Devoir surveillé 5

L'emploi des calculatrices personnelles est interdit.

Instructions générales

Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction. La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non encadrés et non justifiés ne seront pas pris en compte.

Toute application numérique ne comportant pas d'unité ne donnera pas lieu à attribution de points.
Les divers problèmes sont indépendants. Les diverses parties peuvent être traitées dans l'ordre choisi par le candidat. Le candidat prendra soin de bien numéroter les questions.

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les résultats numériques peuvent être donnés sous forme approchée.

Il est proposé à titre indicatif la répartition suivante des points :
Physique : - première partie : 50%
- deuxième partie : 50%

Problème 1 : Propagation dans un câble coaxial

(adapté de CCP PSI 2011 + ATS 2012 + CCP TSI 2007)

Dans tout le problème, la permittivité électrique de l'air est égale à celle du vide, notée ε_0 et égale à $8{,}85.10^{-12} F.m^{-1}$. De même, la perméabilité magnétique de l'air est égale à celle du vide, notée μ_0 et égale à $4\pi.10^{-7} H.m^{-1}$.

Les câbles coaxiaux sont utilisés comme moyen de transmission d'informations. Ils sont conçus pour transmettre des signaux sans trop d'atténuation et pour assurer une protection contre les perturbations extérieures. On les utilise notamment pour les câbles d'antenne de télévision, pour transmettre des signaux audio-numériques, ainsi que pour des interconnexions dans les réseaux informatiques.

Un câble coaxial est formé de deux très bons conducteurs, de même longueur l, l'un entourant l'autre. L'un est un conducteur massif de rayon R_1, appelé l'âme du conducteur. L'autre est un conducteur cylindrique creux de rayon intérieur R_2 et de rayon extérieur R_3, appelé la gaine du conducteur. L'espace inter-conducteur comporte un isolant.

On a : R_1 = 0,25 mm, R_2 = 1,25 mm et l = 100 m

1) Modélisation

Dans la mesure où les champs électromagnétiques ne pénètrent pas dans les conducteurs parfaits, on assimilera le câble coaxial à deux surfaces parfaitement conductrices, cylindriques, coaxiales. Le conducteur (1) a un rayon R_1, le conducteur (2) a un rayon R_2 (figure 1). Ces deux conducteurs ont même longueur l. Vu que $l \gg R_2$, on négligera les effets de bord. L'espace entre les conducteurs sera assimilé au vide sauf explicitation contraire.

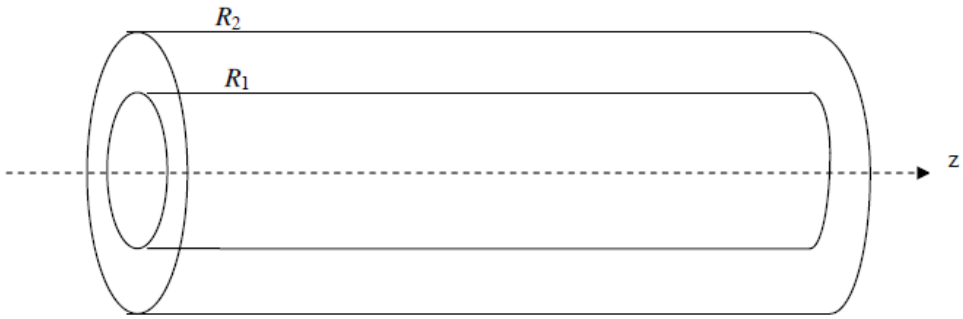

Figure 1 : Portion de câble

On note $\left(\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_\theta},\overrightarrow{u_z}\right)$ la base en coordonnées cylindriques.

1.1) Capacité linéique C

On suppose ici que les conducteurs intérieur et extérieur portent les charges électrostatiques respectives Q et -Q. Elles sont uniformément réparties en surface.

1.1.a) Justifier par des arguments d'invariance et de symétrie que $\vec{E} = E(r)\overrightarrow{u_r}$ dans l'espace interconducteur.

1.1.b) Pour $R_1 < r < R_2$, en utilisant le théorème de Gauss sur une surface que l'on précisera, exprimer E(r) en fonction de l, r, Q et ε_0.

1.1.c) Les conducteurs (1) et (2) sont portés aux potentiels respectifs V_1 et V_2, constants. Par un calcul de circulation, exprimer V_1-V_2 en fonction de Q, l, R_1, R_2 et ε_0.

1.1.d) On définit la capacité C_l du câble de longueur l par $C_l = \frac{Q}{V_1 - V_2}$. Exprimer C_l en fonction de l, R_1, R_2 et ε_0, puis la capacité linéique C du câble coaxial en fonction de R_1, R_2 et ε_0.

1.1.e) En pratique, l'espace inter-conducteur n'est pas du vide, mais comporte un isolant de permittivité relative $\varepsilon_r = 3{,}1$. On a alors $C = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$. Déterminer la valeur numérique de C.

1.1.f) Donner l'expression de la densité volumique d'énergie électrique. Puis, par intégration sur le volume inter-conducteur, exprimer l'énergie électrique W_e du câble coaxial en fonction de Q, R_1, R_2 et ε_0 et l.

1.1.g) Vérifier la valeur de C trouvée précédemment à la question 1.1.d.

1.2) Inductance linéique L

On suppose ici que le câble coaxial est alimenté par un générateur de courant continu. Le conducteur intérieur assure le transport du courant aller I_0, le conducteur extérieur assure le transport du courant retour $-I_0$.

Les répartitions de ces courants sont superficielles et uniformes sur chaque conducteur. Pour le conducteur (1), on a une densité surfacique de courant : $\overrightarrow{j_{s1}} = \frac{I_0}{2\pi R_1}\overrightarrow{u_z}$. On note : $\overrightarrow{j_{s2}}$ la densité surfacique de courant sur le conducteur (2).

1.2.a) Préciser l'expression et l'unité de $\overrightarrow{j_{s2}}$.

1.2.b) Il existe entre les deux conducteurs un champ magnétique $\vec{B}$.Par des arguments d'invariance et de symétrie, justifier que $\vec{B} = B(r)\overrightarrow{u_\theta}$.

1.2.c) Pour $R_1 < r < R_2$, par application du théorème d'Ampère sur un parcours que l'on précisera, exprimer B(r) en fonction I_0, r et μ_0.

1.2.d) Donner l'expression de la densité volumique d'énergie magnétique. Puis, par intégration sur le volume inter-conducteur, exprimer l'énergie magnétique W_m du câble coaxial en fonction de I_0, μ_0, R_1, R_2 et l.

1.2.e) En déduire l'inductance L_l du câble de longueur l, en fonction de μ_0, R_1, R_2 et de l.

1.2.f) En déduire l'inductance linéique L du câble coaxial en fonction de μ_0, R_1, R_2. Déterminer la valeur numérique de L.

1.3) Conservation de l'énergie électromagnétique

1.3.a) Donner l'équation de conservation de l'énergie électromagnétique. On identifiera et définira chacun des termes entrant dans la composition.

1.3.b) Calculer chacun des termes entrant dans son expression.

1.3.c) Donner l'expression de la puissance traversant une section droite du câble. Quelle expression retrouve-t-on ?

On rappelle l'expression de la divergence en coordonnées cylindrique :

$$div\left(\vec{a}\right) = \frac{1}{r}\frac{\partial\left(ra_r\right)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\left(a_\theta\right)}{\partial\theta} + \frac{\partial\left(a_z\right)}{\partial z}$$

2) Ondes électromagnétiques

2.1) Propagation dans le vide

2.1.a) Rappeler l'expression des équations de Maxwell dans un milieu non chargé, non conducteur et assimilable au vide. On précisera les unités du champ magnétique $\vec{B}$ et du champ électrique $\vec{E}$.

2.1.b) Déduire des équations de Maxwell l'équation de propagation vectorielle vérifiée par le champ électrique $\vec{E}$ dans un milieu non chargé, non conducteur et assimilable au vide.

2.1.c) Expliquer ce qu'est une onde plane.

On considère une onde électromagnétique pour laquelle l'expression du champ électrique est donnée en coordonnées cartésiennes par la formule : $\vec{E}(x,t) = E_0 \cos\left(\omega\left[t - \frac{x}{c}\right]\right)\vec{u_z}$ où E_0 est une constante positive, ω la pulsation de l'onde et t la variable temporelle.

2.1.d) Préciser la direction, le sens de propagation et la polarisation de l'onde considérée.

2.1.e) Montrer que cette onde vérifie l'équation de propagation déterminée à la question 2.1.b à condition que c, ε_0 et μ_0 soient reliées par une relation que l'on déterminera.

2.1.f) À l'aide de l'équation de Maxwell-Faraday déterminer l'expression du champ magnétique $\vec{B}$ de cette onde en fonction de E_0, c, ω, x, t et d'un vecteur unitaire que l'on précisera.

2.1.g) Donner l'expression du vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$ associé à une onde électromagnétique. Quelle est la signification physique de ce vecteur ? Quelle est l'unité du système international qui lui correspond ?

2.1.h) Déterminer l'expression du vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$ relatif à l'onde considérée.

2.1.i) On note $\langle\vec{\Pi}\rangle$ la valeur moyenne de $\vec{\Pi}$ au cours du temps. Exprimer $\langle\vec{\Pi}\rangle$ en fonction de c, E_0, μ_0 et d'un vecteur unitaire que l'on précisera.

2.1.j) L'onde arrive sur une cellule détectrice placée perpendiculairement à la direction de propagation de l'onde. Soit P la puissance moyenne reçue par la cellule détectrice de surface S. Déterminer l'expression de E_0 en fonction de c, ε_0, P et S.

2.2) Propagation dans le câble coaxial

On considère le câble comme infini suivant l'axe des z. Une onde électromagnétique se propage à l'intérieur du câble dans la région $R_1 < r < R_2$, assimilable à du vide. Elle est définie par son champ électrique : $\vec{E}(r,z,t) = \frac{\alpha}{r}\cos(\omega t - kz)\vec{u_r}$ où α est une constante positive.

On lui associe le champ électrique complexe : $\underline{\vec{E}}(r,z,t) = \frac{\alpha}{r}e^{j(\omega t - kz)}\vec{u_r}$

De même, il existe une champ magnétique $\vec{B}(r,z,t)$ auquel on associe le champ complexe : $\underline{\vec{B}}(r,z,t)$.

2.2.a) L'onde est-elle plane ? est-elle progressive ? si oui, préciser sa direction de propagation.

2.2.b) On note E_0 l'amplitude maximale du champ électrique dans le câble coaxial. Exprimer $\underline{\vec{E}}(r,z,t)$ en fonction de E_0, r, z, k, ω, t et R_1.

2.2.c) Déterminer en fonction de E_0, r, z, k, ω, t et R_1, l'expression du champ magnétique complexe $\underline{\vec{B}}(r,z,t)$ associé à cette onde, à une composante permanente près (indépendant du temps). Justifier pourquoi on peut considérer cette composante comme nulle.

2.2.d) Déterminer l'expression du vecteur de Poynting $\overrightarrow{\Pi}$ associé à cette onde électromagnétique en fonction de E_0, r, z, k, ω , t, R_1 et μ_0.

2.2.e) Déterminer l'expression de la puissance moyenne transportée P, par le câble en fonction de E_0, R_1, R_2, c et μ_0.

Application numérique : en déduire l'amplitude E_0 du champ électrique sachant que la puissance moyenne transportée est de 10 W.

2.2.f) En un point de cote z donné, par un calcul de circulation, déterminer la différence de potentiel $\underline{u}(z,t)=\underline{V_1}(z,t)-\underline{V_2}(z,t)$ entre l'âme et la gaine, en fonction de E_0, R_1, R_2, k, z, ω et t.

2.2.g) Pour z donné, déterminer le courant $\underline{i}(z,t)$ véhiculé par l'âme du câble coaxial, en fonction de E_0, R_1, k, z, ω et t, μ_0 et c.

2.2.h) On définit l'impédance caractéristique du câble : $Z_c=\dfrac{\underline{u}(z,t)}{\underline{i}(z,t)}$. Exprimer Z_c en fonction de μ_0, c, R_1 et R_2, puis de μ_0, ε_0 , R_1 et R_2, puis en fonction de l'inductance linéique L et de la capacité linéique C du câble à structure « air ou vide », c'est-à-dire de permittivité diélectrique ε_0 .

2.2.i) Compte tenu de l'isolant séparant l'âme de la gaine, on a, en pratique : $Z_c=\dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{\mu_0}{\varepsilon_0\varepsilon_r}}\ln\left(\dfrac{R_2}{R_1}\right)$

. Application numérique : déterminer la valeur de Z_c.

Problème 2 : Synthèse industrielle d'ammoniac et applications

(adapté de CCP TSI 2013 et autres)

L'ammoniac est un des composés les plus synthétisés dans l'industrie, à raison d'environ 130Mt par an. 80% de la production est utilisé dans la fabrication des engrais à la fois directement et après formation d'acide nitrique (nitrates d'ammonium...). La production de telles quantités de ce gaz a été rendue possible par l'apparition du procédé Haber-Bosch qui permet la synthèse de l'ammoniac à partir du diazote, présent en abondance dans l'atmosphère, et du dihydrogène, obtenu par reformage du méthane à la vapeur d'eau.

1) Synthèse industrielle de l'ammoniac

On assimile les gaz à des gaz parfaits et le mélange des gaz est supposé idéal.

La synthèse de l'ammoniac en phase gazeuse repose sur la réaction directe de l'hydrogène avec le diazote selon le bilan : $N_2 + 3H_2 = 2NH_3 \quad (1)$

On donne la constante d'équilibre de la synthèse de NH_3 sous une pression totale constante P et une température T maintenant à 450°C : $K^0 = 2{,}1.10^{-4}$.

1.1) Rappeler en quoi consiste l'approximation d'Ellingham.

1.2) Que valent les enthalpies standard de formation de N_2 et H_2 ? Justifier.

1.3) En déduire l'expression de l'enthalpie libre de la réaction (1) à toute température.

1.4) Quelle est l'influence d'une élévation de température à pression constante sur cet équilibre ? Justifier.

1.5) Quelle est l'influence d'une élévation de pression à température constante sur cet équilibre ? Justifier.

1.6) Quelle sera l'influence de l'ajout d'un gaz inerte à la réaction ? Justifier par le calcul.

1.7) Montrer que la température d'inversion T_i de la réaction de synthèse de l'ammoniac est aux alentours de 470 K. Quel est le domaine de température qui permettrait d'obtenir un bon rendement thermodynamique ?

1.8) Exprimer la constante d'équilibre K^0 de la synthèse de NH_3 en fonction des pressions partielles des différentes espèces à l'équilibre et de P^0. On note P_j la pression partielle du gaz j. Comment appelle-t-on P^0 et quelle est sa valeur ?

1.9) On suppose que l'on part d'un mélange stœchiométrique de N_2 et H_2 (on appelle n_0 la quantité initiale de N_2). Etablir le tableau d'avancement de la réaction et en déduire le nombre total de moles gazeuses à l'équilibre n_{tot} en fonction de n_0 et l'avancement ξ de la réaction.

1.10) On appelle α le coefficient de dissociation de N_2 à l'équilibre : rapport entre la quantité de matière d'ammoniac obtenue à l'équilibre et la quantité maximale d'ammoniac susceptible d'être obtenue si la réaction était totale. Exprimer α en fonction de n_0 et ξ.

1.11) En déduire l'expression des pressions partielles à l'équilibre de NH_3, N_2 et H_2 en fonction de P et α.

1.12) Montrer que l'on a : $K^0 = \frac{16}{27}\frac{\alpha^2(2-\alpha)^2}{(1-\alpha)^4}\left(\frac{P^0}{P}\right)^2$

1.13) Le taux de dissociation à l'équilibre vaut $\alpha = 0{,}52$ pour une température de 450°C. En déduire la valeur de la pression totale P. Commenter.

2) L'ammoniac en solution aqueuse

2.1) Détermination du pK_A

On étudie une solution d'ammoniac. On mesure la conductivité de cette solution de concentration c = $8{,}0.10^{-4}$ mol.L^{-1} et l'on trouve $\sigma = 2{,}87.10^{-3} S.m^{-1}$.

2.1.a) Ecrire la réaction de l'ammoniac avec l'eau. La solution est-elle acide ou basique ?

2.1.b) Rappeler le principe de mesure de la conductivité par conductimètre.

2.1.c) Donner l'expression générale de la conductivité σ de la solution en introduisant les conductivités ioniques des différents ions à 298 K.

2.1.d) En déduire la valeur du pH de la solution.

2.1.e) Calculer le pKa du couple $NH_{4(aq)}^{+}$ / $NH_{3(aq)}$.

2.2) Dosage pH-métrique

On se propose de réaliser le dosage de 100 mL d'une solution aqueuse de NH_3 de concentration c par une solution d'acide chlorhydrique de concentration 0,1 mol.L^{-1}. Le volume équivalent, noté v_{eq}, est de 8 mL.

2.2.a) Quelles sont les électrodes nécessaires à ce dosage ?

2.2.b) Ecrire le bilan de la réaction qui a lieu avant l'équivalence. Calculer la concentration c de la solution utilisée.

2.2.c) Quel indicateur coloré peut-on utiliser pour suivre le dosage par colorimétrie ? Justifier la réponse en calculant le pH de la solution obtenue à l'équivalence.

Données thermodynamiques à 298 K

	NH_3
$\Delta_f H^0 \left(kJ.mol^{-1} \right)$	-46,3

Constante des gaz parfaits : R = 8,31 J.K^{-1}.mol^{-1}

Conductivités molaires ioniques

	H_3O^+	HO^-	NH_4^+	Cl^-
λ^0 en $S.m^2.\text{mol}^{-1}$	$3{,}5.10^{-2}$	$2{,}0.10^{-2}$	$0{,}74.10^{-2}$	$0{,}76.10^{-2}$

pK_a à 298 K

$pK_a \left(NH_4^+ / NH_3 \right) = 9{,}25$

Zones de virages de quelques indicateurs colorés

- phénolphtaléine : 8,3-10,0
- bleu de bromothymol : 6,0-7,3
- rouge de méthyle : 4,2-6,3
- hélianthine : 3,4-4,4

Problème 3 ouvert

On cherche à mettre en place une liaison radio entre un bateau à la surface de la mer et un sous-marin situé à 30 mètres de profondeur. L'émetteur radio sur le bateau émet une puissance de 10 W. Le sous-marin peut-il recevoir le signal radio sachant qu'il faut au minimum que le récepteur reçoive une puissance de 2W ?

On pourra supposer que le bateau se trouve à la verticale du sous-marin.

On précisera bien toute les notations utilisées.

Données :

Permittivité relative de l'air : $\varepsilon_1 = 1$

Permittivité relative de l'eau : $\varepsilon_2 = 80$

Précisions :

Dans un milieu diélectrique linéaire homogène et isotrope tel que l'air ou l'eau, les équations de Maxwell sont toujours valables à condition que l'on remplace la permittivité du vide ε_0 par la permittivité du milieu ε où : $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$ avec ε_r la permittivité relative du milieu.

Un tel milieu peut aussi être caractérisé par son indice n (aussi appelé indice optique) et directement lié à la permittivité relative tel que : $n = \sqrt{\varepsilon_r}$.

Aide :

On pourra dans un premier temps définir un champ électrique incident émis par l'émetteur et y relier la puissance d'émission.

A l'interface air-eau se trouvant en $z = z_0$, on pourra utiliser les coefficients de réflexion et transmission en amplitude définis par : $\underline{r} = \dfrac{\underline{\overrightarrow{E_r}}(z_0,t)}{\underline{\overrightarrow{E_i}}(z_0,t)}$ *et* $\underline{t} = \dfrac{\underline{\overrightarrow{E_t}}(z_0,t)}{\underline{\overrightarrow{E_i}}(z_0,t)}$ où $\overrightarrow{E_r}$ est le champ réfléchi et $\overrightarrow{E_t}$ le champ transmis.

On rappelle que la composante tangentielle du champ électrique est continue à la traversée d'une surface chargée et que la composante tangentielle du champ magnétique présente une discontinuité égale à $\mu_0 j_s$ où μ_0 est la perméabilité du vide et j_s la densité de courant surfacique présente à la surface.