

Devoir maison 4

Instructions générales

Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction. La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

En particulier, les résultats non encadrés et non justifiés ne seront pas pris en compte.

Toute application numérique ne comportant pas d'unité ne donnera pas lieu à attribution de points. Les divers problèmes sont indépendants. Les diverses parties peuvent être traitées dans l'ordre choisi par le candidat. Le candidat prendra soin de bien numéroter les questions.

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les résultats numériques peuvent être donnés sous forme approchée.

Troisième problème : A propos du théorème de Gauss

Dans tout le problème, ε_0 représente la permittivité diélectrique de l'air, égale à celle du vide.

Première partie : Le théorème de Gauss

1 – Enoncer le théorème de Gauss relatif au flux sortant du champ électrostatique $\vec{E}$ à travers une surface fermée S contenant la charge électrique Q_{int} .

Donner l'expression de l'équation de Maxwell qui permet de démontrer le théorème de Gauss.

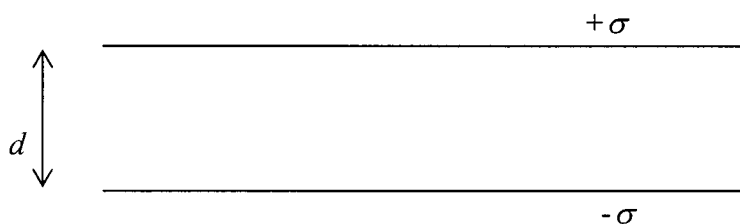
Deuxième partie : Condensateur plan

2 – On considère un plan infini uniformément chargé avec une densité surfacique σ positive.

En considérant les propriétés de symétrie de la distribution de charges, montrer que le champ électrostatique $\vec{E}$ créé par un plan infini uniformément chargé avec une densité surfacique σ est orthogonal au plan.

Démontrer que $\vec{E}$ est tel que sa norme E vaut $E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$. Représenter sur un schéma le vecteur $\vec{E}$ de part et d'autre du plan. On indiquera avec précision la surface de Gauss choisie.

3 – Soit un condensateur plan constitué par deux plans infinis, parallèles, uniformément chargés et séparés par une distance d . Le plan supérieur étant chargé avec une densité surfacique σ positive et le plan inférieur étant chargé avec une densité $-\sigma$.

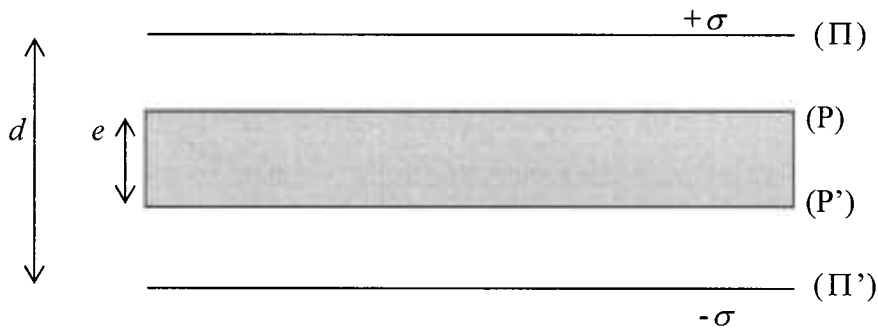


3.1 – En utilisant le théorème de superposition, déduire de la question précédente le champ électrostatique en tout point de l'espace.

3.2 – Déterminer la différence de potentiel U entre les deux plans du condensateur. On exprimera U en fonction de ε_0 , σ et d . Identifier clairement, en le justifiant, le plan dont le potentiel est le plus élevé.

3.3 – Définir et déterminer la capacité C du condensateur par unité de surface. On exprimera C en fonction de ε_0 et d .

4 – On introduit entre les deux plaques du condensateur plan précédent une plaque métallique parallélépipédique d'épaisseur $e < d$ parallèle aux armatures du condensateur. L'épaisseur e est donc une grandeur finie, mais on considère que les autres dimensions de la plaque métallique sont infinies.



On admet que le champ électrostatique est nul à l'intérieur du métal.

Justifier le fait qu'il apparaîtra des charges électriques sur les surfaces supérieure P et inférieure P' de la plaque métallique. Déterminer le signe de ces charges. On pourra s'aider d'un schéma succinct.

5 – En utilisant le théorème de Gauss sur une surface que l'on précisera, déterminer les densités surfaciques de charge σ_P et $\sigma_{P'}$, qui apparaissent sur les surfaces P et P' de la plaque métallique. Exprimer σ_P et $\sigma_{P'}$ en fonction de σ .

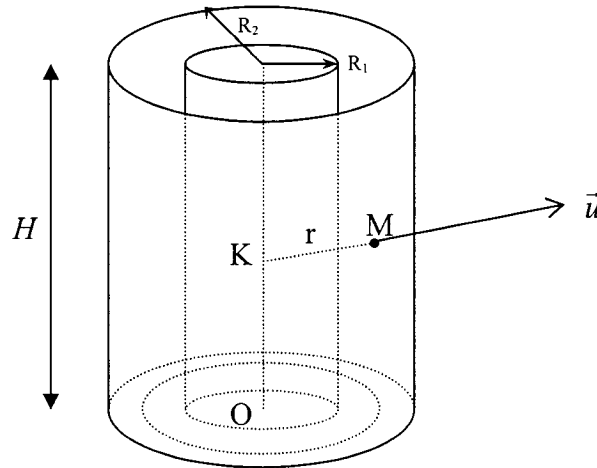
6.1 – Déterminer la valeur du champ électrostatique en un point du condensateur extérieur à la plaque métallique (entre P et Π d'une part et entre P' et Π' d'autre part). En déduire la différence de potentiel U' entre les deux armatures du condensateur. On exprimera U' en fonction de σ , e , d et ϵ_0 .

6.2 – En déduire la capacité surfacique C' du condensateur ainsi obtenu. On exprimera C' en fonction de e , d et ϵ_0 . Conclure quant à l'influence de la plaque métallique sur la capacité surfacique du condensateur.

Troisième partie : Condensateur cylindrique

On considère un condensateur cylindrique composé de deux armatures coaxiales de hauteur H et de rayons respectifs R_1 et R_2 avec $R_1 < R_2$ et placées dans l'air. L'armature interne porte la charge électrique $Q > 0$. L'armature externe porte une charge totale $-Q$.

Les potentiels électriques des armatures sont respectivement V_1 et V_2 . Soit un point M situé à la distance $r = KM$ de l'axe : $R_1 < r < R_2$. K est la projection orthogonale du point M sur l'axe du condensateur.



Soit $\vec{u}$ le vecteur unitaire de la droite (KM) dirigé de K vers M.

On admettra que le champ électrostatique $\vec{E}$ créé au point M est radial et sa norme ne dépend que de r . On peut donc écrire : $\vec{E} = E(r) \vec{u}$.

On néglige les effets de bord.

7 – En appliquant le théorème de Gauss à une surface S que l'on précisera, déterminer l'expression de $E(r)$. On exprimera $E(r)$ en fonction de Q , ϵ_0 , r et H . On distinguera les cas selon que $r < R_1$, $R_1 < r < R_2$ ou $r > R_2$.

8 – En déduire le potentiel $V(r)$ à une distance r de l'axe lorsque $R_1 < r < R_2$. On exprimera $V(r)$ en fonction de Q , H , V_1 , R_1 , ϵ_0 et r . En déduire la différence de potentiel $U = V_1 - V_2$ entre les deux armatures du condensateur en fonction de Q , ϵ_0 , H , R_1 et R_2 .

9 – Déterminer la capacité C du condensateur en fonction de ϵ_0 , H , R_2 et R_1 .

10 – On peut associer au champ électrostatique une densité volumique d'énergie u_{el} égale à $\frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$.

En utilisant l'expression de $E(r)$ déterminée précédemment et en intégrant l'expression de u_{el} déterminer l'énergie W_{cond} accumulée par le condensateur. On exprimera W_{cond} en fonction de Q , ϵ_0 , H , R_1 et R_2 . En déduire l'expression de W_{cond} en fonction de Q et C .

11 – En effectuant un développement limité de l'expression de la capacité déterminée à la question 9, montrer que si les rayons des armatures sont très proches, c'est-à-dire si $R_2 - R_1 = e \ll R_1$, le condensateur cylindrique est équivalent à un condensateur plan dont on précisera les caractéristiques.

Fin de l'énoncé