Transfert d'énergie par conduction thermique

1 Les différents modes de transfert thermique

1.1 Conduction thermique

La **conduction thermique** (ou diffusion thermique) est un mode de transfert thermique provoqué par une différence de température entre deux régions d'un même milieu se réalisant **sans déplacement global de la matière**.
D'un point de vue microscopique, elle s'interprète à l'aide de l'**agitation thermique** des atomes et molécules du milieu.
La conduction thermique cause le transfert d'énergie thermique **des zones de températures élevées vers** les zones de températures plus **basses**. Le phénomène de conduction thermique est donc **irréversible**.

1.2 Convection thermique

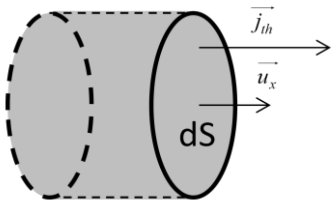
La convection est attribuée à un déplacement global (macroscopique) de matière et concerne les liquides ou les gaz.

1.3 Rayonnement thermique

Ce mode de transfert thermique ne nécessite pas la présence d'un milieu matériel. De l'énergie thermique se propage par exemple dans le vide entre le Soleil et la Terre sous forme d'ondes électromagnétiques.

2 Densité de flux thermique

Dans ce cours, nous nous limiterons à l'étude de la conduction thermique dans un solide dans le cas d'un problème unidimensionnel selon (Ox).



<u>Définition</u> :
On appelle **flux thermique** élémentaire $d\Phi(x,t)$ ou puissance thermique élémentaire $dP_{th}(x,t)$ (en W) la quantité d'énergie élémentaire qui traverse une surface élémentaire dS par unité de temps. On peut le relier au transfert thermique élémentaire $\delta Q(x,t)$ (en J) par :

$$\delta Q(x,t) = d\Phi(x,t)dt = dP_{th}(x,t)dt \qquad (1)$$

<u>Définition</u> :
Le phénomène de conduction thermique est modélisé par un vecteur, $\overrightarrow{j_{th}} = j_{th}(x,t)\overrightarrow{u_x}$ appelé **vecteur densité de flux thermique** (ou courant thermique) (en $W.m^{-2}$), dont la direction est celle du déplacement de proche en proche de l'énergie thermique et dont la norme est d'autant plus grande que la quantité d'énergie déplacée est grande. On le relie au flux thermique élémentaire traversant

dS pendant dt par :

$$d\Phi(x,t) = j_{th}(x,t)dS \quad (2)$$

Remarques :

Pour trouver le flux thermique à travers toute la surface Σ du solide : $\Phi(x,t) = \iint_{\Sigma} j_{th}(x,t)dS$.

Dans le cas où le problème n'est plus unidimensionnel : $\Phi = \iint_{\Sigma} \overrightarrow{j_{th}} \cdot \overrightarrow{dS}$.

On dit que puissance thermique est égale au flux du vecteur densité de flux thermique $\overrightarrow{j_{th}}$, d'où le nom de flux thermique.

La puissance thermique sera comptée positivement si le vecteur densité de flux thermique est orienté dans le même sens que la normale à la surface.

3 Loi de Fourier

Cette loi a été expérimentalement établie par Fourier en 1822. C'est donc une **loi phénoménologique** valable pour certains matériaux mais qui n'est pas universelle.

Loi de Fourier (cas unidimensionnel) :

Elle lie la température à l'intérieur du solide $T(x,t)$ et la densité de flux thermique à l'aide d'un coefficient de proportionnalité λ appelé **conductivité thermique** ($W.m^{-1}.K^{-1}$), telle que pour un problème selon (Ox), elle donne :

$$j_{th}(x,t) = -\lambda\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right) \quad (3)$$

Remarques :

La conductivité thermique λ est toujours positive. Elle peut dépendre de la température.

Le signe moins traduit l'orientation du vecteur densité de flux thermique vers les basses températures.

Elle correspond à une évolution spontanée du milieu qui tend à estomper son inhomogénéité, conformément au deuxième principe de la thermodynamique.

Loi de Fourier :

Dans le cas où le problème n'est plus unidimensionnel, on écrira cette relation à l'aide de l'opérateur différentiel gradient :

$$\overrightarrow{j_{th}} = -\lambda \overrightarrow{grad}T \quad (4)$$

Remarques :

On définit le gradient en coordonnées cartésiennes par : $\overrightarrow{grad}T = \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)\overrightarrow{e_x} + \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)\overrightarrow{e_y} + \left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)\overrightarrow{e_z}$

Ce vecteur $\overrightarrow{grad}T$ est donc normal aux surfaces de niveau (T = constante). Il est dirigé vers les valeurs croissantes de T.

On retrouvera le même type de loi dans la loi d'Ohm locale que l'on verra en électromagnétisme.

Ainsi, plus la conductivité thermique d'un solide est élevée, plus la norme du vecteur densité de flux thermique sera grande et plus il sera conducteur de chaleur.

Pour des isolants pour l'habitation, on cherchera donc à avoir une conductivité thermique faible.

Exemples de conductivité thermique :

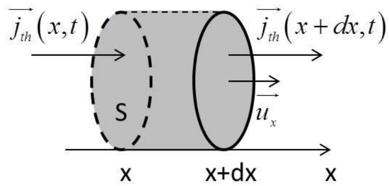
Matériau	Conductivité thermique en W.m^{-1}.K^{-1}
Métal bon conducteur (Ag, Cu)	400
Acier	40
Béton	1
Verre	0,8
Brique	0,8
Eau	0,6
Platre	0,5
Bois	0,2
Laine de Verre (isolant pour l'habitation)	0,04
Air (P et T usuelles)	0,03
Polystyrène expansé	0,004

4 Équation de la chaleur

4.1 Bilan enthalpique

Hypothèses :

On considère un corps homogène de masse volumique μ, de conductivité thermique λ et de capacité thermique massique c, sous la pression P.



Bilan sur un volume de longueur dx :

La pression étant constante, sans travail supplémentaire, on a : $dH = \delta Q$

En x, il entre une énergie : $\delta Q_e = \Phi(x,t)dt = j_{th}(x,t)Sdt$

En x+dx, il sort une énergie : $\delta Q_s = \Phi(x+dx,t)dt = j_{th}(x+dx,t)Sdt$

Le système reçoit donc l'enthalpie élémentaire suivante :

$$dH = \delta Q_e - \delta Q_s = \left(\Phi(x,t) - \Phi(x+dx,t)\right)dt = \left(j_{th}(x,t) - j_{th}(x+dx,t)\right)Sdt = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}dxdt = -\frac{\partial j_{th}}{\partial x}Sdxdt$$

Or, pour un solide : $dH = CdT = c\mu dVdT = c\mu SdxdT = c\mu Sdxdt\dfrac{\partial T}{\partial t}$

On trouve donc une **équation différentielle** liant la température dans le solide au vecteur densité de flux thermique.

$$\frac{\partial j_{th}}{\partial x} + c\mu\frac{\partial T}{\partial t} = 0 \qquad (5)$$

4.2 Equation de la chaleur sans terme source

On considère qu'il n'y a pas d'apport d'énergie autre que par conduction.

Loi de Fourier : $j_{th}(x,t) = -\lambda\left(\dfrac{\partial T}{\partial x}\right) \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \dfrac{c\mu}{\lambda}\dfrac{\partial T}{\partial t} = 0$

Equation de la chaleur ou équation de la diffusion thermique :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{c\mu}{\lambda}\frac{\partial T}{\partial t} = 0 \qquad (6)$$

Remarques :
Cette équation fait apparaître un paramètre scalaire qui dépend des propriétés du matériau et s'appelle **coefficient de diffusion** ou diffusivité thermique : $\kappa = \frac{\lambda}{\mu c}$. Ainsi, on a : $\kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{\partial T}{\partial t} = 0$

Sa dimension est $\frac{[longueur]^2}{[temps]}$.

Ordres de grandeur :

Matériau	Coefficient de diffusion en $m^2.s^{-1}$
Cuivre	117.10^{-6}
Acier	$10.\ 10^{-6}$
Bois	$0,16.10^{-6}$
Laine de verre	$1,42.10^{-6}$

4.3 Temps et longueur caractéristiques du phénomène de diffusion

Propriété :
La distance parcourue par le phénomène de diffusion est proportionnelle à la racine carrée du temps écoulé et liée à la diffusivité du matériau : $L \sim \sqrt{\kappa \tau}$

Remarque :
On aurait pu trouver ce résultat à partir de l'analyse dimensionnelle de la diffusivité.

4.4 Irréversibilité du phénomène

Propriété :
Un phénomène de diffusion thermique est **irréversible**. Il s'accompagne de production d'entropie.

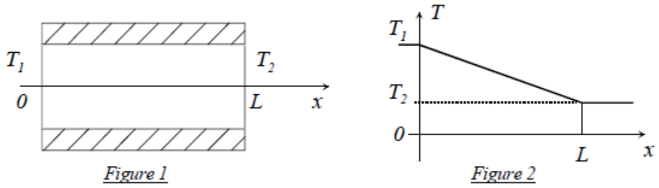
Remarque :
L'irréversibilité est liée à la dérivée première par rapport au temps. Le changement de variable $x' = -x \; et \; t' = -t$ modifie la forme de l'équation.

4.5 Résolution dans le cas du régime stationnaire

Régime stationnaire : $\frac{\partial T}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad T(x) = Ax + B$

On prend toujours le cas d'une tige pour rester avec un problème unidimensionnel. On suppose donc de plus qu'il n'y a aucun échange thermique entre la tige et le milieu extérieur par la surface latérale du cylindre (isolation thermique). Cette tige est cylindrique de section S, de longueur L et ses extrémités sont aux températures $T_1 \; et \; T_2 \; (T_1 > T_2)$. On utilise donc ces deux conditions aux limites pour déterminer la loi affine vérifiée par la température :

$$T(0) = T_1 = B \quad et \quad T(L) = T_2 = AL + T_1 \quad \Rightarrow \quad A = \frac{T_2 - T_1}{L} \quad \Rightarrow \quad T(x) = \frac{T_2 - T_1}{L} x + T_1$$



D'après la loi de Fourier : $j_{th} = -\lambda \left(\frac{dT}{dx} \right) = -\lambda \frac{T_2 - T_1}{L}$

Donc le flux thermique traversant la tige est égal à : $\Phi = \iint_{\Sigma} \overrightarrow{j_{th}} \cdot \overrightarrow{dS} = j_{th} S = -\lambda S \dfrac{T_2 - T_1}{L}$

On remarque que le flux thermique est constant.

4.6 Résistance thermique

Définition :

En régime stationnaire, on définit la résistance thermique R_{th} (en $K.W^{-1}$) de la tige comme :

$$R_{th} = \frac{T_1 - T_2}{\Phi} = \frac{L}{\lambda S} \qquad (7)$$

Remarques :

On trouve une relation analogue à la loi d'Ohm.

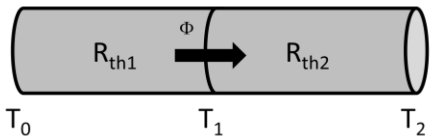
L'inverse de la résistance thermique s'appelle la conductance thermique : $G_{th} = \dfrac{1}{R_{th}}$.

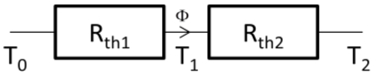
Propriétés :

On retrouve les mêmes lois d'association qu'en électricité.

Prenons deux tiges mises bout à bout (association en série). Sans pertes, le flux thermique qui les traverse est le même et on a donc :

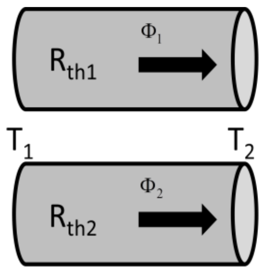
$$T_0 - T_2 = T_0 - T_1 + T_1 - T_2 = R_{th1}\Phi + R_{th2}\Phi = R_{th1+2}\Phi \quad avec \quad R_{th1+2} = R_{th1} + R_{th2}$$

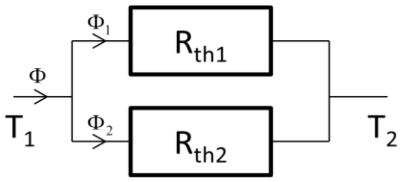




Prenons maintenant deux tiges dont les températures extrêmes sont les mêmes (association en parallèle). On définit le flux thermique total comme la somme des deux flux : $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$ alors :

$$T_1 - T_2 = R_{th1}\Phi_1 = R_{th2}\Phi_2 \quad \Rightarrow \quad T_1 - T_2 = R_{th1\|2}\Phi \quad avec \quad R_{th1\|2} = \frac{R_{th1}R_{th2}}{R_{th1} + R_{th2}}$$

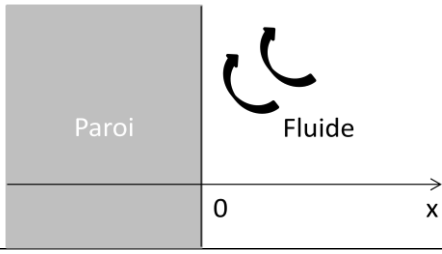




Analogie :

Electrique	**Thermique**
Potentiel V	Température T
Courant I	Flux thermique Φ
Conductivité électrique σ	Conductivité thermique λ
Loi d'Ohm locale $\vec{j} = -\sigma \overrightarrow{grad}V \quad ou \quad \vec{j} = \sigma \vec{E}$	Loi de Fourier $\overrightarrow{j_{th}} = -\lambda \overrightarrow{grad}T$

5 Transfert conducto-convectif : loi de Newton



Position du problème :
Nous considérons ici le cas où le matériau étudié est en contact avec un milieu extérieur fluide de température T_0, qui peut donc être animé de mouvements de convection. Le problème est toujours unidimensionnel et on peut le résumer sur la figure ci-contre :

Loi de Newton :
La densité de flux thermique sortant (algébriquement) à travers la surface du matériau est proportionnelle à l'écart de température entre T_S de la paroi du matériau et T_0 du milieu extérieur :

$$j_{th} = h\left(T_S - T_0\right) \quad (8)$$

Remarques :
h désigne le **coefficient de transfert thermique de surface** qui s'exprime en $W.m^{-2}.K^{-1}$.

Flux thermique : $\Phi_N = hS\left(T_S - T_0\right)$

Ordres de grandeur :

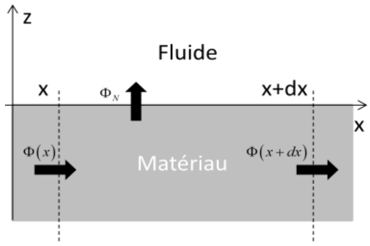
Entre un gaz et une paroi solide $h \approx 10 W.m^{-2}.K^{-1}$

Entre un liquide et un solide $h > 100 W.m^{-2}.K^{-1}$.

Dans le cas d'une convection forcée, coefficient de transfert plus élevé.

Résistance thermique :
En régime stationnaire, on peut définir un rapport entre différence de température et flux thermique, homogène à une résistance thermique telle que : $R_{th,N} = \dfrac{T_S - T_0}{\Phi_N} = \dfrac{1}{hS}$.

Cas bidimesionnel :



En faisant un bilan sur une épaisseur dx du matériau, d'épaisseur L_y suivant y et L_z suivant z, cela donne :

$$\Phi\left(x\right) = \Phi\left(x+dx\right) + \Phi_N \quad \Rightarrow$$

$$j_{th}\left(x\right) S_{cond} = j_{th}\left(x+dx\right) S_{cond} + h\left(T_S - T_0\right) dS_{conv}$$

Soit : $-\dfrac{\partial j_{th}}{\partial x} L_y L_z dx = h\left(T_S - T_0\right) L_y dx \quad \Rightarrow \quad \lambda \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} L_z = h\left(T_S - T_0\right)$

Si la surface de la paroi est suivant x, alors la température dans le matériau est confondue avec la température à sa surface (car propagation unidimensionnelle, donc T uniforme sur une section) :

$$T = T_S \quad \Rightarrow \quad \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} L_z = h\left(T\left(x\right) - T_0\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{h}{\lambda L_z} T\left(x\right) = -\frac{h}{\lambda L_z} T_0$$