Energie du champ électromagnétique

1 Force électromagnétique

1.1 Cas d'une particule ponctuelle

Une particule de masse m, caractérisée par sa charge q, animée d'une vitesse $\vec{v}$, soumise à un champ électromagnétique $\{\vec{E},\vec{B}\}$, se trouvant à l'instant t en un point M_0, subit une force F appelée **force de Lorentz** : $\vec{F} = q\left(\vec{E}(M_0,t) + \vec{v} \wedge \vec{B}(M_0,t)\right)$

1.2 Densité volumique de force électromagnétique

Si la modélisation de la charge est volumique (on raisonne sur un élément de volume $d\tau$), de densité volumique de charges ρ, animée d'une vitesse $\vec{v}$, la force élémentaire exercée sur ce volume s'écrit : $\overrightarrow{dF} = \rho d\tau\left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}\right)$

La puissance dP reçue par la charge dans le volume dτ est donc :

$$dP = \overrightarrow{dF} \cdot \vec{v} = \rho\vec{v} \cdot \vec{E} d\tau = \vec{j} \cdot \vec{E} d\tau$$

Définition :
La densité volumique de puissance, p ($W.m^{-3}$), cédée par le champ électromagnétique aux porteurs de charge est donnée par :

$$p = \frac{dP}{d\tau} = \vec{j} \cdot \vec{E} \qquad (1)$$

2 Bilan énergétique dans un conducteur ohmique

2.1 Loi d'Ohm locale

Loi d'Ohm locale :
Dans de nombreux cas, si le champ appliqué est suffisamment faible alors le vecteur densité de courant et le vecteur champ électrique sont liés par une relation empirique faisant intervenir la conductivité γ du milieu ($S.m^{-1}$) :

$$\vec{j} = \gamma \vec{E} \qquad (2)$$

2.2 Forme intégrale de la loi d'Ohm

On considère une portion de conducteur cylindrique d'axe Ox, de section S et de longueur L, baignant dans un champ électrique uniforme et stationnaire $\vec{E} = E_0 \overrightarrow{u_x}$. Le matériau présente une conductivité γ constante.

Le courant traversant le conducteur est alors : $I = jS = \gamma E_0 S$

La différence de potentiel entre les extrémités du cylindre se met sous la forme : $U = V(A) - V(B) = E_0 L$

On appelle **résistance électrique** le rapport : $R = \frac{U}{I} = \frac{1}{\gamma}\frac{L}{S}$

2.3 Densité volumique de puissance cédée par effet Joule

On considère le même conducteur cylindrique.

D'après la loi d'Ohm locale, la puissance volumique cédée aux porteurs de charge se met sous la forme : $p = \vec{j} \cdot \vec{E} = \gamma \vec{E} \cdot \vec{E} = \gamma E^2$

Ou encore : $p = \vec{j} \cdot \vec{E} = \vec{j} \cdot \frac{\vec{j}}{\gamma} = \frac{1}{\gamma} j^2 = \frac{1}{\gamma}\left(\frac{I}{S}\right)^2$

En intégrant sur le volume : $P = pSL = \frac{1}{\gamma}\left(\frac{I}{S}\right)^2 SL = \frac{L}{\gamma S} I^2 = RI^2$

Propriété :
La puissance dissipée par effet Joule s'identifie donc à la puissance cédée par le champ aux porteurs de charge du conducteur. Sa densité volumique de puissance se met sous la forme :

$$p = \gamma E^2 \quad (3)$$

Remarques :
La puissance apportée aux porteurs de charge est donc toujours positive, ce qui signifie qu'elle est réellement apportée : le champ cède toujours de la puissance à la matière.
En régime permanent, cette puissance ne peut pas être emmagasinée par les porteurs de charge, ils la cèdent au réseau au cours des chocs inélastiques, et le réseau la cède à son tour à l'atmosphère par conduction thermique ou rayonnement : c'est l'effet Joule.

3 Bilan d'énergie électromagnétique

3.1 Equation de conservation de l'énergie électromagnétique

On utilise un raisonnement similaire à celui utilisé pour la conservation de la charge électrique. Soit un volume fini V de l'espace délimité par une surface fermée S, à un instant t l'énergie électromagnétique contenue dans ce volume est : $U = \iiint_V u\, d\tau$

La diminution de cette énergie se retrouve sous deux formes :
- puissance cédée à la matière, P (ou aux porteurs de charges)
- puissance évacuée à travers S sous forme de rayonnement, $P_{rayonnée}$

Ainsi : $-\frac{dU}{dt} = P + P_{rayonnée} = \iiint_V \left(\vec{j} \cdot \vec{E}\right) d\tau + P_{rayonnée}$

Par analogie avec l'équation de conservation de la charge, on écrira l'équation de conservation de l'énergie sous la forme :

$$-\frac{dU}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(\iiint_V u\, d\tau\right) = -\iiint_V \frac{\partial u}{\partial t} d\tau = \iiint_V \left(\vec{j} \cdot \vec{E}\right) d\tau + \oiint_S \vec{\Pi} \cdot \vec{dS}$$

Où $\vec{\Pi}$ est le **vecteur densité de courant d'énergie rayonnée**.
On a donc l'équation intégrale de conservation de l'énergie électromagnétique suivante :

$$\iiint_V \frac{\partial u}{\partial t} d\tau = -\iiint_V \left(\vec{j} \cdot \vec{E}\right) d\tau - \oiint_S \vec{\Pi} \cdot \vec{dS}$$

En utilisant le théorème de Green-Ostrogradsky, on obtient l'équation locale : $\frac{\partial u}{\partial t} = -\vec{j} \cdot \vec{E} - div\vec{\Pi}$

Principe de conservation de l'énergie électromagnétique :

L'énergie électromagnétique est une grandeur conservative. Ce principe se traduit par l'équation locale :

$$div\vec{\Pi} + \frac{\partial u}{\partial t} + \vec{j} \cdot \vec{E} = 0 \qquad (4)$$

3.2 Densité volumique d'énergie électromagnétique

Définition :
Les champs électrique et magnétique régnant dans une portion de l'espace vide entraînent la localisation d'une énergie dont la densité volumique, u ($J.m^{-3}$), s'écrit :

$$u = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0} \qquad (5)$$

3.3 Vecteur de Poynting

Définition :
Le vecteur densité de courant d'énergie rayonnée ou **vecteur de Poynting** représente la densité surfacique de puissance rayonnée et s'écrit :

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \qquad (6)$$

Définition :
La puissance rayonnée, $P_{rayonnée}$, par le champ électromagnétique à travers une surface S est :

$$P_{rayonnée} = \oiint_S \vec{\Pi} \cdot \vec{dS} \qquad (7)$$