Equations de Maxwell

1 Opérateurs différentiels

1.1 Le gradient

1.1.1 Définition

Définition :
Le gradient permet de construire un champ de vecteur à partir d'un champ scalaire.
En coordonnées cartésiennes, il est donné par :

$$\overrightarrow{grad}(m)=\left(\frac{\partial m}{\partial x}\right)\overrightarrow{u_x}+\left(\frac{\partial m}{\partial y}\right)\overrightarrow{u_y}+\left(\frac{\partial m}{\partial z}\right)\overrightarrow{u_z} \quad (1)$$

Interprétation physique :

Le vecteur $\overrightarrow{grad}(m)$ est normal aux surfaces de niveau (m = constante). Il est dirigé vers les valeurs croissantes de m.

1.1.2 Champ de gradient

Définition :

Un champ de vecteur $\vec{a}$ est dit champ de gradient si il existe une fonction scalaire m telle que :

$$\vec{a}=-\overrightarrow{grad}(m)$$

m est appelé potentiel scalaire du champ $\vec{a}$ et est défini à une constante additive près.

Propriété :

Pour tout contour fermé, on a : $\oint_{\Gamma}\vec{a}.\overrightarrow{dl}=0$

1.2 La divergence

1.2.1 Définition

Définition :
La divergence permet de construire un champ scalaire à partir d'un champ de vecteur.
En coordonnées cartésiennes, elle est donnée par :

$$div(\vec{a})=\left(\frac{\partial a_x}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial a_y}{\partial y}\right)+\left(\frac{\partial a_z}{\partial z}\right) \quad (2)$$

Interprétation physique :

Le signe de la divergence de $\vec{a}$ calculée au point M est lié au caractère convergent ou divergent des lignes de champs à partir de ce point.

1.2.2 Théorème de Green-Ostrogradsky

Théorème de Green-Ostrogradsky :
Soit une surface fermée S limitant un volume fini V à l'intérieur duquel est défini un champ de vecteur $\vec{a}$. Si les dérivées partielles de $\vec{a}$ sont bornées dans V alors : $\oiint_{S}\vec{a}\cdot\overrightarrow{dS}=\iiint_{V}\left(div\vec{a}\right)dV$

Interprétation physique :
La divergence représente le flux sortant d'une surface fermée localement par unité de volume.

1.3 Le rotationnel

1.3.1 Définition

Définition :
Le rotationnel permet de construire un champ de vecteur à partir d'un champ de vecteur.
En coordonnées cartésiennes, il est donné par :

$$\overrightarrow{rot}\left(\vec{a}\right)=\left(\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\overrightarrow{u_x}+\left(\frac{\partial a_x}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\overrightarrow{u_y}+\left(\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\overrightarrow{u_z} \qquad (3)$$

Interprétation physique :

Il exprime la tendance qu'ont les lignes de champ d'un champ vectoriel à tourner autour d'un point.

Moyen mnémotechnique :

Calcul de déterminant (coordonnées cartésiennes) : $\overrightarrow{rot}\left(\vec{a}\right)=\begin{vmatrix}\overrightarrow{e_x} & \overrightarrow{e_y} & \overrightarrow{e_z}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ a_x & a_y & a_z\end{vmatrix}$

1.3.2 Champ de rotationnel

Définition :

Un champ de vecteur $\vec{b}$ est dit champ de rotationnel si il existe un vecteur $\vec{a}$ tel que : $\vec{b}=\overrightarrow{rot}\left(\vec{a}\right)$

$\vec{a}$ est appelé potentiel vecteur du champ $\vec{b}$ et est défini à un gradient près.

Propriété :

Pour toute surface fermée, on a : $\oiint_S \vec{b}.\overrightarrow{dS}=0$

1.3.3 Théorème de Stokes

Théorème de Stokes :
Soit une surface ouverte S s'appuyant sur un contour fermé C dans une région de l'espace V où est défini un champ de vecteur $\vec{a}$, alors : $\oint_C \vec{a}\cdot\overrightarrow{dl}=\iint_S \overrightarrow{rot}\left(\vec{a}\right)\cdot\overrightarrow{dS}$

Interprétation physique :

Le rotationnel représente la circulation le long d'un contour fermé localement par unité de surface.

1.4 Le laplacien

Définition :
Le laplacien permet de construire un champ scalaire à partir d'un champ scalaire.
En coordonnées cartésiennes, il est donné par :

$$\Delta m=\left(\frac{\partial^2 m}{\partial x^2}\right)+\left(\frac{\partial^2 m}{\partial y^2}\right)+\left(\frac{\partial^2 m}{\partial z^2}\right) \qquad (4)$$

Le laplacien permet aussi de construire un champ de vecteur à partir d'un champ de vecteur.
En coordonnées cartésiennes, il est donné par :

$$\vec{\Delta}\left(\vec{a}\right)=\left(\Delta a_x\right)\overrightarrow{e_x}+\left(\Delta a_y\right)\overrightarrow{e_y}+\left(\Delta a_z\right)\overrightarrow{e_z} \qquad (5)$$

Interprétation physique :

L'équation de Laplace Δm = 0 traduit le fait que la solution m est toujours égale à sa moyenne prise sur un voisinage.

2 Identités vectorielles

$$\begin{aligned} &div\left(\overrightarrow{grad}(m)\right)=\Delta m \\ &div\left(\overrightarrow{rot}\left(\vec{a}\right)\right)=0 \\ &\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{grad}(m)\right)=\vec{0} \\ &\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}\left(\vec{a}\right)\right)=\overrightarrow{grad}\left(div\left(\vec{a}\right)\right)-\vec{\Delta}\left(\vec{a}\right) \end{aligned} \qquad (6)$$

3 Principe de conservation de la charge

Soit un fil de section S et de longueur L selon Ox, représenté par un cylindre, chargé en volume $\rho(x,t)$ et parcouru par un courant volumique $\vec{j}=j_x(x,t)\overrightarrow{u_{xs}}$. On cherche à quantifier la charge contenue dans une portion dx de ce fil, ainsi que sa variation.

A l'instant t la charge contenue dans la section dx est : $Q(x,t)=\rho(x,t)Sdx$

A l'instant t + dt la charge contenue dans la section dx est : $Q(x,t+dt)=\rho(x,t+dt)Sdx$

La variation de la quantité de charge pendant dt est donc :

$$Q(x,t+dt)-Q(x,t)=\left(\rho(x,t+dt)-\rho(x,t)\right)Sdx=\frac{\partial\rho}{\partial t}Sdxdt \quad\Rightarrow\quad \frac{\partial Q}{\partial t}=\frac{\partial\rho}{\partial t}Sdx$$

En utilisant la définition du courant, la variation de charge pendant dt est égale à :

$$\frac{\partial Q}{\partial t}=\partial I=-\partial\vec{j}\cdot\vec{S}=-\partial j_x(x,t)S$$

La conservation de la charge électrique se traduit par : $\frac{\partial\rho}{\partial t}Sdx=-\partial j_x(x,t)S \quad\Rightarrow\quad \frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial j_x}{\partial x}=0$

On introduit l'opérateur divergence tel qu'en cartésien : $div\vec{j}=\left(\frac{\partial j_x}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial j_y}{\partial y}\right)+\left(\frac{\partial j_z}{\partial z}\right)$

On retrouve alors l'équation locale de conservation de la charge en 3D : $\frac{\partial\rho}{\partial t}+div\vec{j}=0$

Principe de conservation de la charge électrique :
La charge électrique est une **grandeur conservative**. Ce principe se traduit par l'équation locale :

$$div\vec{j}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0 \qquad (7)$$

Remarques :

En régime stationnaire : $div\vec{j}=0$ ou (théorème de Green-Ostrogradsy : $\oint\!\!\oint_S \vec{j}\cdot\overrightarrow{dS}=0$)

Si l'on considère un nœud électrique entre plusieurs branches et S une surface fermée entourant ce nœud, alors : $\sum_k I_k=0$: loi de nœuds.

Si l'on considère un conducteur constituant un tube de courant avec I_1 le courant en entrée et I_2 le courant en sortie, alors : $I_1=I_2$.

4 Equations de Maxwell dans le vide

4.1 Formes locales

Le **champ électromagnétique** est caractérisé par un couple de vecteurs noté $\{\vec{E},\vec{B}\}$ où $\vec{E}$ est le vecteur **champ électrique** (V.m^{-1}) et $\vec{B}$ est le vecteur **champ magnétique** (T).
Ce champ électromagnétique est créé au point M à l'instant t par la distribution $\{\rho,\vec{j}\}$. Il est régi par les quatre **équations de Maxwell dans le vide** :

- **Equation de Maxwell-Gauss** (MG):

$$div\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad (8)$$

- **Equation de Maxwell-Ampère** (MA):

$$\overrightarrow{rot}\vec{B}=\mu_0\vec{j}+\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \qquad (9)$$

- **Equation de Maxwell-Thomson** (ou flux) (MT):

$$div\vec{B}=0 \qquad (10)$$

- **Equation de Maxwell-Faraday** (MF):

$$\overrightarrow{rot}\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \qquad (11)$$

Remarques :
Les équations MG et MA expriment le lien entre le champ $\{\vec{E},\vec{B}\}$ et sa source $\{\rho,\vec{j}\}$.
Les équations de Maxwell forment un système d'équations couplées vis-à-vis des champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$.
Les équations de Maxwell sont linéaires par rapport aux sources $\{\rho,\vec{j}\}$. Le champ $\{\vec{E},\vec{B}\}$ obéit donc au théorème de superposition.
On retrouve l'équation locale de conservation de la charge :

$$div\left(\overrightarrow{rot}\left(\vec{B}\right)\right)=\mu_0 div\left(\vec{j}\right)+\mu_0\varepsilon_0 div\left(\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)\underset{MA}{=}\mu_0 div\left(\vec{j}\right)+\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial div\left(\vec{E}\right)}{\partial t}\underset{MG}{=}\mu_0 div\left(\vec{j}\right)+\mu_0\frac{\partial\rho}{\partial t}=0$$

4.2 Formes intégrales et interprétation

4.2.1 Equation de Maxwell-Gauss

L'équation de Maxwell-Gauss exprime la **validité générale du théorème de Gauss** :

$$\underbrace{\oiint_{\Sigma}\vec{E}\cdot\overrightarrow{dS}=\iiint_V div\left(\vec{E}\right)d\tau}_{Green-Ostrogadsky}=\frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}=\iiint_V\frac{\rho}{\varepsilon_0}d\tau \quad\Leftrightarrow\quad div\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

4.2.2 Equation de Maxwell-Ampère

En régime permanent, on a introduit le théorème d'Ampère, dont la formulation locale est :

$$\underbrace{\oint_{\Gamma}\vec{B}\cdot\vec{dl}=\iint_S\overrightarrow{rot}\left(\vec{B}\right)\cdot\overrightarrow{dS}}_{Stokes}=\mu_0 I_{int}=\iint_S\mu_0\vec{j}\cdot\overrightarrow{dS}= \quad\Leftrightarrow\quad \overrightarrow{rot}\left(\vec{B}\right)=\mu_0\vec{j}$$

La conservation de la charge à partir de cette équation locale nous donne :

$$div\left(\overrightarrow{rot}\left(\vec{B}\right)\right)=0 \quad\Rightarrow\quad div\vec{j}=0$$

Mais il y a contradiction avec la conservation de la charge en régime variable : $div\,\vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$

On introduit donc un courant fictif nommé densité de courant de déplacement $\overrightarrow{j_D}$ tel que :

$$\overrightarrow{rot}\left(\vec{B}\right) = \mu_0\left(\vec{j} + \overrightarrow{j_D}\right) \quad avec \quad \overrightarrow{j_D} = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Sa signification physique est la suivante : un champ électrique dépendant du temps est, au même titre qu'un courant, une source de champ magnétique.

L'équation de Maxwell-Ampère exprime la **forme généralisée du théorème d'Ampère** :

$$\overrightarrow{rot}\vec{B} = \mu_0\,\vec{j} + \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \Leftrightarrow \quad \oint_{\Gamma} \vec{B}\cdot\vec{dl} = \mu_0 \iint_{S}\left(\vec{j} + \overrightarrow{j_D}\right).\vec{dS} \quad avec \quad \overrightarrow{j_D} = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

4.2.3 Equation de Maxwell-Thomson

L'équation de Maxwell-Thomson exprime le **caractère conservatif du flux magnétique** en régime variable :

$$\underbrace{\oiint_{S} \vec{B}\cdot\vec{dS} = \iiint_{V} div\left(\vec{B}\right)d\tau}_{Green-Ostrogadsky} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad div\vec{B} = 0$$

4.2.4 Equation de Maxwell-Faraday

L'équation de Maxwell-Faraday exprime qu'un champ magnétique dépendant du temps donne naissance à un champ électrique à circulation non conservative. Cette équation rend compte du **phénomène d'induction électromagnétique** :

$$e = \oint_{C} \vec{E}\cdot\vec{dl} = \iint_{S} \overrightarrow{rot}\left(\vec{E}\right)\cdot\vec{dS} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\iint_{S}\vec{B}\cdot\vec{dS} = \iint_{S}\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right)\cdot\vec{dS} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

En régime permanent, on retrouve bien le fait que le champ électrique est à circulation conservative :

$$e = \oint_{C} \vec{E}\cdot\vec{dl} = \iint_{S} \overrightarrow{rot}\left(\vec{E}\right)\cdot\vec{dS} = 0$$

5 Équations de propagation des champs dans une région vide de charges et de courants

Dans le vide, en absence de charges et courants, on peut simplifier les équations de Maxwell tel que :

$$\begin{array}{ll} (MG) \quad div\vec{E} = 0 & (MA) \quad \overrightarrow{rot}\vec{B} = \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ (MT) \quad div\vec{B} = 0 & (MF) \quad \overrightarrow{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{array} \tag{12}$$

Alors, pour le champ électrique, en utilisant l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}\vec{E}\right) = \overrightarrow{rot}\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) \\ \overrightarrow{grad}\left(\underbrace{div\vec{E}}_{0}\right) - \vec{\Delta}\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\overrightarrow{rot}\vec{B}\right) \\ \vec{\Delta}\vec{E} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) \end{array}\right\} \quad \vec{\Delta}\vec{E} - \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

Et pour le champ magnétique, en utilisant l'équation de Maxwell-Ampère :

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}\vec{B}\right)=\overrightarrow{rot}\left(\mu_0\varepsilon_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)\\ \overrightarrow{grad}\left(\underset{0}{div\vec{B}}\right)-\vec{\Delta}\vec{B}=\mu_0\varepsilon_0\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\overrightarrow{rot}\vec{E}\right)\\ \vec{\Delta}\vec{B}=\mu_0\varepsilon_0\dfrac{\partial}{\partial t}\left(-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right)\end{array}\right\}\quad \vec{\Delta}\vec{B}-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}=\vec{0}$$

Propriété :

Dans le vide, dans une région sans charges ni courants, les champs électrique et magnétique satisfont la même équation de propagation ou équation d'onde, appelée **équation de d'Alembert** :

$$\vec{\Delta}\vec{E}-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=\vec{0}\quad et\quad \vec{\Delta}\vec{B}-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}=\vec{0}\qquad (13)$$

Remarque :

La grandeur $\mu_0\varepsilon_0$ est homogène à l'inverse d'une vitesse au carré. On l'appelle la célérité de l'onde ou la vitesse de propagation de l'onde. Dans le vide, est elle égale à : $c=\dfrac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}=3.10^8\,m.s^{-1}$

L'onde électromagnétique se propage donc dans le vide à la vitesse de la lumière. On retiendra :

$$\mu_0\varepsilon_0c^2=1\quad\Rightarrow\quad \vec{\Delta}\vec{E}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=\vec{0}\quad et\quad \vec{\Delta}\vec{B}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}=\vec{0}\qquad (14)$$

6 Approximation des régimes quasi-stationnaires (ARQS)

6.1 Conditions de validité

Définition :

On appelle **approximation des régimes quasi-stationnaires** (ARQS) l'étude de l'électromagnétisme dans le cas où les temps de propagation sont négligeables devant la période des signaux.

Si l'on note τ le temps de propagation du signal et T la période, alors l'ARQS est applicable si $\tau\ll T$.

Exemple :

Lors de TP d'électrocinétique, la fréquence de signaux est en général inférieure à 1 MHz et les dimensions des circuits inférieures à 50 cm. La période est signaux est alors très supérieure aux temps de propagation : $T\gg\dfrac{d}{c}\quad\Leftrightarrow\quad 1\mu s\gg 1,5ns$

6.2 Equations de Maxwell dans le cadre de l'ARQS

Dans un **conducteur** et dans le cadre de **l'ARQS**, les équations de Maxwell s'écrivent :

$$\begin{array}{ll}(MG) & div\vec{E}=\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}\\ (MA) & \overrightarrow{rot}\vec{B}=\mu_0\vec{j}\\ (MT) & div\vec{B}=0\\ (MF) & \overrightarrow{rot}\vec{E}=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}\end{array}\qquad (15)$$

Dans les conducteurs, le courant de déplacement est négligeable devant le courant de conduction :

$$\left\|\vec{j_D}\right\| \ll \left\|\vec{j}\right\| \quad (16)$$

Remarques :

Les équations MA et MT sont les mêmes qu'en régime permanent, cela confirme que le champ magnétique est bien le même en régime permanent et dans le cas de l'ARQS.

Les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont toujours couplés (MF).

L'équation de conservation de la charge se simplifie en : $div\,\vec{j} = 0$

On retrouve la loi des nœuds que l'on utilise en électrocinétique.

6.3 Cas particulier des régimes stationnaires (ou permanents)

Dans le cadre des régimes stationnaires (ou permanents), les dérivées temporelles s'annulent. Les équations de Maxwell s'écrivent :

$$\begin{array}{ll} (MG) & div\vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} \\ (MA) & \overrightarrow{rot}\vec{B} = \mu_0\,\vec{j} \\ (MT) & div\vec{B} = 0 \\ (MF) & \overrightarrow{rot}\vec{E} = \vec{0} \end{array} \quad (17)$$

Remarques :

Les équations précédentes sont découplées, il est possible d'étudier séparément le champ électrostatique $\vec{E}$ et le champ magnétostatique $\vec{B}$. On retrouve toutes les expressions étudiées en chapitres 1 et 2.

6.4 Équation de Poisson et équation de Laplace de l'électrostatique

6.4.1 Equation de Poisson

Equation de Poisson :

L'équation locale reliant potentiel et densité volumique de charge, appelée équation de poisson, s'écrit :

$$\Delta V + \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0 \quad (18)$$

Démonstration :

En partant (MG), on aboutit à : $div\vec{E} = div\left(-\overrightarrow{grad}V\right) = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$

On fait ainsi apparaître un autre opérateur, le Laplacien et on a ainsi : $-\Delta V = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$

6.4.2 Equation de Laplace

Equation de Laplace :

Dans une région sans charges, l'équation de Poisson se simplifie en :

$$\Delta V = 0 \quad (19)$$

Remarque :

L'équation de Laplace traduit le fait que la solution V est toujours égale à sa moyenne prise sur un voisinage.