Equations de Maxwell

6 Exercices

6.1 Calcul d'une densité de charge

Déterminer la densité volumique de charge $\rho(x)$ correspondant au champ électrique suivant :

$$\vec{E} = E_0 \frac{x}{a} \vec{u}_x \ pour -a \leq x \leq a \quad ; \quad \vec{E} = E_0 \vec{u}_x \ pour\ x > a \quad ; \quad \vec{E} = -E_0 \vec{u}_x \quad pour\ x < -a$$

6.2 Etude d'un champ électrique à distribution cylindrique

Soit le champ $\vec{E}$ à symétrie cylindrique, défini en coordonnées cylindriques par :

$$\begin{cases} E_r = E_0 \dfrac{r}{r_0} \quad si \quad r \leq r_0 \quad E_r = E_0 \dfrac{r_0}{r} \quad si \quad r > r_0 \\ E_\theta = 0 \\ E_z = 0 \end{cases}$$

1) Déterminer les lignes de champ. Comment varie $\vec{E}$ le long d'une ligne de champ ?

2) Calculer $div\vec{E}$ en tout point. Pour un champ radial en coordonnées cylindriques, quelle loi de dépendant avec r permet d'assurer une divergence nulle ?

En coordonnées cylindriques : $div\vec{a} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial r a_r}{\partial r}\right) + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial a_\theta}{\partial \theta}\right) + \left(\frac{\partial a_z}{\partial z}\right)$

3) Exprimer, par deux méthodes différentes le flux $\phi = \iint_\Sigma \vec{E} \cdot \vec{dS}$, où Σ est un cylindre d'axe Oz, de hauteur h et de rayon r.

4) Si $\vec{E}$ est un champ électrostatique, à quelle distribution de charges le problème correspond-il ?

5) Que vaut le rotationnel de ce champ ?

En coordonnées cylindriques : $\overrightarrow{rot}\vec{a} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial a_z}{\partial \theta} - \frac{\partial a_\theta}{\partial z}\right)\vec{u_r} + \left(\frac{\partial a_r}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial r}\right)\vec{u_\theta} + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial r a_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial a_r}{\partial \theta}\right)\vec{u_z}$

6.3 Champ magnétostatique tourbillonnaire

Soit le champ vectoriel W défini en coordonnées cylindriques par :

$$\begin{cases} W_r = 0 \\ W_\theta = W_0 \dfrac{r}{r_0} \quad si \quad r \leq r_0 \quad W_\theta = W_0 \dfrac{r_0}{r} \quad si \quad r > r_0 \\ W_z = 0 \end{cases}$$

1) Justifier l'appellation de champ de tourbillon.

2) Exprimer la circulation de $\vec{W}$ sur le cercle de centre O d'axe Oz et de rayon r.

3) Calculer en tout point $\overrightarrow{rot}\left(\vec{W}\right)$, puis vérifier le résultat du b) par application du théorème de Stokes.

4) Calculer la divergence du champ en tout point.

5) Si le champ étudié ici est un champ magnétostatique : quelle est la distribution de courant correspondante ?

6.4 Champ électromagnétique

On considère une situation dans laquelle le champ électrique s'écrit : $\vec{E}(x,t) = E_0 \cos(\omega t - kx)\overrightarrow{u_x}$

En déduire l'expression du champ magnétique. Puis calculer séparément les densités de charge et de courant et vérifier la relation qui les lie.

6.5 Courants électriques et courants de déplacement

On se place dans un milieu ohmique de conductivité ϒ$\left(\vec{j} = \gamma \vec{E}\right)$, en régime sinusoïdal forcé de fréquence ν.

1) Montrer que $\left|\vec{j}\right| > \left|\overrightarrow{j_D}\right|$ pour peu que $\nu < \nu_{max}$. Exprimer ν_{max} en fonction de ε_0 et ϒ.

2) Application numérique :

- dans le cas du cuivre (ϒ = $5{,}8.10^{7}S.m^{-1}$) ;
- dans le cas de l'eau (ϒ = $1,\ 0.10^{-9}S.m^{-1}$).

6.6 Piège électrostatique

On considère une région de l’espace, vide de charges, dans laquelle règne un potentiel :

$$V(x,y,z) = \frac{V_0}{a^2}\left(x^2 + y^2 - 2z^2\right)$$

V_0 est une grandeur positive, a désigne une longueur caractéristique du problème.

1) Vérifier l’équation de Poisson.

2) Sur l’axe Ox, quelle est la loi de variation du potentiel avec l’abscisse ? Que représente la quantité $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$? Commenter son signe et comparer à celui obtenu pour $\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$.

3) Déterminer le champ électrique à l’origine du repère. Si l’on place une particule de charge q_0 en ce point, est-elle en équilibre stable ?