

Devoir maison 5

Instructions générales

Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction. La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

En particulier, les résultats non encadrés et non justifiés ne seront pas pris en compte.

Toute application numérique ne comportant pas d'unité ne donnera pas lieu à attribution de points. Les divers problèmes sont indépendants. Les diverses parties peuvent être traitées dans l'ordre choisi par le candidat. Le candidat prendra soin de bien numéroter les questions.

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les résultats numériques peuvent être donnés sous forme approchée.

Troisième problème : pince ampèremétrique à induction

On se propose d'étudier dans ce problème le fonctionnement d'une pince ampèremétrique à induction.

Une pince ampèremétrique est un instrument de mesure de l'intensité du courant électrique dans un conducteur.

La pince est disposée autour du conducteur parcouru par le courant dont on souhaite mesurer l'intensité. La pince ainsi positionnée permet d'accéder à l'intensité étudiée.

Une pince ampèremétrique à induction est constituée d'un tore de section carrée de côté a d'axe Oz et de rayon moyen $\frac{5a}{2}$ (figures 3 et 4 (page 14)) sur lequel sont bobinées régulièrement un grand nombre N de spires carrées de côté a disposées en série. Ce circuit de résistance totale R est fermé sur un ampèremètre de résistance interne négligeable.

L'espace est rapporté à la base cylindrique $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$.

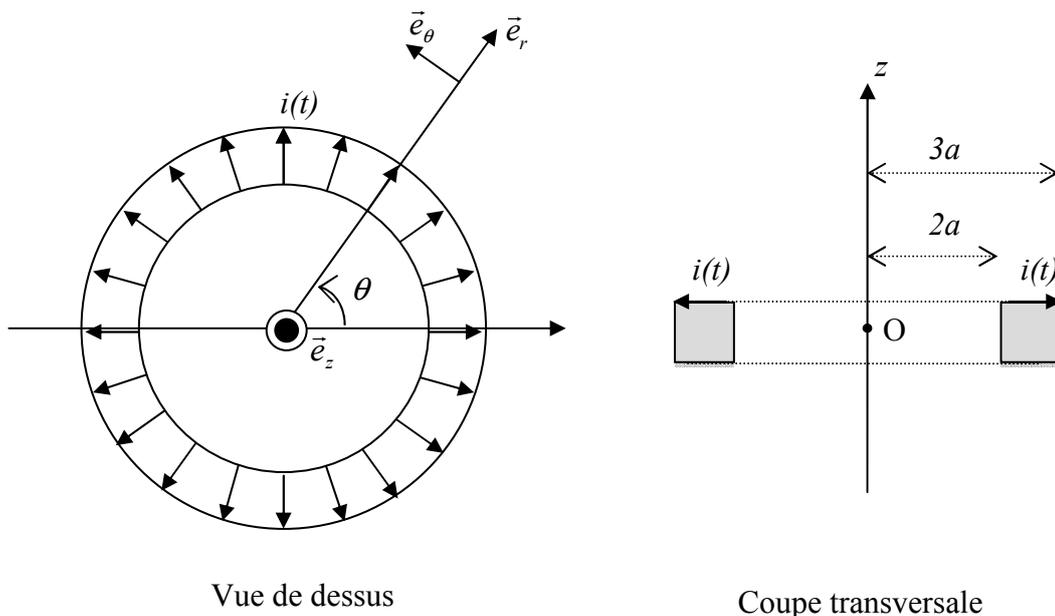


Figure 3 : bobine torique

La pince est disposée autour d'un conducteur parcouru par le courant dont on souhaite mesurer l'intensité.

Le conducteur enserré par la pince ampèremétrique est considéré comme un fil infini. Il est parcouru par un courant d'intensité $I(t) = I_m \cos(\omega t)$ de pulsation ω (figures 3 et 4) et est confondu avec l'axe Oz .

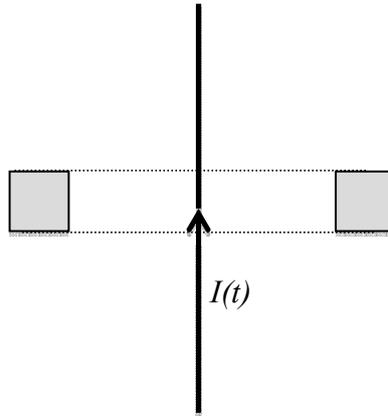


Figure 4 : bobine torique et conducteur étudié

1/ Justifier l'existence d'un courant $i(t)$ dans le bobinage torique de la pince ampèremétrique.

Soit $i(t) = i_m \cos(\omega t + \varphi)$ la valeur de l'intensité du courant dans la pince ampèremétrique en régime sinusoïdal forcé.

Soit \vec{B} le champ magnétique total qui résulte du champ créé par le courant $I(t)$ dans le fil et par le courant $i(t)$ dans la pince.

2/ En utilisant les propriétés de symétrie de la distribution de courant, montrer que le champ magnétique est nécessairement orthoradial. Montrer, grâce à l'étude des invariances, que celui-ci se met sous la forme :

$$\vec{B} = B_\theta(r, z, t) \vec{e}_\theta.$$

3/ En appliquant le théorème d'Ampère à un contour (C) soigneusement choisi et que l'on précisera, déterminer l'expression du champ magnétique \vec{B} créé par les intensités $I(t)$ et $i(t)$ en un point M repéré en coordonnées cylindriques par (r, θ, z) et situé à l'intérieur du tore ($r \in [2a ; 3a]$ et $z \in [-a/2 ; a/2]$).

4/ Etablir l'expression du flux Φ du champ magnétique \vec{B} à travers une spire du tore en fonction de $\mu_0, I(t), i(t), N$ et a .

En déduire le flux total Φ_{tot} à travers les N spires du tore en fonction de $\mu_0, I(t), i(t), N$ et a .

5/ Rappeler les définitions respectives du coefficient d'auto-inductance L et du coefficient de mutuelle inductance M .

On peut ainsi déduire des résultats précédents que les expressions de L et M sont les suivantes :

$$L = \frac{\mu_0 N^2 a \ln\left(\frac{3}{2}\right)}{2\pi} \quad \text{et} \quad M = \frac{\mu_0 Na \ln\left(\frac{3}{2}\right)}{2\pi}.$$

6/ Etablir l'expression de la force électromotrice induite $e(t)$ induite dans le tore en fonction de L , M , $\frac{di}{dt}$ et $\frac{dI}{dt}$.

7/ Ce tore de résistance totale R est fermé sur un ampèremètre de résistance interne négligeable.

On définit la fonction de transfert complexe de la pince par $\underline{H} = \frac{i}{I}$.

En utilisant la notation complexe, déterminer l'expression de la fonction de transfert en fonction de M , L , ω et R .

8/ Déterminer l'expression du module $|\underline{H}|$ de la fonction de transfert en fonction de M , L , ω et R .

Que devient l'expression de $|\underline{H}|$ à haute fréquence ? à basse fréquence ?

Ce dispositif permet-il de mesurer des intensités dans toutes les gammes de fréquence ? en particulier, permet-il de mesurer une intensité en courant continu ?

9/ Quel est l'intérêt d'une pince ampèremétrique par rapport à un ampèremètre classique ?

Fin de l'énoncé