l'axe Oz sont orientés dans le même sens. Le point M(r, θ, z) est repéré par ses coordonnées cylindriques.
Modélisation d'une situation courante : fil quelconque parcouru par un courant permanent qui créé un champ magnétique en un point M voisin du fil

4.2.1 Symétrie et invariance

Symétries :
Tous les plans contenant le fil et le point M sont plans de symétrie (Π) de la distribution de courant
Le champ magnétique est perpendiculaire aux plans de symétrie : $\vec{B} = B(r,\theta,z)\vec{u_\theta}$

Invariances :

La distribution de courants étant invariante par translation selon z et rotation selon θ, on a : $\vec{B} = B(r)\overrightarrow{u_\theta}$

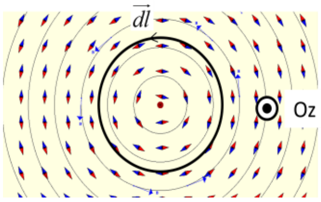


Les lignes de champ sont orthoradiales. Ce sont des cercles d'axe Oz.

4.2.2 Théorème d'Ampère

4.2.2.1 Contour d'Ampère

On choisit un cercle d'axe Oz et de rayon r parcouru dans le sens trigonométrique.



4.2.2.2 Calcul du champ magnétostatique

$$\oint_\Gamma \vec{B}\cdot\overrightarrow{dl} = \oint_\Gamma B(r)\overrightarrow{e_\theta}\cdot rd\theta\overrightarrow{e_\theta} = B(r)\int_0^{2\pi} rd\theta = 2\pi rB(r) \quad et \quad I_{\text{int}} = +I$$

D'après le théorème d'Ampère : $2\pi rB(r) = \mu_0 I \quad \Rightarrow \quad \vec{B} = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}\overrightarrow{e_\theta}$

4.3 Cylindre parcouru par un courant volumique

Un cylindre infini de rayon R et d'axe Oz est parcouru par une un courant volumique $\vec{j} = j_z\overrightarrow{u_z}$ ($j_z > 0$) uniforme. On cherche à déterminer le champ magnétique en tout point.

4.3.1 Symétrie et invariance

<u>Symétries</u> :

Le plan contenant l'axe Oz et le point M est plan de symétrie de la distribution de courant.

<u>Invariances</u> :

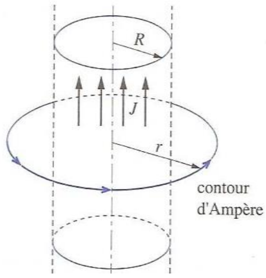
La distribution de courants étant invariante par translation selon z et rotation selon θ, on a :

$$\vec{B} = B(r)\overrightarrow{u_\theta}$$

4.3.2 Théorème d'Ampère

4.3.2.1 Contour d'Ampère

On choisit un cercle d'axe Oz et de rayon r parcouru dans le sens trigonométrique.



4.3.2.2 Calcul du champ magnétostatique

$$\oint_\Gamma \vec{B}\cdot\overrightarrow{dl} = \oint_\Gamma B(r)\overrightarrow{u_\theta}\cdot rd\theta\overrightarrow{u_\theta} = B(r)\int_0^{2\pi} rd\theta = 2\pi rB(r)$$

Pour déterminer les courants enlacés par le contour d'Ampère, on distingue deux cas :

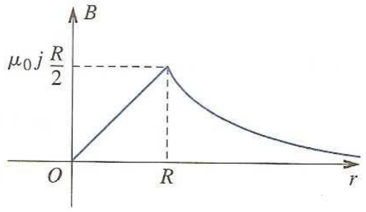
- r > R : le courant enlacé par le contour ne dépend pas de r. $I_{\text{int}} = \iint \vec{j} \cdot \overrightarrow{dS} = j_z \pi R^2$

D'après le théorème d'Ampère : $2\pi r B(r) = \mu_0 j_z \pi R^2 \quad \Rightarrow \quad \vec{B} = \dfrac{\mu_0 j_z R^2}{2r} \overrightarrow{u_\theta}$

- r < R : le courant enlacé par le contour dépend de r.

$$I_{\text{int}} = \iint \vec{j} \cdot \overrightarrow{dS} = \int_0^r \int_0^{2\pi} j_z \overrightarrow{e_z} \cdot r dr d\theta \overrightarrow{e_z} = j_z \pi r^2$$

D'après le théorème d'Ampère : $2\pi r B(r) = \mu_0 j_z \pi r^2 \quad \Rightarrow \quad \vec{B} = \dfrac{\mu_0 j_z r}{2} \overrightarrow{u_\theta}$



4.4 Solénoïde « infini » circulaire parcouru par un courant I

On considère un solénoïde d'axe Oz et de centre O est de taille infinie. Le solénoïde est constitué de spires jointives enroulées sur un cylindre : soit R son rayon et n son nombre de spires par unité de longueur. Il est parcouru par un courant d'intensité I. Nous calculons ici le champ en tout point intérieur au solénoïde. Le point M(r, θ, z) est repéré par ses coordonnées cylindriques.
Modélisation d'une situation courante : champ magnétique créé dans une bobine
Hypothèse supplémentaire : le champ magnétostatique est nul à l'extérieur du solénoïde

4.4.1 Symétrie et invariance

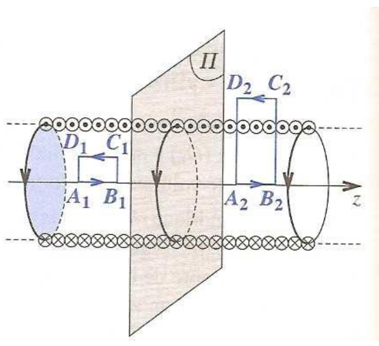
Symétries :
Tout plan perpendiculaire à l'axe Oz et contenant le point M est plan de symétrie de la distribution de courants.
Invariances :
La distribution de courants étant invariante par translation selon z et rotation selon θ, on a :

$$\vec{B} = B(r)\overrightarrow{u_z}$$

4.4.2 Théorème d'Ampère

4.4.2.1 Contour d'Ampère

Le contour d'Ampère permettant de déterminer l'expression du champ magnétique est un cadre ABCD dont un des côtés est placé sur l'axe Oz, de longueur l selon Oz.



4.4.2.2 Calcul du champ magnétostatique

La circulation sur les contours BC et DA est nulle car le champ magnétique est perpendiculaire du déplacement.

$$\oint_{\Gamma} \vec{B}\cdot\vec{dl} = \oint_{\Gamma} B(r)\vec{u_z}\cdot dz\vec{u_z} = B(r=0)\int_A^B dz - B(r)\int_C^D dz = l\left(B(r=0)-B(r)\right)$$

Pour déterminer les courants enlacés par le contour d'Ampère, on distingue deux cas :

- r < R : le cadre est à l'intérieur du solénoïde ($A_1B_1C_1D_1$).

Il n'y a pas de courants enlacés et la circulation est donc nulle. D'après le théorème d'Ampère, en tout point intérieur au solénoïde : $B\ (r=0)-B(r)=0 \quad\Rightarrow\quad B(r)=B(r=0)$

- r > R : le cadre chevauche le solénoïde ($A_2B_2C_2D_2$). $I_{\text{int}} = \int_0^l nIdz = nIl$

D'après le théorème d'Ampère, en tout point extérieur au solénoïde :

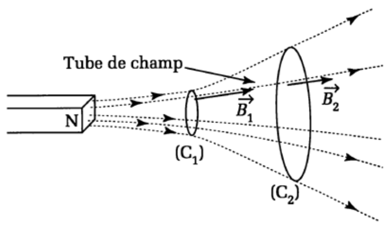
$$l\left(B(r=0)-B(r)\right)=\mu_0 nIl \quad\Rightarrow\quad B_z(r=0)=\mu_0 nI$$

Donc dans un solénoïde « infini » le champ magnétostatique est uniforme en tout point intérieur et égal à : $\vec{B}=\mu_0 nI\vec{u_z}$

5 Topographie du champ magnétostatique

5.1 Propriétés issues de la conservation du flux

Le flux du champ magnétique garde la même valeur à travers toutes les sections d'un même tube de champ. Il s'évase en se dirigeant vers les champs faibles.



Il est impossible de créer un champ magnétique ont les lignes de champ partiraient toutes d'un même point, puisque cela signifierait que le flux du champ magnétique qui entoure ce point est non nul.

Les lignes de champ magnétostatique ne divergent pas à partir de leur source (les courants) : elles « tourbillonnent » autour de cette source.

5.2 Propriétés issues du théorème d'Ampère

Un tire-bouchon qui tourne dans le sens du courant (respectivement sens des lignes de champ) progresse dans le sens du champ à l'intérieur du circuit (respectivement sens de l'intensité du courant).