

Electronique numérique

1 Echantillonnage

1.1 Définition

Définition :

L'échantillonnage est l'opération qui consiste à mesurer un signal en capturant des valeurs à intervalles réguliers.

L'intervalle de mesure s'appelle la période d'échantillonnage, T_e .

1.2 Explication qualitative à l'aide d'un stroboscope

Un stroboscope est un appareil qui émet des flashes de lumière très brefs. La fréquence de ces flashes peut être réglée. Dans le noir total, on pourra donc observer un mouvement pendant des instants très brefs. Pour pouvoir se rendre compte du mouvement, il faut cependant que la fréquence de ces flashes (cadence) soit correctement réglée.

Prenons un disque blanc sur lequel se trouve un secteur noir en rotation dans le sens horaire à une vitesse constante ω telle que $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$. On se place dans l'obscurité et on observe le disque à

chaque flash du stroboscope. La fréquence des flashes est notée $F_e = \frac{1}{T_e}$, aussi appelée fréquence d'échantillonnage.

Pour une fréquence $F_e = 8f$, on observe bien que le disque tourne dans le sens horaire et on peut de plus retrouver sa vitesse de rotation connaissant F_e .

Pour une fréquence $F_e = 2f$, il devient impossible de déterminer le sens de rotation. Cependant, on peut encore retrouver sa vitesse de rotation.

Pour une fréquence $F_e = \frac{4}{3}f$, le disque semble tourner dans le sens trigonométrique et il semble

faire un tour en $4T_e$, soit $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{4T_e} = 2\pi \frac{F_e}{4}$ au lieu de $\omega = 2\pi f = 2\pi \frac{3F_e}{4}$, soit une

vitesse trois fois plus faible que sa vitesse réelle.

On retrouve une condition déjà aperçue en première année. La condition de Nyquist-Shannon qui précise les conditions pour un bon échantillonnage : $F_e > 2f$.

1.3 Condition de Nyquist-Shannon

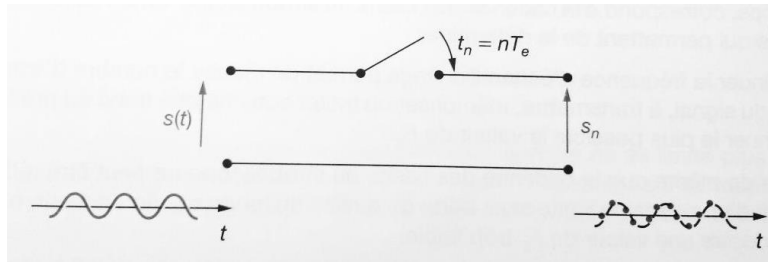
Critère de Shannon :

Un signal est correctement représenté à partir de ses échantillons, si la fréquence d'échantillonnage F_e est supérieure à deux fois la fréquence maximale $F_{\max}$ de son spectre.

$$F_e > 2F_{\max} \quad (1)$$

1.4 Echantillonnage d'un signal électronique

Comme rappelé en définition, on échantillonne un signal analogique $s(t)$ en prélevant sa valeur à intervalle régulier. On définit alors la période d'échantillonnage T_e et une suite d'instant $t_n = nT_e$ où n est un entier. La valeur de l'échantillon s_n correspond donc à : $s_n = s(t_n) = s(nT_e)$.

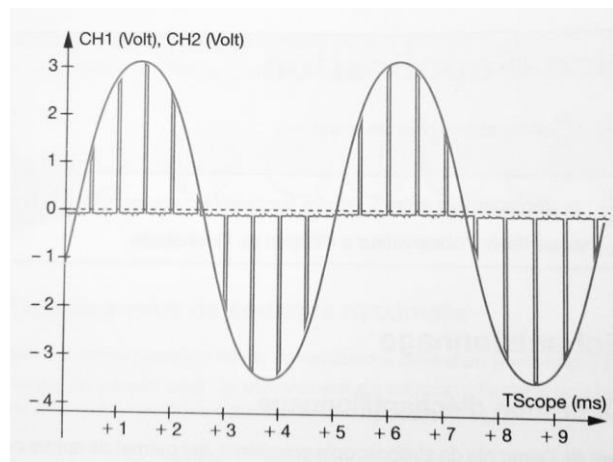


A l'aide de deux générateurs de signaux, on crée d'une part un signal sinusoïdal $s(t) = S_m \cos(\omega t + \varphi)$ de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$ et d'autre part un signal $p(t)$ formé d'impulsions périodiques de période T_e inférieur à T .

Un circuit multiplieur analogique permet d'effectuer à chaque instant t , le produit $s_e(t) = kp(t)s(t)$.

La multiplication de ces signaux engendre un signal $s_e(t)$:

- identique à $s(t)$ pendant les intervalles de durée τ où l'impulsion est présente,
- nul en dehors de ces intervalles de temps.



1.5 Réglage de la fréquence d'échantillonnage

En pratique, on cherchera :

- à la diminuer le plus possible, car cela permet de réduire le nombre d'échantillon et donc la quantité de signal à transmettre, mémoriser ou traiter ;
- à respecter la condition de Nyquist-Shannon pour ne pas perdre d'informations.

Cela se perçoit très bien en observant le spectre des deux signaux analogiques et échantillonnés.

1.5.1 Signal sinusoïdal

Prenons un premier signal sinusoïdal $s(t)$ de fréquence $f = 300$ Hz.

Ce signal est échantillonné à la fréquence $F_e = 2$ kHz. Le spectre est alors composé de raies avec :

- une raie à 300 Hz identique au signal initial
- les suivantes de fréquences 1700 Hz et 2300 Hz, soit $F_e - f$ et $F_e + f$
- d'autres raies autour des multiples de la fréquence F_e : $kF_e - f$ et $kF_e + f$ $k \in \mathbb{N}$

On pourra alors retrouver le signal analogique original en appliquant un filtrage passe-bas au signal échantillonné après sa transmission ou son traitement.

Si l'on diminue maintenant la valeur de la fréquence d'échantillonnage, les valeurs des raies suivantes à $F_e - f$ et $F_e + f$ se rapprochent de la raie à f .

Pour une valeur de $F_e = 2f$, on a alors deux raies confondues à la même fréquence et il n'est plus possible de reconstruire le signal.

Pour une valeur de $F_e < 2f$, la raie $F_e - f$ se retrouve à une fréquence inférieure à f . Il n'est non seulement plus possible de reconstruire le signal mais en plus les échantillons dessinent une sinusoïde de fréquence plus faible que celle du signal. Il y a perte d'information.

Le critère de Shannon n'est alors plus respecté. On dit qu'il y a **repliement de spectre**, c'est-à-dire que les raies spectrales répliquées autour de la fréquence F_e empiètent sur l'intervalle de fréquence $[0, f]$.

Cas particulier : lorsque $F_e = f$

La raie à la fréquence $F_e - f$ se trouve alors à une fréquence nulle. Elle correspond donc à une composante constante dans le temps. En effet, en prélevant des échantillons à la fréquence f , on obtient toujours la même valeur de la sinusoïde. On retrouve la même chose avec le stroboscope, la roue paraît alors immobile.

1.5.2 Signal polychromatique

Le signal $s(t)$ n'est plus sinusoïdal, son spectre comporte maintenant des harmoniques. On peut par exemple prendre un signal carré de fréquence $f = 200$ Hz.

Ce signal est échantillonné à la fréquence $F_e = 2$ kHz. Le spectre est alors composé de raies avec :

- une raie à 200 Hz, le fondamental
- d'autres raies autour des multiples de la fréquence F_e : $kF_e - f$ et $kF_e + f$ $k \in \mathbb{N}$

Mais aussi :

- une raie à la fréquence $3f = 600$ Hz, harmonique de rang 3
- d'autres raies autour des multiples de la fréquence F_e : $kF_e - 3f$ et $kF_e + 3f$ $k \in \mathbb{N}$
- une raie à la fréquence $5f = 1000$ Hz, harmonique de rang 5
- d'autres raies autour des multiples de la fréquence F_e : $kF_e - 5f$ et $kF_e + 5f$ $k \in \mathbb{N}$

Avec la fréquence d'échantillonnage choisie, on remarque que $F_e - 5f = 5f$. On ne peut donc plus distinguer les raies issues du signal original et dues à l'échantillonnage au-delà de cette valeur.

On remarque qu'il est difficile d'interpréter certains spectres lorsque la fréquence d'échantillonnage se rapproche du critère de Shannon.

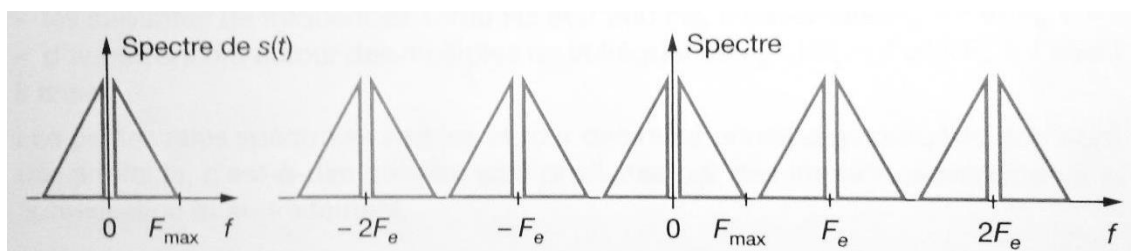
Pour éviter le phénomène de repliement de spectre, on peut utiliser un filtre anti-repliement, filtre analogique qui éliminera les fréquences supérieures à $F_e/2$ dans le signal initial. Cependant, cela résultera en une perte d'information.

1.5.3 Cas général

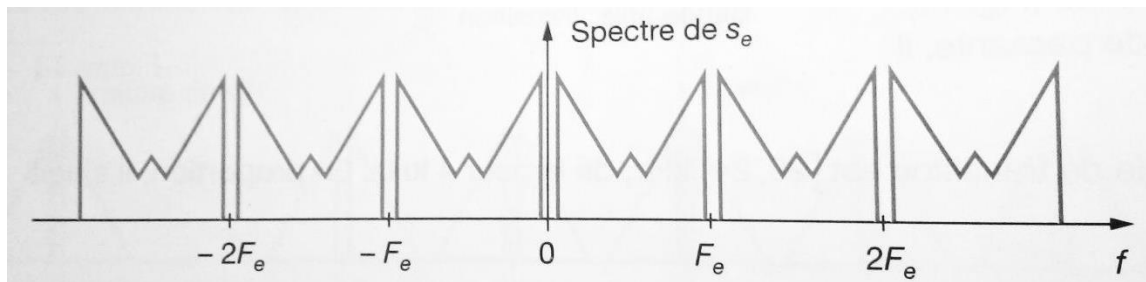
Ainsi quel que soit le signal échantillonné, on retrouve une propriété générale. Le spectre d'un signal périodique $s(t)$ échantillonné à la fréquence F_e comprend :

- des raies spectrales qui correspondent au fondamental et aux harmoniques du signal $s(t)$
- des raies spectrales obtenues par la réplique des raies précédentes autour de la fréquence F_e
- des raies situées autour des valeurs multiples de F_e .

On peut représenter schématiquement le spectre de $s(t)$ comme sur la figure suivante, pour une fréquence F_e suffisamment élevée. Il y a alors disjonction du spectre de $s(t)$ et des différentes répliques. Cette disjonction est obtenue lorsque : $F_{\max} < \frac{F_e}{2}$, c'est-à-dire lorsque l'on respecte le critère de Shannon.



Lorsque le critère de Shannon n'est pas vérifié, des raies viennent occuper l'intervalle $[0, F_{\max}]$. Il y a repliement de spectre.



1.6 Réglage de l'oscilloscope numérique

Pour observer les spectres précédents, nous avons utilisé le mode FFT de l'oscilloscope. Cet acronyme est un algorithme appelé Fast Fourier Transform qui permet d'avoir une représentation approchée du spectre d'un signal. Il permet de représenter le spectre du signal à partir de ses échantillons. Il réalise donc un échantillonnage avant de tracer le spectre.

1.6.1 Choix de la fréquence d'échantillonnage

La règle n°1 est bien sûr de respecter le critère de Shannon : $F_e > 2F_{\max}$

On a vu de plus qu'il n'était pas toujours évident à respecter lorsque le spectre du signal n'est pas fini (cas du signal carré). On peut alors si l'option est disponible utiliser un filtre anti-repliement. Cependant le critère de Shannon n'est pas le seul point à vérifier pour observer correctement le spectre d'un signal.

1.6.2 Choix du nombre de points

Pour une fréquence d'échantillonnage donnée, le spectre est d'autant plus précis que la durée totale d'acquisition, autrement dit le nombre total d'échantillons N_e , est élevé. On peut rapprocher cela de la durée d'acquisition du spectre. Le temps total d'acquisition T_a est de $N_e T_e$. Cette durée fixe la résolution du spectre d'après : $\Delta f = \frac{1}{T_a}$ où Δf représente la différence entre deux fréquences présentes dans le spectre.

1.6.3 Paramétrage de l'oscilloscope

Nos oscilloscopes ne nous permettent pas de choisir directement F_e ou N_e . N_e est en général imposé à 1024 ou 2048 points. Ce que nous pouvons choisir c'est le temps d'acquisition T_a . Il est donné par la durée du signal affiché à l'écran en mode temporel. Alors comme $T_a = \frac{N_e}{F_e} = \frac{1}{\Delta f}$, on remarque qu'il

faut faire un compromis entre l'étendue spectrale et la résolution spectrale :

- si on souhaite une grande étendue spectrale, on choisira T_a faible,
- si on souhaite une bonne résolution spectrale, on choisira T_a grand.

2 Filtrage numérique

2.1 Numérisation d'un signal

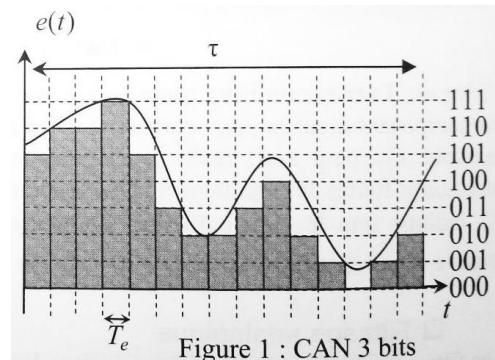
2.1.1 Quantification

Une fois l'échantillonnage d'un signal analogique effectué, il faut convertir chaque valeur recueillie en un nombre, binaire par exemple. Cette étape s'appelle la quantification et elle est réalisée par un convertisseur analogique-numérique (CAN).

Ce convertisseur ne peut cependant produire qu'un nombre fini de valeurs possibles. On appellera alors pas de quantification ou quantum q , l'écart entre deux valeurs successives.

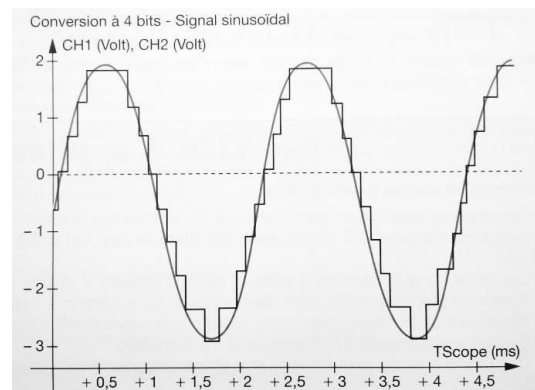
On note Δs l'intervalle dans lequel peut évoluer $s_e(t)$ signal échantillonné. Pour p éléments

binaires, on a alors : $q = \frac{\Delta s}{2^p - 1} \approx \frac{\Delta s}{2^p}$



2.1.2 Convertisseurs

Une fois le signal numérisé, il faut utiliser un convertisseur numérique analogique (CNA) pour restituer le signal. Regardons ce que donne la mise en cascade des deux convertisseurs CAN-CNA.



Remarque :

On peut s'inquiéter de la perte d'information résultant d'une numérisation. En outre, deux valeurs voisines d'échantillons peuvent être converties en un même nombre, ce qui engendre une erreur. On parle alors de bruit de quantification.

Mais cet inconvénient peut être nettement compensé par les avantages qu'offre la numérisation :

- la transmission et le stockage du signal numérique s'effectue sans autres altérations du signal
- le signal numérique est mieux immunisé contre la présence de perturbations
- le bruit de quantification est connu ou majoré, il est donc possible d'adopter une loi de quantification qui le rende admissible.

2.2 Filtrage numérique

2.2.1 Méthode d'Euler

Étudions le cas d'un passe bas du premier ordre. Il est régi par la loi d'entrée-sortie (ou équation différentielle) suivante : $\tau \frac{ds}{dt} + s(t) = e(t)$

On va ici se baser sur une méthode qui établit une équation récurrente, la méthode d'Euler.

On utilise la correspondance suivante : $\frac{ds}{dt} \rightarrow \frac{s_n - s_{n-1}}{T_e}$

Ce qui donne alors la suite suivante :

$$\tau \frac{s_n - s_{n-1}}{T_e} + s_n = e_n \Rightarrow s_n = r s_{n-1} + a e_n \quad \text{avec} \quad r = \frac{\tau}{T_e + \tau} \quad \text{et} \quad a = \frac{T_e}{T_e + \tau}$$

La manipulation de telles équations est alors très aisée à l'aide de langage de programmation tel Python.

2.2.2 Réponse libre

Dans ce cas :

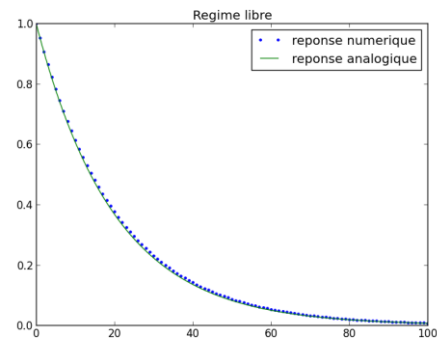
$$e(t) = \begin{cases} E & t < 0 \\ 0 & t \geq 0 \end{cases} \Rightarrow e_n = 0 \Rightarrow \quad \text{On a donc une}$$

$$s_n = r s_{n-1} \quad \text{avec} \quad s_0 = E$$

suite géométrique de raison r inférieure à l'unité.

On pose : $\tau = 20T_e$.

On remarque que les deux réponses sont comparables.

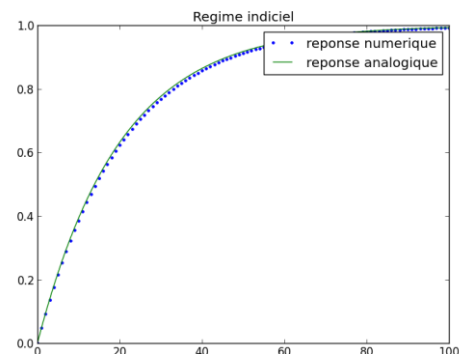


2.2.3 Réponse indicielle

Dans ce cas :

$$e(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ E=1 & t \geq 0 \end{cases} \Rightarrow e_n = 1 \Rightarrow s_n = r s_{n-1} + a$$

On pose : $\tau = 20T_e$.



2.2.4 Réponse harmonique

$$\text{Dans ce cas : } e(t) = A \cos(\omega t) \Rightarrow e_n = A \cos(n\omega T_e)$$

La sortie sera de la forme :

$$s(t) = s_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\text{avec} \quad s_0 = \frac{A}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}} \quad \text{et} \quad \varphi = -\arctan(\omega\tau)$$

Après un régime transitoire, on remarque que réponse analogique et numérique se superposent.

