Propagation

6 Exercices

6.1 Solution de l'équation de propagation

Montrer que $\mathrm{u}(x,t) = f_1(t-\frac{x}{v}) + f_2(t+\frac{x}{v})$ est solution de l'équation de propagation :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

6.2 Solution des équations de d'Alembert en ondes planes progressives

1) Etablir les équations de propagation pour $\vec{E}$ et $\vec{B}$ en présence de charge et de courant dans un premier temps. Montrer que dans le vide local elles se mettent sous la forme d'un opérateur $\vec{\Delta}(\ ) - \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2(\ )}{\partial t^2}$ (dit opérateur d'Alembertien) qui, appliqué aux champs, donne $\vec{0}$. Commenter dans ce dernier cas la dépendance temporelle des équations de d'Alembert.

2) Plaçons, nous dans le cas où les champs ne dépendent que du temps et d'une unique coordonnée spatiale suivant l'axe (Oz), en coordonnées cartésiennes. On note alors $\xi(z,t)$ l'une des composantes de $\vec{E}$ ou $\vec{B}$ ne dépendant que de la côte z et du temps t.

a) Rappeler la définition d'une onde plane.

b) Trouver la solution des équations de d'Alembert à une dimension en onde plane progressive. Quelle est la dimension du terme $\varepsilon_0\mu_0$?

c) Généraliser ces résultats au cas d'une direction de propagation quelconque définie par le vecteur unitaire $\vec{n} = \alpha\overrightarrow{u_x} + \beta\overrightarrow{u_y} + \gamma\overrightarrow{u_z}$.

3) On se place dans le cas où $\vec{n} = \overrightarrow{u_z}$. Montrer que les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont transversaux. Trouver la relation liant $\vec{E}$, $\vec{B}$ et $\vec{n}$.

4) Déterminer l'expression de la densité volumique d'énergie électromagnétique u_{em}. Commenter. Exprimer le vecteur de Poynting ainsi que la puissance transportée à travers une surface S perpendiculaire à la direction de propagation. En déduire le vecteur vitesse de propagation de l'énergie.

6.3 Champ électromagnétique

On considère le champ électrique, régnant dans une partie de l'espace vide de charge et de courant :

$$\vec{E}(M,t) = E_0\cos(\omega t + kz)\overrightarrow{u_x} + E_0\sin(\omega t + kz)\overrightarrow{u_y} \quad avec \quad k = \sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\,\omega$$

1) Vérifier la compatibilité de cette expression avec l'équation de propagation.

2) Déterminer le champ magnétique associé.

3) Déterminer le vecteur de Poynting de ce champ électromagnétique.

6.4 Etude de l'OPPM associé à un rayon laser

On considère un faisceau laser de puissance moyenne $\langle P\rangle = 1mW$ et de section $s = 4mm^2$ modélisé par une onde électromagnétique monochromatique se propageant dans le vide dont le champ électrique est de la forme : $\vec{E}(z,t) = E_0 \cos\left(k(z-ct)+\varphi_0\right)\overrightarrow{u_x}$.

1) Décrire précisément les différents termes intervenant dans cette écriture et leur sens physique. Décrire l'état de polarisation. Montrer, en écrivant la relation de dispersion liant la norme du vecteur d'onde à la pulsation, que l'on peut écrire de façon équivalente : $\vec{E}(z,t) = E_0 \cos\left(kz-\omega t+\varphi_0\right)\overrightarrow{u_x}$.

2) Exprimer le champ magnétique $\vec{B}(z,t)$ attaché à cette onde.

3) Exprimer le vecteur de Poynting $\vec{R}$. En déduire l'expression littérale de l'amplitude du champ électrique en fonction de $\langle P\rangle$ et de s, de la célérité de la lumière dans le vide et de ε_0. Donner sa valeur numérique.

6.5 Exemple d'onde électromagnétique

On s'intéresse à la propagation de l'onde électromagnétique définie par : $\underline{\vec{E}}(M,t) = E_0 \exp\left(i\left(\omega t - \alpha(x+y)\right)\right)\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ dans la base $\left(\overrightarrow{u_x},\overrightarrow{u_y},\overrightarrow{u_z}\right)$. E_0, α et ω sont des constantes positives.

1) Cette onde se propage-t-elle ?
2) Donner le vecteur d'onde $\vec{k}$ de l'onde.
3) Est-elle plane ?
4) Que dire de sa polarisation ?
5) Evaluer le champ magnétique $\underline{\vec{B}}(M,t)$.
6) Que veut la densité volumique de charge ?
7) Sachant que la densité volumique de courant est de même nulle, en déduire une relation entre α, ω et c, vitesse de la lumière dans le vide.
8) Calculer le vecteur de Poynting moyen. Commenter son expression.

6.6 Caractérisation d'ondes

1) Soit l'onde $\underline{\overrightarrow{E_1}} = E_0 \exp\left(i(ky+\omega t)\right)\overrightarrow{u_z}$

a) Quelle est sa direction de propagation ?
b) Quelle est sa direction de polarisation ?

2) Soit l'onde $\underline{\overrightarrow{E_2}} = E_0 \exp\left(i(\omega t-kz)\right)\left(\overrightarrow{u_x}+2\overrightarrow{u_y}\right)$

a) Quelle est sa direction de propagation ?
b) Quelle est sa direction de polarisation ?

3) Soit l'onde $\underline{\overrightarrow{E_3}} = E_0 \exp\left(i(\omega t-kz)\right)\left(\overrightarrow{u_x}+2i\overrightarrow{u_y}\right)$ Que dire de sa polarisation ?

6.7 Polarisation d'onde électromagnétique

1) Décrire l'état de polarisation des ondes suivantes :

$$(a)\quad \vec{E} = E_0\cos(\omega t + kz)\overrightarrow{u_x} + E_0\cos\left(\omega t + kz + \frac{\pi}{3}\right)\overrightarrow{u_y}$$

$$(b)\quad \vec{E} = E_0\cos\left(\omega t - kz - \frac{\pi}{8}\right)\overrightarrow{u_x} + E_0\cos\left(\omega t - kz - \frac{\pi}{8}\right)\overrightarrow{u_y}$$

2) Donner l'expression d'une onde électromagnétique plane progressive harmonique se propageant dans le sens des x négatifs, à polarisation circulaire.

6.8 Superposition des deux ondes planes progressives monochromatiques

On s'intéresse à la superposition de deux ondes planes progressives monochromatiques de même amplitude E_0, de même pulsation ω et se propageant respectivement selon les vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$. On pose pour 0 ≤ α ≤ π/2 :

$$\overrightarrow{u_1} = \sin\alpha\overrightarrow{u_x} + \cos\alpha\overrightarrow{u_z}$$
$$\overrightarrow{u_2} = -\sin\alpha\overrightarrow{u_x} + \cos\alpha\overrightarrow{u_z}$$

1) Quelles sont les normes des deux vecteurs d'onde k_1 et k_2 ?

2) Sachant que les deux champs électriques sont parallèles à $\overrightarrow{u_y}$ et qu'ils sont en phase dans le plan x = 0, donner leur expression sous forme complexe.

3) En déduire l'expression du champ électrique total. Décrire l'onde obtenue. Est-elle plane ? Est-elle progressive ?

4) Donner la forme du champ magnétique. Commentaires.

5) En déduire le vecteur de Poynting moyen. Pouvait-on deviner sa direction ?

6.9 Détermination rapide du champ électrique réfléchi

On considère l'onde : $\underline{\overrightarrow{E_i}}(z,t) = E_0\exp(i(\omega t - kz))\overrightarrow{u_x}$ arrivant en incidence normale sur un conducteur parfait occupant le demi-espace $z \geq 0$.

1) Que peut-on envisager concernant la pulsation, la direction de propagation et la polarisation de l'onde réfléchie ?

2) En déduire l'expression du champ réfléchi. On fera intervenir le coefficient de réflexion en amplitude $\underline{r}$ du champ électrique. Celui-ci se définit comme : $\underline{r} = \dfrac{\underline{E_r}(z_0,t)}{\underline{E_i}(z_0,t)}$ où z_0 est la position du changement de milieu.

3) Quelle considération physique doit-on faire intervenir afin de calculer explicitement $\underline{r}$? Retrouver ainsi sa valeur.

6.10 Cavité résonante

On s'intéresse à une cavité contenue entre deux plans parallèles infinis, taillée dans un conducteur parfait entre z = 0 et z = a. On s'intéresse à un champ électromagnétique, qui est la superposition de deux ondes planes progressives monochromatiques polarisées rectilignement suivant Ox et de sens de propagation opposés ± u_z, de normes respectives E_1 et E_2.

1) Donner l'expression du champ électrique complexe résultant de la superposition, puis la forme exacte du champ électrique dans la cavité en utilisant les conditions aux limites.

2) Montrer que seules certaines longueurs d'onde discrètes λ_n peuvent exister dans la cavité. Quelles sont les fréquences f_n associées ?

3) Comment appeler ce phénomène ? Donner une analogie en électrocinétique. Que se passe-t-il si on essaie de créer un champ électromagnétique de fréquence différente de f_n ?

4) Tracer sur un même graphe l'allure, à un instant donné, du champ électrique pour les trois plus basses fréquences. Combien de nœuds et de ventres possède le mode numéro n ?

5) En admettant que, dans le domaine de l'acoustique, un tube soit régi par les mêmes équations qu'une cavité résonante, identifier les tubes d'une flûte de Pan produisant les sons aigus et ceux produisant les sons graves. On supposera que le mode fondamental n = 1 est prédominant.

6.11 Réflexion et transmission à l'interface de deux milieux transparents

Deux milieux semi-infinis, transparents, d'indices n_1 et n_2 occupent les demi-espaces $z \leq 0$ et $z \geq 0$. Une onde plane progressive monochromatique polarisée rectilignement selon u_x arrive depuis les $z \leq 0$ en incidence normale sur l'interface. On rappelle que la célérité des ondes dans un milieu d'indice n est égale à c/n.

1) On appelle $\underline{r}$ et $\underline{t}$ les coefficients en réflexion et transmission en amplitude pour le champ électrique. Donner l'expression des champs électriques et magnétiques incidents, réfléchis et transmis en fonction de $\underline{r}$ et $\underline{t}$.

3) Calculer $\underline{r}$ et $\underline{t}$ grâce aux conditions aux limites. Commentaires ?

4) Calculer les coefficients de réflexion R (transmission T) en énergie, définis comme le rapport du module du vecteur de Poynting moyen réfléchi (transmis) par celui du vecteur de Poynting moyen incident. Quelle relation existe-t-il entre R et T, quel est son sens physique ?

6.12 Equations de Maxwell et lois de Snell-Descartes

Une onde plane progressive monochromatique polarisée rectilignement selon u_y arrive avec l'incidence θ_1 sur l'interface z = 0 séparant deux milieux transparents d'indices n_1 et n_2. Son vecteur d'onde est contenu dans le plan y = 0 et fait un angle θ_1 avec u_z. Une onde réfléchie et une onde transmise sont engendrées à cette interface. On les choisit aussi comme planes progressives monochromatiques de vecteurs d'onde k_r et k_t.

1) Ecrire les formes de ces trois ondes.

2) Montrer que les vecteurs d'onde réfléchis et transmis appartiennent au plan d'incidence (plan y = 0), et trouver une relation entre les trois angles formés par les vecteurs d'onde et u_z grâce à la partie spatiale de leur phase. Qu'en déduisez-vous ?