Exemple de dispositif interférentiel par division du front d'onde

1 Etude théorique des trous d'Young

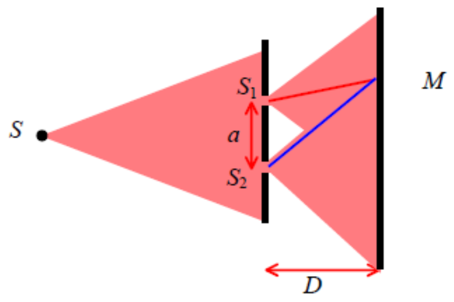
1.1 Description du dispositif

Deux trous S_1 et S_2 identiques et de très petite dimension (rayon de l'ordre du dixième de millimètre, ou moins), sont percés dans un écran opaque et distants de a (de l'ordre de quelques millimètres).

La lumière incidente est diffractée par chacun d'eux et les ondes réémises se superposent dans toute une partie de l'espace.

Eclairés par une source ponctuelle S monochromatique de longueur d'onde λ, ils se comportent donc comme deux sources secondaires cohérentes.

La source S est placée à la même distance de chacun d'entre eux. L'observation se fait sur un écran parallèle à S_1S_2 placé à une distance D.



1.2 Description du champ d'interférences

1.2.1 Source à distance finie et observation à grande distance finie

Soit a la distance séparant les deux fentes, D la distance à l'écran et λ la longueur d'onde de la source ponctuelle. On pose : $D \gg a, |x|, |y| \gg \lambda$

La différence de marche se met sous la forme :

$$\delta = (SM)_2 - (SM)_1 = (SS_2) + (S_2M) - (SS_1) - (S_1M) = (S_2M) - (S_1M) = n(S_2M - S_1M)$$

On exprime alors S_2M - S_1M au point M, de coordonnées (x,y) situé au voisinage de O sur un écran placé à la distance D du plan des sources S_1 et S_2.

D'où :

$$\begin{cases} \overrightarrow{S_1M} = \overrightarrow{S_1O} + \overrightarrow{OM} = x\vec{e}_x + \left(y - \frac{a}{2}\right)\vec{e}_y + D\vec{e}_z & \Rightarrow \quad S_1M = \sqrt{x^2 + \left(y - \frac{a}{2}\right)^2 + D^2} \\ \overrightarrow{S_2M} = \overrightarrow{S_2O} + \overrightarrow{OM} = x\vec{e}_x + \left(y + \frac{a}{2}\right)\vec{e}_y + D\vec{e}_z & \Rightarrow \quad S_2M = \sqrt{x^2 + \left(y + \frac{a}{2}\right)^2 + D^2} \end{cases}$$

En supposant que : $D \gg a, |x|, |y| \gg \lambda$

On peut effectuer un développement limité au second ordre en a/D, x/D et y/D :

$$S_1M = \sqrt{x^2 + \left(y - \frac{a}{2}\right)^2 + D^2} = D\sqrt{1 + \left(\frac{x}{D}\right)^2 + \left(\frac{y}{D}\right)^2 + \left(\frac{a}{2D}\right)^2 - \frac{ay}{D^2}}$$

$$\approx D\left(1 + \frac{1}{2}\left(\left(\frac{x}{D}\right)^2 + \left(\frac{y}{D}\right)^2 + \left(\frac{a}{2D}\right)^2 - \frac{ay}{D^2}\right)\right)$$

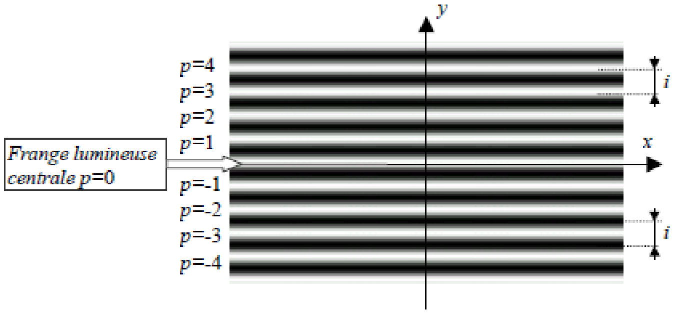
$$S_2M \approx D\left(1 + \frac{1}{2}\left(\left(\frac{x}{D}\right)^2 + \left(\frac{y}{D}\right)^2 + \left(\frac{a}{2D}\right)^2 + \frac{ay}{D^2}\right)\right)$$

Alors, pour la différence de marche, on obtient : $\delta(M) = n(S_2M - S_1M) \approx nD\dfrac{ay}{D^2} \approx n\dfrac{ay}{D}$

La répartition de l'intensité lumineuse sur l'écran peut alors se mettre sous la forme :

$$I(M) = 2I_0\left(1+\cos\left(\frac{2\pi ay}{\lambda D}\right)\right)$$

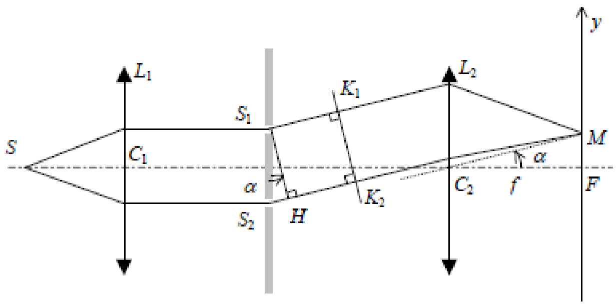
L'éclairement ne dépend que de la seule coordonnée y : les franges d'interférences sont donc des segments de droites parallèles à l'axe des x donc perpendiculaires à S_1S_2. On remarque que la répartition d'intensité lumineuse sur le plan d'observation est périodique. La période de la fonction est appelée l'interfrange et notée i.



$$i = \frac{\lambda D}{a} \quad \Rightarrow \quad I(M) = 2I_0\left(1+\cos\left(\frac{2\pi y}{i}\right)\right)$$

1.2.2 Source à distance finie et observation à l'infini

On ajoute une première lentille convergente L_1 au dispositif telle que la source S se trouve en son foyer objet. Alors les trous sont éclairés en lumière parallèle et les rayons émergeant des trous sont aussi parallèles. On parle d'observation à l'infini.



Pour pouvoir se ramener à une distance finie, on place une seconde lentille convergente L_2 telle que l'écran se trouve en son plan focal image.

Il faut alors reprendre le calcul de la différence de marche. On a toujours :

$$\delta = (SM)_2 - (SM)_1 = (SS_2) + (S_2M) - (SS_1) - (S_1M)$$

S_1 et S_2 sont conjugués avec S, on a donc toujours : $(SS_2) = (SS_1)$

Les points K_1 et K_2 sont eux-mêmes conjugués avec M, car ils appartiennent à la même surface d'onde. En particulier, S_1 et H sont conjugués avec M, d'où : $(HM) = (S_1M)$

Alors la différence de marche peut se mettre sous la forme :

$$\delta = (S_2M) - (S_1M) = (S_2H) + (HM) - (S_1M) = (S_2H) = nS_2H$$

L'utilisation des lentilles impose d'être dans les conditions de Gauss, les rayons sont donc peut inclinés, et on a : $S_2H = a\sin\alpha \approx a\tan\alpha \approx a\dfrac{MF}{C_2F} \approx a\dfrac{y}{f}$

Soit finalement : $I(M) = 2I_0\left(1+\cos\left(\dfrac{2\pi ay}{\lambda f}\right)\right)$

L'expression est donc tout à fait semblable à celle obtenue pour une observation sur un écran à distance finie D au remplacement près de D par f.

L'interfrange i s'écrit donc : $i = \dfrac{\lambda f}{a}$