Description d'un fluide en écoulement stationnaire dans une conduite

4 Exercices

4.1 Ecoulement sanguin

A la sortie du cœur, l'aorte peut être considérée comme une conduite cylindrique de rayon a_0 = 1 cm. Le débit volumique est D_V = 6 $L.min^{-1}$ et on suppose que l'écoulement peut être considéré comme stationnaire. Sa masse volumique vaut $\mu = 1{,}0.10^3 kg.m^{-3}$.

1) Quelle est la vitesse v du sang dans l'aorte ? On supposera que le champ des vitesses est uniforme sur une section droite.

Le sang est évacué du cœur d'abord au niveau de l'aorte, qui se divise en N_a artères de rayon a_a, puis en N'_a artérioles de rayon a'_a = 20 µm. Le débit volumique au travers d'une artère est $D_{V,a} = 2.10^{-6} m^3.s^{-1}$.

2) Calculer le nombre N_a d'artères.

3) Faire de même avec N'_a sachant que la vitesse du sang dans une artériole est v'_a = 5$mm.s^{-1}$.

4.2 Exemples d'écoulements

On s'intéresse ici à deux écoulements stationnaires. De l'eau supposée incompressible sort d'un tuyau en O (source) avec un débit volumique D_V constant. L'eau se répartit ensuite isotropiquement sur le sol sur une épaisseur e et s'éloigne radialement de O.

1) Tracer l'allure des lignes de courant. Faire de même avec quelques tubes de courant. Cet écoulement est-il rotationnel ?

2) Proposer une expression pour le champ de vitesse $\vec{v}$, en supposant que la norme de la vitesse ne dépend que de l'éloignement à l'axe Oz. Vérifier la question précédente à l'aide de l'opérateur rotationnel.

En coordonnées cylindrique : $\overrightarrow{rot}\vec{a} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial a_z}{\partial \theta} - \frac{\partial a_\theta}{\partial z}\right)\vec{e_r} + \left(\frac{\partial a_r}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial r}\right)\vec{e_\theta} + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial r a_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial a_r}{\partial \theta}\right)\vec{e_z}$

On considère cette fois-ci la modélisation d'un tourbillon gazeux, autour de l'axe Oz. La vitesse est supposée ne dépendre que de la distance à l'axe Oz, et les particules de fluide ont une trajectoire circulaire.

3) Tracer l'allure des lignes de courant. Faire de même avec quelques tubes de courant. Comment qualifier l'écoulement ?

4) Proposer une expression pour le champ de vitesse $\vec{v}$. On supposera que la circulation de la vitesse sur tout cercle C d'axe Oz est une constante : $C = \oint_C \vec{v} \cdot \vec{dl}$. Vérifier la question précédente à l'aide de l'opérateur divergence.

En coordonnées cylindrique : $div\vec{a} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial r a_r}{\partial r}\right) + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial a_\theta}{\partial \theta}\right) + \left(\frac{\partial a_z}{\partial z}\right)$

4.3 Modélisation d'un tourbillon de vidange

On modélise, en coordonnées cylindriques d'axe (Oz), le tourbillon de vidange d'un lavabo par un cœur cylindrique de rayon a et d'axe (Oz) dans lequel la vitesse est donnée par $\vec{v} = r\omega\overrightarrow{u_\theta}$ où ω est la vitesse angulaire du fluide. Dans la zone périphérique qui entoure le cœur, le champ des vitesse est de la forme $\vec{v} = \frac{C}{r}\overrightarrow{u_\theta}$, où C est une constante.

En coordonnes cylindriques : $\overrightarrow{rot}\vec{a} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial a_z}{\partial \theta} - \frac{\partial a_\theta}{\partial z}\right)\overrightarrow{e_r} + \left(\frac{\partial a_r}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial r}\right)\overrightarrow{e_\theta} + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial r a_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial a_r}{\partial \theta}\right)\overrightarrow{e_z}$

1) Tracer l'allure de v en fonction de r. En déduire l'expression de la constante C.

2) Montrer que l'écoulement n'est rotationnel que dans une région que l'on précisera.

3) On se place dans la zone périphérique du tourbillon. Donner l'allure des lignes de courants dans un plan orthogonal à (Oz). Décrire brièvement le mouvement d'un bouchon placé à la surface de l'eau dans cette zone. Le bouchon tourne-t-il sur lui-même ? Tourne-t-il autour de l'axe du tourbillon ?