

Propagation

1 Onde plane dans l'espace vide de charge et de courant

1.1 Equation de propagation du champ électromagnétique

Propriété :

Dans le vide, dans une région sans charges ni courants, les champs électrique et magnétique satisfont la même équation de propagation ou équation d'onde, appelée **équation de d'Alembert** :

$$\vec{\Delta} \vec{E} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{\Delta} \vec{B} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0} \quad (1)$$

Remarque :

La grandeur $\mu_0 \varepsilon_0$ est homogène à l'inverse d'une vitesse au carré. On l'appelle la célérité de l'onde ou

la vitesse de propagation de l'onde. Dans le vide, elle est égale à : $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} = 3.10^8 \text{ m.s}^{-1}$

L'onde électromagnétique se propage donc dans le vide à la vitesse de la lumière. On retiendra :

$$\mu_0 \varepsilon_0 c^2 = 1 \Rightarrow \vec{\Delta} \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{\Delta} \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0} \quad (2)$$

1.2 Résolution générale d'une équation d'onde scalaire à une dimension

Soit l'équation d'onde suivante vérifiée par la fonction $u(x, t)$: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$

v représente la vitesse de propagation de l'onde dans le milieu considéré.

1.2.1 Onde plane progressive (OPP)

Définition :

On dit qu'une onde est **plane** si, à chaque instant, la fonction $u(x, y, z, t)$ a la même valeur en tout point d'un plan perpendiculaire à une direction fixe définie par un vecteur unitaire \vec{n} et appelée **direction de propagation**.

Définition :

L'onde plane est de plus **progressive** quand le signal se propage dans un sens déterminé.

1.2.2 Solutions de l'équation de propagation

Propriété :

Les solutions de l'équation de propagation unidimensionnelle selon x peuvent s'écrire comme la superposition de deux **ondes planes progressives** :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \Rightarrow u(x, t) = f_1(x - vt) + f_2(x + vt) \quad \text{ou} \quad u(x, t) = f_1\left(t - \frac{x}{v}\right) + f_2\left(t + \frac{x}{v}\right)$$

Remarque :

$f_1(x - vt)$ et $f_1\left(t - \frac{x}{v}\right)$: propagation à la vitesse v suivant les x croissants

$f_2(x + vt)$ et $f_2\left(t + \frac{x}{v}\right)$: propagation à la vitesse v suivant les x décroissants

1.3 Solutions de l'équation de propagation du champ électromagnétique sous forme d'ondes planes progressives

1.3.1 Equation de propagation unidimensionnelle

On suppose que nos champs ne dépendent que de la coordonnées cartésiennes, x , alors :

$$\vec{\Delta}\vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{\Delta}\vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0} \Rightarrow \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

Les solutions peuvent donc s'écrire sous la forme de la superposition des deux ondes planes progressives telles que : $\vec{E} = \vec{E}_1\left(t - \frac{x}{c}\right) + \vec{E}_2\left(t + \frac{x}{c}\right)$ et $\vec{B} = \vec{B}_1\left(t - \frac{x}{c}\right) + \vec{B}_2\left(t + \frac{x}{c}\right)$

Pour simplifier les calculs futurs de ce cours, on suppose que la propagation se fait selon les x croissants, ce qui donne :

$$\vec{E} = \vec{E}\left(t - \frac{x}{c}\right) = \begin{pmatrix} E_x\left(t - \frac{x}{c}\right) \\ E_y\left(t - \frac{x}{c}\right) \\ E_z\left(t - \frac{x}{c}\right) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{B} = \vec{B}\left(t - \frac{x}{c}\right) = \begin{pmatrix} B_x\left(t - \frac{x}{c}\right) \\ B_y\left(t - \frac{x}{c}\right) \\ B_z\left(t - \frac{x}{c}\right) \end{pmatrix}$$

1.3.2 Transversalité des champs

Dans une région sans charges, le champ électrique est à flux conservatif : (MG) $\text{div}\vec{E} = 0$

$$\text{Alors : } \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \Rightarrow \frac{\partial E_x}{\partial x} = 0 \quad \text{or} \quad \frac{\partial E_x}{\partial x} = -\frac{1}{c} \frac{\partial E_x}{\partial t} = 0 \Rightarrow E_x = cte$$

On suppose qu'il n'y a pas de champ statique, alors $E_x = 0$.

De même, on a d'après l'équation de Maxwell-Thomson :

$$(MT) \quad \text{div}\vec{B} = 0 \Rightarrow \frac{\partial B_x}{\partial x} = -\frac{1}{c} \frac{\partial B_x}{\partial t} = 0 \Rightarrow B_x = cte = 0$$

Propriété :

Les champs électrique et magnétique n'ont pas de composantes suivant la direction de propagation. Les vecteurs sont perpendiculaires à la direction de propagation, on les qualifie de **transverses**.

Remarque :

On peut donc réécrire les champs sous la forme :

$$\vec{E} = \vec{E}\left(t - \frac{x}{c}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ E_y\left(t - \frac{x}{c}\right) \\ E_z\left(t - \frac{x}{c}\right) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{B} = \vec{B}\left(t - \frac{x}{c}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ B_y\left(t - \frac{x}{c}\right) \\ B_z\left(t - \frac{x}{c}\right) \end{pmatrix}$$

1.3.3 Relation entre les champs

D'après l'équation de Maxwell-Faraday, on a aussi :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\vec{E} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\partial E_z}{\partial x} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} \end{pmatrix} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\partial B_y}{\partial t} \\ -\frac{\partial B_z}{\partial t} \end{pmatrix} \Rightarrow -\frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{\partial B_y}{\partial t} = c \frac{\partial B_y}{\partial x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t} = c \frac{\partial B_z}{\partial x}$$

Alors, en intégrant : $E_z = -cB_y + cte = -cB_y$ et $E_y = cB_z + cte = cB_z$

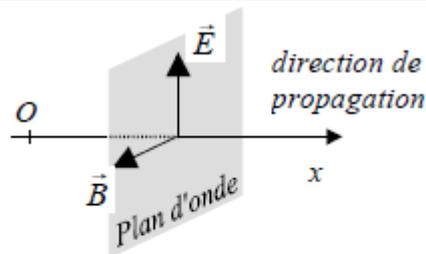
On peut traduire ces deux expressions par une seule expression vectorielle :

$$\vec{B} = \frac{1}{c}(-E_z \vec{u}_y + E_y \vec{u}_z) = \frac{1}{c} \vec{u}_x \wedge \vec{E}$$

Propriété :

Pour une onde plane progressive de direction de propagation donnée par le vecteur unitaire \vec{n} , les champs électrique et magnétique sont **transverses**. Ils forment avec la direction de propagation un trièdre direct.

$$\vec{B} = \frac{1}{c} \vec{n} \wedge \vec{E} \quad (3)$$



1.4 Aspect énergétique

1.4.1 Densité volumique d'énergie électromagnétique

Le champ électromagnétique transporte une densité volumique d'énergie égale à :

$$u = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} \left(\frac{E}{c} \right)^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 = \epsilon_0 E^2$$

La densité volumique d'énergie électromagnétique est équirépartie entre terme électrique et terme magnétique.

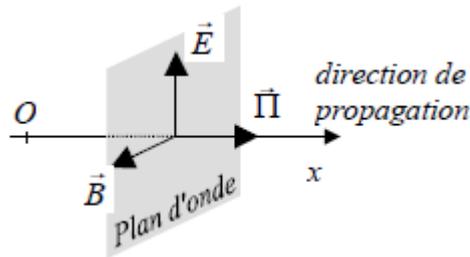
1.4.2 Puissance volumique cédée par le champ aux porteurs de charge

La puissance volumique cédée par le champ aux porteurs de charge est nulle car on se trouve dans une région sans charges ni courants.

1.4.3 Vecteur de Poynting

Le vecteur de Poynting s'écrit alors pour une OPP se propageant selon les x croissants:

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{\vec{E} \wedge \left(\frac{1}{c} \vec{u}_x \wedge \vec{E} \right)}{\mu_0} = \frac{1}{\mu_0 c} \vec{E} \wedge (\vec{u}_x \wedge \vec{E}) = \frac{1}{\mu_0 c} \left((\vec{E} \cdot \vec{E}) \vec{u}_x - \underbrace{(\vec{E} \cdot \vec{u}_x)}_{=0} \vec{E} \right) \Rightarrow \vec{\Pi} = c \epsilon_0 E^2 \vec{u}_x = c u \vec{u}_x$$



Le flux du vecteur de Poynting à travers une surface perpendiculaire à la direction de propagation est la puissance traversant cette surface : $P_{rayonnée} = \iint_S \vec{\Pi} \cdot d\vec{S} = \iint_S cu\vec{u}_x \cdot d\vec{S} = cuS$

Propriété :

Le vecteur de Poynting, représentant la densité surfacique de puissance rayonnée, est dirigé dans la direction de propagation de l'onde plane donnée par \vec{n} . Ainsi, l'énergie d'une OPP dans le vide se propage à la célérité, c.

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = c\epsilon_0 E^2 \vec{n} = cu\vec{n} \quad (4)$$

2 Onde plane progressive monochromatique polarisée rectilignement

L'OPPM est un modèle. Il est très intéressant car toute onde plane peut être exprimée comme la somme d'OPPM. Une onde plane progressive monochromatique représente donc la composante élémentaire d'un paquet d'ondes.

2.1 Retour sur l'équation d'onde scalaire

2.1.1 Solution unidimensionnelle

Soit l'équation d'onde suivante vérifiée par la fonction $u(x,t)$: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$

Les solutions s'écrivent sous la forme d'OPP telles que : $u(x,t) = f_1\left(t - \frac{x}{v}\right) + f_2\left(t + \frac{x}{v}\right)$

On suppose que la propagation se fait selon les x croissants, ce qui donne : $u(x,t) = f_1\left(t - \frac{x}{v}\right)$

L'onde plane progressive monochromatique associée s'écrit sous la forme :

$$u(x,t) = u_0 \cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) + \varphi_0\right) = u_0 \cos(\omega t - kx + \varphi_0) = u_0 \cos\left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{2\pi}{\lambda}x + \varphi_0\right)$$

On voit donc apparaître une **double-périodicité** de la phase :

- en fonction du temps :

Pour un x donné, la fonction $u(x,t)$ est une fonction sinusoïdale du temps de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$

- en fonction de l'espace :

Pour un t donné, la fonction $u(x,t)$ est une fonction sinusoïdale de la coordonnée x de période

spatiale, λ , appelée la longueur d'onde telle que : $\lambda = \frac{2\pi}{k} = vT$

2.1.2 Solution 3D

Soit l'équation d'onde suivante vérifiée par la fonction $u(x, y, z, t) : \Delta u - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$

L'OPPM solution s'écrira par analogie sous la forme suivante : $u(x, y, z, t) = u_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_0)$

où $\vec{k} = k\vec{n}$ représente le vecteur d'onde dirigé selon la direction de propagation donnée par le vecteur unitaire \vec{n}

où \vec{r} représente le vecteur position tel que : $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = xu_x + yu_y + zu_z$ en coordonnées cartésiennes.

Définition :

Une onde plane progressive est dite **monochromatique** si c'est une fonction sinusoïdale de fréquence f (ou pulsation ω). Une OPMP se propageant à la vitesse v selon la direction donnée par un vecteur unitaire \vec{n} s'écrit sous la forme :

$$u(x, y, z, t) = u_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_0) \tag{5}$$

La phase de l'OPPM est donnée par :

$$\phi = \omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_0 \tag{6}$$

Elle est caractérisée par : - sa **pulsation**, ω , ou sa **fréquence**, f, ou sa période temporelle, T:

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \tag{7}$$

- son **vecteur d'onde**, \vec{k} , ou sa **longueur d'onde**, λ :

$$\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \vec{n} = \frac{\omega}{c} \vec{n} \tag{8}$$

Elle présente une **double-périodicité** temporelle de période T et spatiale de période λ .

2.1.3 Notation complexe

On peut écrire la solution complexe sous la forme :

$$\underline{u}(x, y, z, t) = \underline{U}(x, y, z) e^{j\omega t} \text{ avec } \underline{U}(x, y, z) = u_0 e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}} e^{j\varphi_0} \text{ où } u(x, y, z, t) = \Re[\underline{u}(x, y, z, t)]$$

2.2 Application au champ électromagnétique

2.2.1 Propagation unidimensionnelle

Pour une OPP, les champs électrique et magnétique sont toujours transverses. On suppose de plus que la propagation est unidimensionnelle selon les x croissants. Alors :

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} 0 \\ E_y \left(t - \frac{x}{c} \right) \\ E_z \left(t - \frac{x}{c} \right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ E_{0y} \cos(\omega t - kx + \varphi_{0y}) \\ E_{0z} \cos(\omega t - kx + \varphi_{0z}) \end{pmatrix} \text{ et } \vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ B_y \left(t - \frac{x}{c} \right) \\ B_z \left(t - \frac{x}{c} \right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ B_{0y} \cos(\omega t - kx + \varphi'_{0y}) \\ B_{0z} \cos(\omega t - kx + \varphi'_{0z}) \end{pmatrix}$$

Si, de plus l'onde est dite polarisée rectilignement, cela veut dire que le vecteur champ électrique a une direction de polarisation fixée (voir paragraphe suivant). On peut donc supposer que le champ électrique est polarisé rectilignement suivant Oy, ce qui donne :

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} 0 \\ E_{0y} \cos(\omega t - kx + \varphi_{0y}) \\ 0 \end{pmatrix} = E_{0y} \cos(\omega t - kx + \varphi_{0y}) \vec{u}_y$$

$$\text{Alors : } \vec{B} = \frac{1}{c} \vec{u}_x \wedge \vec{E} = \frac{1}{c} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ E_{0y} \cos(\omega t - kx + \varphi_{0y}) \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{E_{0y}}{c} \cos(\omega t - kx + \varphi_{0y}) \vec{u}_z \Rightarrow \begin{cases} B_{0z} = \frac{E_{0y}}{c} \\ \varphi'_{0z} = \varphi_{0y} \end{cases}$$

2.2.2 Propagation 3D

Les champs se mettent alors sous la forme :

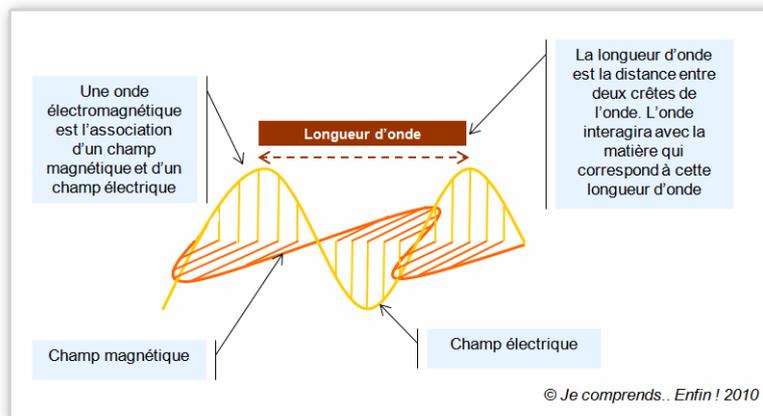
$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_{0x} \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_{0x}) \\ E_{0y} \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_{0y}) \\ E_{0z} \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_{0z}) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{B} = \begin{pmatrix} B_{0x} \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi'_{0x}) \\ B_{0y} \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi'_{0y}) \\ B_{0z} \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi'_{0z}) \end{pmatrix}$$

Alors : $\vec{B} = \frac{1}{c} \vec{n} \wedge \vec{E} = \frac{1}{\omega c} \vec{n} \wedge \vec{E} = \frac{1}{\omega} \vec{k} \wedge \vec{E}$: le trièdre $(\vec{k}, \vec{E}, \vec{B})$ est direct

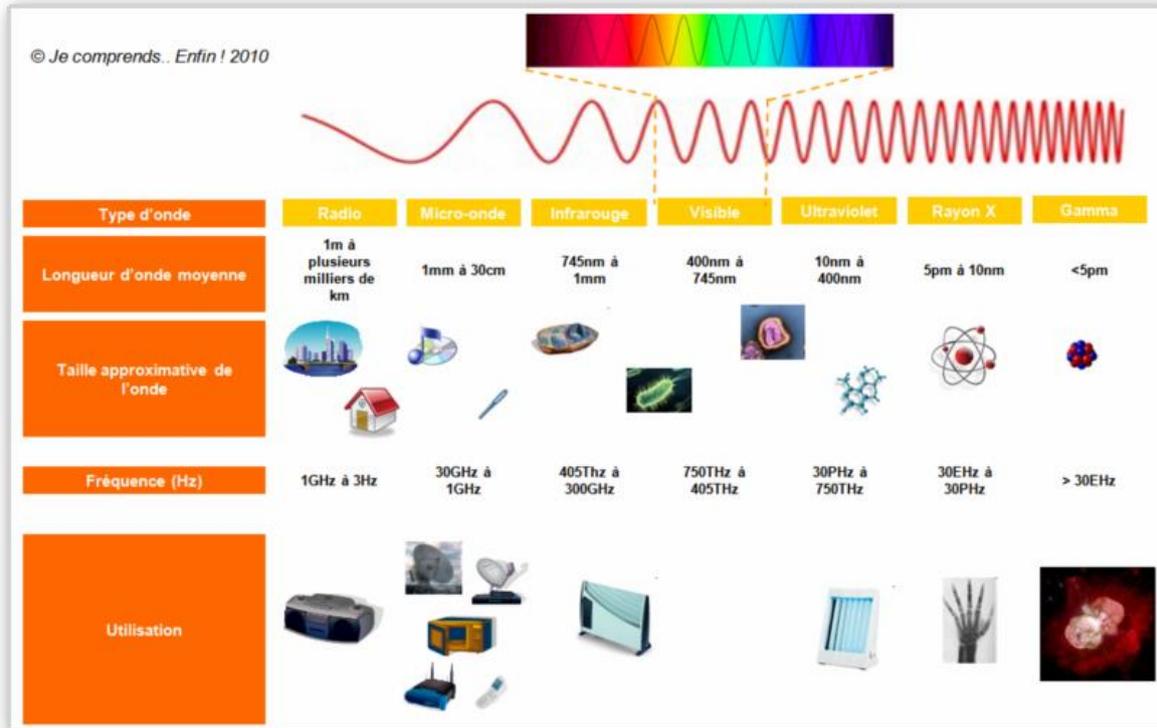
Propriété :

Pour une onde plane progressive monochromatique de direction de propagation donnée par le vecteur unitaire \vec{n} , les champs électrique et magnétique sont **transverses**. Ils forment avec le vecteur d'onde un trièdre direct.

$$\vec{B} = \frac{1}{\omega} \vec{k} \wedge \vec{E} \tag{9}$$



Quelques valeurs de fréquence et de longueur d'onde pour les ondes électromagnétiques :



2.2.3 Notation complexe

Pour une OPPM, le champ électromagnétique peut s'écrire à l'aide de la notation complexe tel que :

$$\vec{E} = \underline{\underline{E_0}} e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \quad \text{avec} \quad \underline{\underline{E_0}} = \begin{pmatrix} E_{0x} e^{j\phi_{0x}} \\ E_{0y} e^{j\phi_{0y}} \\ E_{0z} e^{j\phi_{0z}} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{B} = \underline{\underline{B_0}} e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \quad \text{avec} \quad \underline{\underline{B_0}} = \begin{pmatrix} B_{0x} e^{j\phi'_{0x}} \\ B_{0y} e^{j\phi'_{0y}} \\ B_{0z} e^{j\phi'_{0z}} \end{pmatrix}$$

Pour un champ électrique polarisé rectilignement suivant Oy, cela donne :

$$\vec{E} = \underline{\underline{E_0}} e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \quad \text{avec} \quad \underline{\underline{E_0}} = E_{0y} e^{j\phi_{0y}} \vec{u}_y \quad \text{et} \quad \vec{B} = \underline{\underline{B_0}} e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \quad \text{avec} \quad \underline{\underline{B_0}} = \begin{pmatrix} -\frac{k_z E_{0y}}{\omega} e^{j\phi_{0y}} \\ 0 \\ \frac{k_x E_{0y}}{\omega} e^{j\phi_{0y}} \end{pmatrix}$$

On peut aussi simplifier les équations de Maxwell en utilisant les propriétés suivantes :

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = j\omega \vec{E} \quad \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\omega^2 \vec{E} \quad \frac{\partial \vec{E}}{\partial x} = -jk_x \vec{E} \quad \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} = -k_x^2 \vec{E}$$

Ce qui donne pour les opérateurs différentiels sans faire aucune hypothèse sur le champ électrique :

$$\text{div} \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = -jk_x E_x - jk_y E_y - jk_z E_z = -j\vec{k} \cdot \vec{E}$$

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = \begin{pmatrix} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -jk_y E_z + jk_z E_y \\ -jk_z E_x + jk_x E_z \\ -jk_x E_y + jk_y E_x \end{pmatrix} = -j \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = -j \vec{k} \wedge \vec{E}$$

$$\Delta \vec{E} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k_x^2 E_x - k_y^2 E_x - k_z^2 E_x \\ -k_x^2 E_y - k_y^2 E_y - k_z^2 E_y \\ -k_x^2 E_z - k_y^2 E_z - k_z^2 E_z \end{pmatrix} = -(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = -k^2 \vec{E}$$

Alors les équations de Maxwell se simplifient en :

$$\begin{cases} (MG) \text{ div} \vec{E} = 0 \\ (MA) \text{ rot} \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ (MT) \text{ div} \vec{B} = 0 \\ (MF) \text{ rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (MG) \vec{k} \cdot \vec{E} = 0 \\ (MA) -j \vec{k} \wedge \vec{B} = j \omega \mu_0 \epsilon_0 \vec{E} \\ (MT) -j \vec{k} \cdot \vec{B} = 0 \\ (MF) -j \vec{k} \wedge \vec{E} = -j \omega \vec{B} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (MG) \vec{k} \cdot \vec{E} = 0 \quad (MA) \vec{k} \wedge \vec{B} = -\frac{\omega}{c^2} \vec{E} \\ (MT) \vec{k} \cdot \vec{B} = 0 \quad (MF) \vec{k} \wedge \vec{E} = \omega \vec{B} \end{aligned} \tag{10}$$

$$\vec{k} \cdot \vec{E} = 0 \Rightarrow \vec{k} \text{ est perpendiculaire à } \vec{E}$$

La structure d'une OPPM s'en déduit immédiatement : $\vec{k} \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow \vec{k} \text{ est perpendiculaire à } \vec{B}$

$$\vec{k} \wedge \vec{E} = \omega \vec{B} \Rightarrow \vec{B} = \frac{\vec{k}}{\omega} \wedge \vec{E}$$

L'équation de propagation se met sous la forme :

$$\vec{k} \wedge (\vec{k} \wedge \vec{E}) = \vec{k} \wedge (\omega \vec{B}) \Rightarrow \underbrace{(\vec{k} \cdot \vec{E})}_{=0} \vec{k} - (\vec{k} \cdot \vec{k}) \vec{E} = \omega (\vec{k} \wedge \vec{B})$$

$$-k^2 \vec{E} = \omega \left(-\frac{\omega}{c^2} \vec{E} \right) \Rightarrow \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right) \vec{E} = \vec{0} \Leftrightarrow \Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

Propriété :

Dans le vide, dans une région sans charges ni courants, le modèle de l'OPPH conduit à la **relation de dispersion** :

$$k = \frac{\omega}{c} \tag{11}$$

2.3 Aspect énergétique

On se propose de regarder comme évolue les considérations énergétiques pour une OPPM se

propageant selon les x croissants et polarisée selon Oy :

$$\begin{cases} \vec{E} = E_{0y} \cos(\omega t - kx + \varphi_{0y}) \vec{u}_y \\ \vec{B} = \frac{E_{0y}}{c} \cos(\omega t - kx + \varphi_{0y}) \vec{u}_z \end{cases}$$

Il est nécessaire de repasser en réels pour effectuer cette étude car elle fait intervenir les carrés des champs. Prendre la partie réelle d'un carré n'est pas la même chose que prendre le carré de la partie réelle d'un nombre complexe.

2.3.1 Densité volumique d'énergie électromagnétique

Le champ électromagnétique transporte une densité volumique d'énergie égale à :

$$u = \varepsilon_0 E^2 = \varepsilon_0 E_{0y}^2 \cos^2(\omega t - kx + \varphi_{0y})$$

Les détecteurs sont le plus souvent sensibles à la valeur moyenne de l'énergie qui est : $\langle u \rangle = \frac{\varepsilon_0 E_{0y}^2}{2}$

On peut alors noter que cette moyenne est constante. En effet, l'OPPM possède la même amplitude de vibration en tout point de l'espace. Si l'on voulait calculer l'énergie moyenne dans tout l'espace de l'OPPM, on s'apercevrait que cette énergie tend vers l'infini. En effet, l'OPPM n'a aucune réalité physique, elle n'est qu'un modèle, soit une composante d'un paquet d'onde. Une onde réelle est une superposition d'OPPM.

2.3.2 Vecteur de Poynting

Le vecteur de Poynting s'écrit alors :

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{1}{\mu_0 c} E_{0y}^2 \cos^2(\omega t - kx + \varphi_{0y}) \vec{u}_x = c \varepsilon_0 E_{0y}^2 \cos^2(\omega t - kx + \varphi_{0y}) \vec{u}_x$$

Sa valeur moyenne est alors de : $\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{c \varepsilon_0 E_{0y}^2}{2} \vec{u}_x$

3 Etats de polarisation d'une onde plane progressive monochromatique

3.1 Polarisation elliptique

Définition :

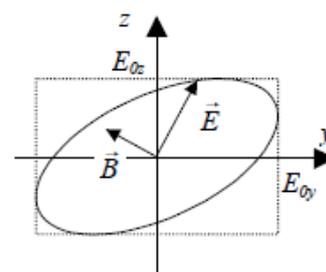
La **polarisation** d'une OPPH est définie à partir de son vecteur \vec{E} , comme la nature de la courbe décrite par l'extrémité de \vec{E} dans un plan d'onde. Par convention, l'observateur est supposé faire face au champ électromagnétique qui progresse donc vers lui.

Pour une propagation selon les x croissants, il est commode de se placer dans le plan x = 0 et de décrire l'évolution du vecteur \vec{E} dans ce plan.

En choisissant convenablement, une origine des temps, on peut se ramener aux expressions suivantes :

$$\vec{E} = \begin{cases} 0 \\ E_y = E_{0y} \cos(\omega t) \\ E_z = E_{0z} \cos(\omega t - \varphi) \end{cases} \quad \text{avec } \varphi = \varphi_y - \varphi_z$$

On reconnaît la représentation paramétrique d'une ellipse qui donne l'état de polarisation le plus général d'une OPPM.

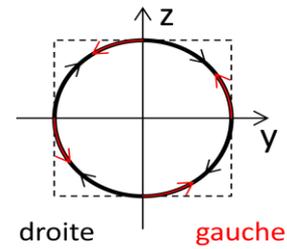


3.2 Polarisation circulaire

L'ellipse précédente devient un cercle si les vibrations sur les deux axes ont la même amplitude et sont en quadrature l'une par rapport à l'autre : $\varphi = \pm \pi/2$ et $E_{0y} = E_{0z}$

Polarisation circulaire

$$\varphi = -\pi/2 \text{ ou } +\pi/2$$



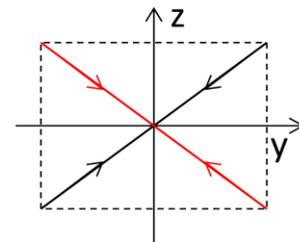
3.3 Polarisation rectiligne

L'ellipse précédente devient une droite si les vibrations sur les deux axes sont en phase ou en opposition de phase l'un par rapport à l'autre : $\varphi = 0$ ou π .

Un champ électrique polarisé rectilignement est toujours colinéaire à une même direction donnée.

Polarisation rectiligne

$$\varphi = 0 \text{ ou } \pm \pi$$



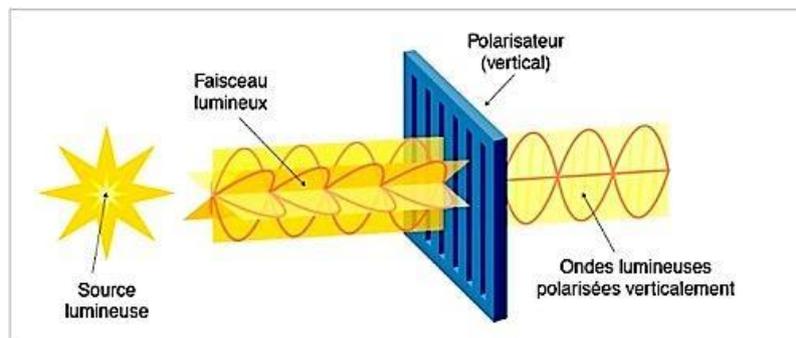
3.4 Mise en évidence d'une polarisation rectiligne

L'onde électromagnétique étudiée est l'onde lumineuse. On utilise une source monochromatique (laser). L'onde obtenue n'a aucune raison d'être polarisée. Nous allons donc essayer de produire une polarisation rectiligne et de le mettre en évidence.

3.4.1 Production de la polarisation rectiligne

On utilise un polariseur. C'est un système optique possédant deux directions privilégiées. L'une d'entre elles, appelée axe de transmission, est telle que le polariseur transmet la composante du champ électrique incident parallèle à l'axe de transmission. La seconde perpendiculaire à la première et est appelée axe d'extinction, le polariseur arrête la composante du champ électrique parallèle à cette direction.

On place donc ce polariseur devant la source de lumière. La lumière sortant du polariseur sera polarisée rectilignement parallèlement à la direction de l'axe de transmission.



3.4.2 Mise en évidence de la polarisation rectiligne

On place maintenant un autre polariseur à la suite du premier. Ce second polariseur sera nommé analyseur. Les axes de transmissions respectifs des deux polariseurs forment entre eux un angle α .

Si l'on nomme \vec{n}_1 la direction de polarisation du champ électrique \vec{E}_1 après le premier polariseur et \vec{n}_2 la direction de polarisation du champ électrique \vec{E}_2 après l'analyseur, alors :

$$\vec{E}_1 = E_1 \vec{u}_1 \quad \text{et} \quad \vec{E}_2 = E_2 \vec{u}_2 = E_1 \cos \alpha \vec{u}_2$$

Ainsi, si $\alpha = \frac{\pi}{2}$ le champ électrique à la sortie de l'analyseur est nul.

On peut ainsi mettre en évidence de manière très simple une polarisation rectiligne.

4 Réflexion sous incidence normale d'une OPPM polarisée rectilignement sur un plan conducteur parfait

4.1 Modèle du conducteur parfait

Un milieu est dit conducteur si sous l'action d'un champ électrique, un courant de conduction se met en place. Le conducteur satisfait la loi d'Ohm locale dans une large gamme de fréquence ($f < 10^{14}$ Hz). Soit γ sa conductivité : $\vec{j} = \gamma \vec{E}$

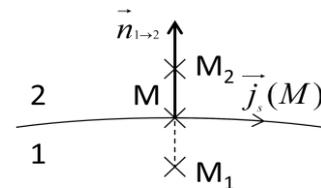
Définition :

Dans un conducteur parfait, la conductivité est très grande et on la considère infinie :

$$\gamma \rightarrow +\infty \Rightarrow \vec{E} \rightarrow \vec{0}, \quad \rho \rightarrow 0, \quad \vec{B} \rightarrow \vec{0}, \quad \vec{j} = \vec{0}$$

4.2 Relation de passage entre deux milieux

On considère une interface entre deux demi-espaces indicés 1 et 2 et l'on note $\vec{n}_{1 \rightarrow 2}$ la normale en un point M de cette surface, orientée du milieu 1 vers le milieu 2. On définit deux points M_1 et M_2 dans chaque demi-espace au voisinage du point M.



Soit $\sigma(M)$ la densité surfacique de charge au point M, la relation suivante résume la relation de

passage du champ électrique à la traversée de la surface :
$$\vec{E}(M_2) - \vec{E}(M_1) = \frac{\sigma(M)}{\epsilon_0} \vec{n}_{1 \rightarrow 2}$$

Soit $\vec{j}_s(M)$ la densité surfacique de courants ($A.m^{-1}$) au point M, la relation suivante résume la relation de passage du champ magnétique à la traversée de la surface :

$$\vec{B}(M_2) - \vec{B}(M_1) = \mu_0 \vec{j}_s(M) \wedge \vec{n}_{1 \rightarrow 2}$$

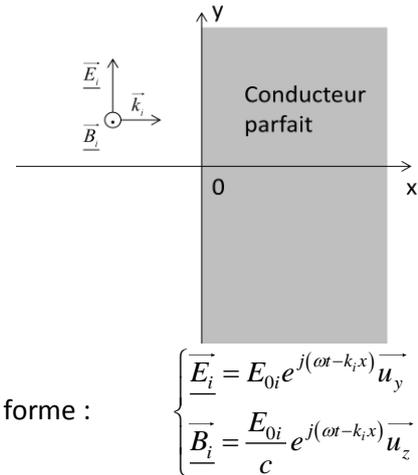
Remarques :

La composante tangentielle du champ électrique est toujours continue. La composante normale est discontinue.

La composante normale du champ magnétique est toujours continue. La composante tangentielle est discontinue.

4.3 Onde incidente

Soit une onde électromagnétique incidente polarisée rectilignement selon Oy se propageant dans le vide dans une région sans charges ni courants selon l'axe Ox croissant dans le demi-espace $x < 0$. En $x = 0$, dans le plan Oyz, se trouve un conducteur parfait. Pour simplifier l'étude, on suppose sa phase à l'origine nulle.



En utilisant la notation complexe, l'onde incidente se met sous la forme :

4.4 Onde réfléchie

Or, dans le conducteur parfait le champ électromagnétique est nul. Mais il doit aussi respecter la

relation de passage suivante : $\vec{E}_{vide}(x=0) - \vec{E}_{cond\ parf}(x=0) = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_x$

Ce qui donne en projetant selon Oy : $E_{vide}(x=0) \vec{u}_y - \vec{0} = \vec{0}$

On note que la densité surfacique de charges est donc aussi nécessairement nulle : $\sigma = 0$.

Le champ électrique doit donc aussi être nul en tout point du vide à proximité de la surface $x = 0$. Il faut donc qu'à l'onde incidente se superpose une autre onde, appelée onde réfléchie.

L'onde réfléchie s'écrit sous la forme :
$$\begin{cases} \vec{E}_r = E_{0r} \cos(\omega t - k_r x) \vec{u}_y \\ \vec{B}_r = B_{0r} \cos(\omega t - k_r x) \vec{u}_z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{E}_r = E_{0r} e^{j(\omega t - k_r x)} \vec{u}_y \\ \vec{B}_r = B_{0r} e^{j(\omega t - k_r x)} \vec{u}_z \end{cases}$$

Que ce soit l'onde incidente ou l'onde réfléchie, les champs se propagent à la même vitesse dans le vide avec la même pulsation et possèdent donc le même module du vecteur d'onde. L'onde réfléchie

se propage selon les x décroissants, on a donc : $\vec{k}_r = -\vec{k}_i \Rightarrow \begin{cases} \vec{E}_r = E_{0r} e^{j(\omega t + k_i x)} \vec{u}_y \\ \vec{B}_r = -\frac{E_{0r}}{c} e^{j(\omega t + k_i x)} \vec{u}_z \end{cases}$

Pour trouver les relations entre les amplitudes des champs incidents et réfléchis, il faut réutiliser la relation de passage en $x = 0$: $\vec{E}_{vide}(x=0) = \vec{E}_i(x=0) + \vec{E}_r(x=0)$

Le champ électrique est donc entièrement réfléchi avec un déphasage de π :

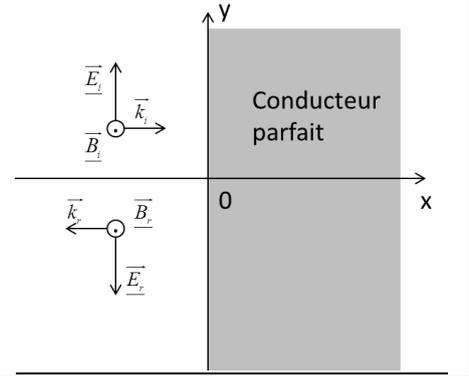
$$E_{0r} e^{j(\omega t)} \vec{u}_y = -E_{0i} e^{j(\omega t)} \vec{u}_y \Rightarrow E_{0r} = -E_{0i} \Rightarrow \vec{E}_r = -E_{0i} e^{j(\omega t + k_i x)} \vec{u}_y$$

Alors, on a pour le champ magnétique : $\vec{B}_r = -\frac{E_{0r}}{c} e^{j(\omega t + k_i x)} \vec{u}_z = \frac{E_{0i}}{c} e^{j(\omega t + k_i x)} \vec{u}_z$

Soit au final :
$$\begin{cases} \vec{E}_r = -E_{0i} \cos(\omega t + k_i x) \vec{u}_y \\ \vec{B}_r = \frac{E_{0i}}{c} \cos(\omega t + k_i x) \vec{u}_z \end{cases}$$

Propriété :

La réflexion d'une onde électromagnétique sous incidence normale sur un conducteur parfait est une réflexion totale avec un déphasage de π du champ électrique et un déphasage nul pour le champ magnétique. Il n'y a pas de charges surfaciques.



4.5 Superposition des ondes incidente et réfléchi

La superposition des deux ondes incidentes et réfléchies donne :

$$\vec{E}_{\text{vide}} = \vec{E}_i + \vec{E}_r = E_{0i} e^{j(\omega t - k_i x)} \vec{u}_y - E_{0i} e^{j(\omega t + k_i x)} \vec{u}_y = E_{0i} e^{j\omega t} (e^{-jk_i x} - e^{jk_i x}) \vec{u}_y = -2jE_{0i} e^{j\omega t} \sin(k_i x) \vec{u}_y$$

D'où en notation réelle : $\vec{E} = 2E_{0i} \sin(\omega t) \sin(k_i x) \vec{u}_y$

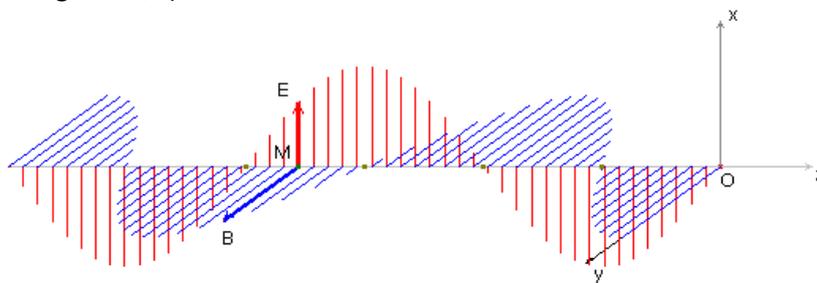
Et pour le champ magnétique :

$$\vec{B} = \vec{B}_i + \vec{B}_r = \frac{E_{0i}}{c} e^{j(\omega t - k_i x)} \vec{u}_z + \frac{E_{0i}}{c} e^{j(\omega t + k_i x)} \vec{u}_z = \frac{E_{0i}}{c} e^{j\omega t} (e^{-jk_i x} + e^{jk_i x}) \vec{u}_z = \frac{2E_{0i}}{c} e^{j\omega t} \cos(k_i x) \vec{u}_z$$

D'où en notation réelle : $\vec{B} = \frac{2E_{0i}}{c} \cos(\omega t) \cos(k_i x) \vec{u}_z$

Les dépendances spatiale et temporelle sont séparées : l'onde résultante est une onde stationnaire. L'onde ne se propage plus. Elle oscille sur place.

Les champs électrique et magnétiques restent orthogonaux mais sont en quadrature spatiale et temporelle (déphasage de $\pi/2$).



En certains points (appelés nœuds de vibrations), le champ est toujours nul. Ainsi, pour le champ électrique : $\|\vec{E}\| = 0 \Rightarrow \sin(k_i x) = 0 \Rightarrow k_i x_n = n\pi \quad n \in \mathbb{Z}$

Or, d'après la relation entre le vecteur d'onde et la longueur d'onde :

$$k_i = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda} x_n = n\pi \Rightarrow x_n = n \frac{\lambda}{2}$$

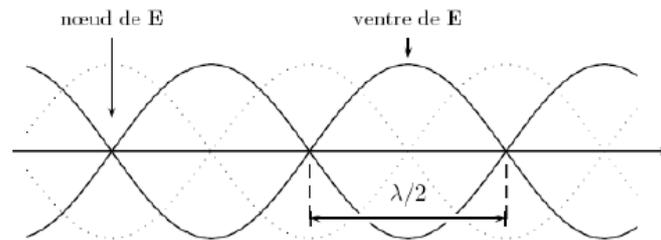
La distance entre deux nœuds successifs est $\lambda/2$.

En d'autres points (appelés ventres de vibrations), l'amplitude de vibration est maximale. Ainsi, pour

le champ électrique : $\|\vec{E}\| = \max \Rightarrow \sin(k_i x) = \pm 1 \Rightarrow k_i x_v = (2n+1) \frac{\pi}{2} \quad n \in \mathbb{Z}$

$$\frac{2\pi}{\lambda} x_v = (2n+1) \frac{\pi}{2} \Rightarrow x_v = (2n+1) \frac{\lambda}{4}$$

La distance entre deux ventres successifs est $\lambda/2$ et la distance entre un nœud et un ventre successif est $\lambda/4$. Les nœuds du champ électrique sont les ventres du champ magnétique et vice-versa.



4.6 Aspect énergétique

Le vecteur de Poynting associé à l'onde incidente est : $\vec{\Pi}_i = c\epsilon_0 E_i^2 \vec{u}_x \Rightarrow \langle \vec{\Pi}_i \rangle = \frac{c\epsilon_0 E_i^2}{2}$

Le vecteur de Poynting associé à l'onde réfléchi est : $\vec{\Pi}_r = -c\epsilon_0 E_i^2 \vec{u}_x \Rightarrow \langle \vec{\Pi}_r \rangle = \frac{c\epsilon_0 E_i^2}{2}$

Toute l'énergie véhiculée par l'onde incidente se retrouve dans l'onde réfléchi. Le métal parfait ne dissipe pas d'énergie et la réfléchit totalement : c'est un miroir idéal.

En particulier, l'onde stationnaire résultante ne transporte pas d'énergie :

$$\vec{\Pi} = \frac{1}{\mu_0} \left(2E_{0i} \sin(\omega t) \sin(k_i x) \vec{u}_y \right) \wedge \left(2 \frac{E_{0i}}{c} \cos(\omega t) \cos(k_i x) \vec{u}_z \right) = \frac{E_{0i}}{\mu_0 c} \sin(2\omega t) \sin(2k_i x) \vec{u}_x$$

$$\Rightarrow \langle \vec{\Pi} \rangle = \vec{0}$$

4.7 Courant surfacique

La relation de passage en $x = 0$ pour le champ magnétique est donnée par :

$$\vec{B}_{vide}(x=0) - \vec{B}_{cond\ parf}(x=0) = \mu_0 \vec{j}_s \wedge (-\vec{u}_x)$$

Son application donne :

$$\left(\vec{B}_i(x=0) + \vec{B}_r(x=0) \right) - \vec{0} = \left(\frac{E_{0i}}{c} e^{j(\omega t)} \vec{u}_z + \frac{E_{0i}}{c} e^{j(\omega t)} \vec{u}_z \right) = \frac{2E_{0i}}{c} e^{j(\omega t)} \vec{u}_z = \mu_0 \vec{u}_x \wedge \vec{j}_s \Rightarrow$$

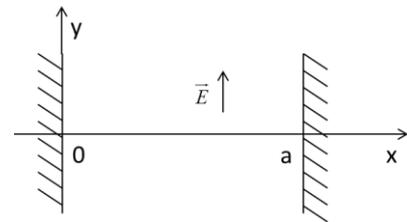
$$\vec{j}_s = \frac{2E_{0i}}{\mu_0 c} e^{j(\omega t)} \vec{u}_y$$

La réflexion d'une onde plane progressive monochromatique sous incidence normale sur un plan conducteur parfait induit ainsi un courant surfacique non nul de même direction que le champ incident. En effet, les électrons sont mis en mouvement par le champ électrique. Ces courants sont à leur tour une source du champ électromagnétique, ils sont à l'origine du champ réfléchi. Ceci explique que le champ réfléchi soit de même pulsation que le champ incident. Ces courants engendrent exactement le même champ dans la partie $x > 0$ qui se propage selon $+Ox$. Mais ce champ est en opposition de phase avec le champ incident, ce qui explique la nullité du champ résultant dans le conducteur parfait.

5 Applications aux cavités à une dimension

5.1 Position du problème

On considère une cavité vide taillée à l'intérieur d'un conducteur parfait entre les abscisses $x = 0$ et $x = a$. Un émetteur engendre en continu une onde électromagnétique arrivant en incidence normale sur la face $x = a$. L'onde est alors réfléchiée ; elle se propage en sens inverse jusqu'à rencontrer l'autre face $x = 0$. Elle est à nouveau réfléchiée et le processus se répète indéfiniment. On comprend alors que l'onde résultante possède une structure stationnaire, vu la superposition d'ondes progressives de sens de propagation opposés et de même amplitude.



5.2 Expression du champ électrique

On peut repartir de l'expression trouvée à la partie précédente : $\vec{E} = E_0 \sin(\omega t) \sin(kx) \vec{u}_y$

Il reste à vérifier les conditions aux limites, par application des relations de passage suivantes :

$$\text{en } x = 0 : \left(\vec{E}(x=0) \right) - \vec{0} = E_0 \sin(\omega t) \sin(k \cdot 0) \vec{u}_y = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_x = \vec{0}$$

$$\text{en } x = a : \left(\vec{E}(x=a) \right) - \vec{0} = E_0 \sin(\omega t) \sin(ka) \vec{u}_y = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_x = \vec{0}$$

La première relation est déjà vérifiée. En partant de la seconde, on arrive :

$$\sin(ka) = 0 \Rightarrow k_p a = p\pi \quad p \in \mathbb{N} \Rightarrow k_p = \frac{p\pi}{a} \quad p \in \mathbb{N}$$

$$\text{Or, on peut relier } k \text{ à } \omega \text{ par : } \omega_p = ck_p = c \frac{p\pi}{a} \quad p \in \mathbb{N}$$

Donc l'expression finale du champ électrique dans la cavité est donné par :

$$\vec{E} = E_0 \sin\left(p\pi \frac{ct}{a}\right) \sin\left(p\pi \frac{x}{a}\right) \vec{u}_y$$

En fonction de la valeur de p , l'amplitude du champ électrique en fonction de x prend différentes formes. L'entier p est appelé mode propre de l'onde stationnaire.

$$\text{La longueur d'onde du mode } p \text{ sera donnée par : } \lambda_p = \frac{2a}{p} \text{ et sa fréquence associée : } f_p = p \frac{c}{2a}.$$

On remarque que la longueur d'onde des ondes pouvant existées dans la cavité est directement liée à la taille de la cavité. La distance entre deux nœuds est donnée par :

$$\sin(k_p x_n) = 0 \Rightarrow k_p x_n = \frac{p\pi}{a} x_n = n\pi \Rightarrow x_n = \frac{n}{p} a = n \frac{\lambda_p}{2} \quad n \in \mathbb{Z} \quad p \in \mathbb{N}$$

Ainsi, si un émetteur engendre une onde dans la cavité. Celle-ci va se réfléchir successivement sur les faces de la cavité. Si sa fréquence correspond à l'une des fréquences propres, l'onde se maintiendra. On parle d'interférences constructives. Si sa fréquence est différente, l'onde se déphasera au fur et à mesure et au total la superposition de tous ces champs sera nulle. On parle d'interférences destructives.